

УДК 512.542

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДФОРМАЦИЯХ n -КРАТНО ω -ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.П. Максаков, М.М. Сорокина

ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$. В статье изучаются свойства максимальных n -кратно ω -веерных подформаций заданной n -кратно ω -веерной формации. В работе установлено существование максимальной n -кратно ω -веерной подформации для формации с определенными свойствами, получена характеристика формации $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$, являющейся пересечением всех максимальных n -кратно ω -веерных подформаций с направлением δ заданной формации $\mathfrak{F}$.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация, ω -веерная формация, n -кратно ω -веерная формация.

В теории классов конечных групп важное место занимают формации. В настоящее время для их изучения широко применяется функциональный подход, который впервые был предложен В. Гашюцем при построении локальных формаций [15]. В дальнейшем с помощью функциональных методов Л.А. Шеметковым были построены композиционные формации [11], ω -локальные формации [12], где ω – непустое множество простых чисел. В работе [8] А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым построены $\mathcal{L}$ -композиционные формации, где $\mathcal{L}$ – непустой класс конечных простых групп. Важные результаты о строении, свойствах, применении локальных, ω -локальных, композиционных, $\mathcal{L}$ -композиционных формаций получены Л.А. Шеметковым, А.Н. Скибой, С.Ф. Каморниковым, А.Ф. Васильевым, В.Н. Семенчуком, В.Г. Сафоновым, Н.Н. Воробьевым и др. (см., например, [5, 7–9, 13, 14]). В рамках нового функционального подхода к изучению классов конечных групп, предложенного В.А. Ведерниковым в 1999 году, были введены в рассмотрение ω -веерные и Ω -расслоенные формации (см., например, [2 – 4]), естественным образом обобщающие ω -локальные и Ω -композиционные ($\mathcal{L}$ -композиционные при $\mathcal{L} = \Omega$) формации соответственно. Исследованием различных видов ω -веерных и Ω -расслоенных формаций занимались Ю.А. Еловикова, М.М. Сорокина, М.А. Корпачева, Н.В. Силенок, А.Б. Еловинов, Д.Г. Коптюх и другие (см., например, [2, 6, 10]). В монографии А.Н. Скибы [9] детально изучены свойства максимальных подформаций τ -замкнутых n -кратно локальных формаций, где τ – произвольный (регулярный) подгрупповой функтор. В работах А.Н. Скибы, Л.А. Шеметкова [7] и [8] представлены ключевые свойства максимальных подформаций n -кратно ω -локальных и n -кратно $\mathcal{L}$ -композиционных формаций соответственно. Целью данной работы является изучение максимальных n -кратно ω -веерных подформаций заданной n -кратно ω -веерной формации конечных групп. В теоремах 1 – 3 исследованы вопросы существования максимальной n -кратно ω -веерной подформации для заданной формации $\mathfrak{F}$. В теореме 4 получена характеристика формации $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$, являющейся пересечением всех максимальных n -кратно ω -веерных подформаций с направлением δ заданной формации $\mathfrak{F}$.

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения стандартны (см., например, [9, 13, 14]). Приведем лишь некоторые из них. Символ $:=$ означает равенство по определению. *Классом групп* называется множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы ей изоморфные. Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ обозначает класс групп,

порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G . Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняется два условия:

- 1) из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $G/N \in \mathfrak{F}$ (т.е. класс $\mathfrak{F}$ Q -замкнут);
- 2) из $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$ следует $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$ (т.е. класс $\mathfrak{F}$ R_0 -замкнут).

Формацией, порожденной множеством групп $\mathfrak{X}$, называется формация, являющаяся пересечением всех формаций, содержащих множество $\mathfrak{X}$, и обозначается $form(\mathfrak{X})$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполняется два условия:

- 1) из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $N \in \mathfrak{F}$ (т.е. класс $\mathfrak{F}$ S_n -замкнут);
- 2) из $G = N_1 N_2$, $N_1 \triangleleft G$, $N_2 \triangleleft G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$ (т.е. класс $\mathfrak{F}$ R -замкнут).

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. $\mathfrak{F}$ -*радикалом* группы G называется произведение всех нормальных подгрупп группы G , принадлежащих $\mathfrak{F}$, и обозначается $G_{\mathfrak{F}}$. Через $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ обозначается *произведение классов* групп $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, то есть

$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 = \{ G \in \mathfrak{E} \mid \text{существует } N \triangleleft G, N \in \mathfrak{F}_1, G/N \in \mathfrak{F}_2 \}.$$

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, $p \in \mathbb{P}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G , $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение классов $\pi(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – класс групп. Через $\mathfrak{G}_{\omega}$ обозначается класс всех ω -групп, т.е. таких групп, для которых выполняется $\pi(G) \subseteq \omega$; $\mathfrak{N}_p := \mathfrak{G}_{\{p\}}$ и $\mathfrak{G}_{p'} := \mathfrak{G}_{\mathbb{P} \setminus \{p\}}$ – классы всех p -групп и всех p' -групп соответственно; $\mathfrak{G}_{(Z_p)'} -$ класс всех групп, у которых нет ни одного композиционного фактора, изоморфного Z_p , где Z_p – группа простого порядка p ; $\mathfrak{S}_{cp}$ – класс всех групп, у которых каждый главный p -фактор централен; $O_{\omega}(G) := G_{\mathfrak{G}_{\omega}}$ – $\mathfrak{G}_{\omega}$ -радикал группы G .

Пусть $h: \mathbb{P} \rightarrow \{ \text{формации групп} \}$, $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{ \text{формации групп} \}$, где $f(\omega') \neq \emptyset$, $\delta: \mathbb{P} \rightarrow \{ \text{непустые формации Фиттинга} \}$ – функции, называемые соответственно $\mathbb{P}F$ -функцией, ωF -функцией и $\mathbb{P}FR$ -функцией [3]. Формация

$$\mathfrak{H} = \{ G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\delta(p)} \in h(p) \text{ для всех } p \in \pi(G) \}$$

называется *всерной* формацией с направлением δ (или, кратко, δ -*всерной* формацией) и спутником h и обозначается $\mathfrak{H} = \mathbb{P}F(h, \delta)$. Формация

$$\mathfrak{F} = \{ G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G) \}$$

называется ω -*всерной* формацией с направлением δ (или, кратко, $\omega\delta$ -*всерной* формацией) и с ω -спутником f и обозначается $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ [3].

Направление δ ω -всерной формации называется *bp-направлением*, если δ является *b-направлением*, т.е. $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и δ является *p-направлением*, т.е. $\mathfrak{G}_p \delta(p) = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Через δ_0 обозначается направление ω -полной формации, т.е. $\delta_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$; через δ_1 – направление ω -локальной формации, т.е. $\delta_1(p) = \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$; через δ_2 – направление ω -специальной формации, т.е. $\delta_2(p) = \mathfrak{G}_{(Z_p)'} \mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$; через δ_3 – направление ω -центральной формации, т.е.

$\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [2]. Через $\omega\delta F$ обозначим множество всех $\omega\delta$ -веерных формаций групп.

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, δ – $\mathbb{PFR}$ -функция. Следуя [9], всякую непустую формацию считают 0 -кратно $\omega\delta$ -веерной формацией; при $n > 0$ $\omega\delta$ -веерная формация $\mathfrak{F}$ называется n -кратно $\omega\delta$ -веерной формацией (кратко, $\omega\delta^n$ -веерной) и обозначается $\omega F^n(f, \delta)$, если $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним $\omega\delta^{(n-1)}$ -спутником, т.е. таким ω -спутником, все непустые значения которого являются $(n-1)$ -кратно $\omega\delta$ -веерными формациями. Через $\omega\delta^n F$ обозначим множество всех n -кратно $\omega\delta$ -веерных формаций конечных групп. В соответствии с [9], собственная $\omega\delta^n$ -веерная подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется *максимальной $\omega\delta^n$ -веерной подформацией* формации $\mathfrak{F}$, если для любой $\omega\delta^n$ -веерной формации $\mathfrak{H}$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Через $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$ обозначается пересечение всех максимальных $\omega\delta^n$ -веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Через $\omega F^n(\mathfrak{X}, \delta)$ обозначается n -кратно $\omega\delta$ -веерная формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$, т.е. $\omega F^n(\mathfrak{X}, \delta)$ – пересечение всех n -кратно $\omega\delta$ -веерных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$ (см., например, [3]). Следуя [9], $\omega\delta^n$ -веерную формацию $\mathfrak{F}$ назовем *$\omega\delta^n$ -неприводимой*, если $\omega F^n(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \delta) \subset \mathfrak{F}$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – совокупность всех собственных $\omega\delta^n$ -веерных подформаций из $\mathfrak{F}$; группу $G \in \mathfrak{F}$ назовем *$\omega\delta^n$ -необразующей группой* формации $\mathfrak{F}$, если из того, что $\mathfrak{F} = \omega F^n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta)$ всегда следует $\mathfrak{F} = \omega F^n(\mathfrak{X}, \delta)$. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – совокупность формаций, удовлетворяющая условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j \subseteq (1)$ для любых различных $i, j \in I$. Через $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обозначается совокупность всех групп вида $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \dots, i_t \in I$ [9].

Пусть Θ – непустое множество формаций, упорядоченное относительно включения $\subseteq$, $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – Θ -формации (т.е. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$). В соответствии с терминологией [1] точную нижнюю и точную верхнюю грани формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ определяют соответственно следующим образом: $\inf(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) := \mathfrak{F}_1 \wedge_{\Theta} \mathfrak{F}_2$, $\sup(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) := \mathfrak{F}_1 \vee_{\Theta} \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Theta} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 \vee_{\Theta} \mathfrak{F}_2 = \Theta \text{ form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ – пересечение всех Θ -формаций, содержащих $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. Если множество Θ замкнуто относительно пересечения и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$ для любой $\mathfrak{H} \in \Theta$, то $\inf(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \in \Theta$, $\sup(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \in \Theta$, тем самым на множестве Θ задана структура решетки. В этом случае Θ называют *полной решеткой формаций* (см., например, [9]). Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Через $\mathfrak{F}_2 /_{\Theta} \mathfrak{F}_1$ обозначается решетка всех Θ -формаций $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2$. Поскольку $\mathfrak{G}$ является n -кратно $\omega\delta$ -веерной формацией и пересечение любой совокупности n -кратно $\omega\delta$ -веерных формаций также является n -кратно $\omega\delta$ -веерной формацией, то множество $\omega\delta^n F$ является полной решеткой формаций.

Исходя из теоремы 1 работы [16], с помощью метода математической индукции нетрудно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – br -направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда решетка $\omega\delta^n F$ всех n -кратно $\omega\delta$ -веерных формаций конечных групп является модулярной решеткой.

Следующая лемма доказывается аналогично доказательству леммы 2.1.3 [9].

Лемма 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – PFR-функция, $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F}_i \in \omega\delta^n F$, $i \in I$, $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Если множество $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является цепью, то $\mathfrak{F} \in \omega\delta^n F$.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 6 [16].

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – PFR-функция, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{L}$ – такие неединичные формации, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \neq \emptyset$, $\pi(\mathfrak{L}) \cap \omega \neq \emptyset$ и $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega = \emptyset$. Если δ – br-направление, $\mathfrak{F}, \mathfrak{H} \in \omega\delta^n F$, то $\mathfrak{L} \in \omega\delta^n F$.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – PFR-функция, $\mathfrak{F} \in \omega\delta^n F$. Если $\mathfrak{F}$ является $\omega\delta^n$ -неприводимой формацией, то в ней существует единственная максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\omega\delta^n$ -неприводимая формация, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – совокупность всех собственных $\omega\delta^n$ -веерных подформаций из $\mathfrak{F}$ и $\omega F^n(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \delta) := \mathfrak{M}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ $\omega\delta^n$ -неприводима, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{M}$ – максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация в $\mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\mathfrak{H}$ – такая $\omega\delta^n$ -веерная подформация в $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. Отсюда, ввиду задания $\mathfrak{M}$, получаем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M}$ – максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{X} \subseteq \omega F^n(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \delta) = \mathfrak{M}$. Из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, в силу выбора $\mathfrak{X}$, получаем $\mathfrak{X} = \mathfrak{M}$. Таким образом, всякая максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация $\mathfrak{F}$ совпадает с $\mathfrak{M}$ и, следовательно $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация формации $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – br-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\omega\delta^n F} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ – соответственно однопорожденная и собственная $\omega\delta^n$ -веерные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\omega\delta^n F} \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = \omega F^n(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}, \delta)$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{F} = \omega F^n(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$, что, в силу $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, невозможно. Следовательно, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}$. Покажем, что в $\mathfrak{B}$ существует максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация, содержащая $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$. Пусть $\mathcal{X} = \{\mathfrak{X} \in \omega\delta F \mid \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subset \mathfrak{B}\}$, $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – произвольная цепь в $\mathcal{X}$ и $\mathfrak{D} := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Тогда по лемме 2 $\mathfrak{D} \in \omega\delta^n F$, причем $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$. По условию $\mathfrak{B} = \omega F^n(B, \delta)$, где B – некоторая группа. Если $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$, то найдется такое $j \in I$, что $B \in \mathfrak{X}_j$ и $\mathfrak{B} = \omega F^n(B, \delta) \subseteq \mathfrak{X}_j$, что противоречит выбору $\mathcal{X}$. Следовательно, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$ и поэтому $\mathfrak{D} \in \mathcal{X}$. Тогда, согласно лемме Цорна, в $\mathcal{X}$ имеется максимальный элемент $\mathfrak{M}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ – максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация в $\mathfrak{B}$. Действительно, пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{L} \in \omega\delta^n F$. Так как $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$ и поэтому $\mathfrak{L} \in \mathcal{X}$. Тогда из $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$ следует, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ – максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация в $\mathfrak{B}$. Так как, ввиду леммы 1, множество $\omega\delta^n F$ является модулярной решеткой формаций, то, согласно [1, глава 1, п. 7], решетка $(\mathfrak{B} \vee_{\omega\delta^n F} \mathfrak{H}) /_{\omega\delta^n F} \mathfrak{H}$ изоморфна решетке $\mathfrak{B} /_{\omega\delta^n F} (\mathfrak{B} \wedge_{\omega\delta^n F} \mathfrak{H})$, т.е. $\mathfrak{F} /_{\omega\delta^n F} \mathfrak{H} \cong \mathfrak{B} /_{\omega\delta^n F} (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H})$. В силу данного изоморфизма, из того, что в $\mathfrak{B}$ существует максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация, содержащая $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$, следует,

что в $\mathfrak{F}$ существует максимальная $\omega\delta^n$ -веерная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – br -направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} \in \omega\delta^n F$, $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i \in \omega\delta^n F$, $i \in I$. Если формация $\mathfrak{F}$ обладает такой максимальной $\omega\delta^n$ -веерной подформацией $\mathfrak{M}$, что $\pi(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}) \cap \omega \neq \emptyset$ для любого $i \in I$, и $\pi(\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{M}) \cap \pi\left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} (\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})\right) \cap \omega = \emptyset$ для любого $k \in I$, то найдется такое $j \in I$, что формация $\mathfrak{F}_j$ также обладает максимальной $\omega\delta^n$ -веерной подформацией.

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{F}$ обладает максимальной $\omega\delta^n$ -веерной подформацией $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей условию теоремы. Предположим, что формация $\mathfrak{F}_i$ не имеет максимальных $\omega\delta^n$ -веерных подформаций для любого $i \in I$. По определению $\omega\delta^n$ -веерной формации $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Тогда, согласно лемме 4.3.4 [9], $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in I} (\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$. Пусть $\mathfrak{M}_i := \mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}$, $i \in I$. Так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то существует такое $j \in I$, что $\mathfrak{M}_j \neq \mathfrak{F}_j$. Ввиду $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_j$ получаем, что $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{F}_j$. По предположению формация $\mathfrak{F}_j$ не имеет максимальных $\omega\delta^n$ -веерных подформаций. Следовательно, в $\mathfrak{F}_j$ существует такая собственная $\omega\delta^n$ -веерная подформация $\mathfrak{H}_j$, что $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{F}_j$. Пусть $\mathfrak{M}_{j'} := \bigoplus_{i \in I \setminus \{j\}} \mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{H} := \omega F^n(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \delta)$. Покажем, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

1. Проверим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$. Предварительно установим, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $G = A_{i_1} \times \dots \times A_{i_t}$, где $A_{i_r} \in \mathfrak{M}_{i_r}$, $i_r \in I$, $r = \overline{1, t}$. Пусть $i_r \neq j$ для любого $r = \overline{1, t}$. Тогда $G \in \mathfrak{M}_{j'}$ и $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $j \in \{i_1, \dots, i_t\}$. Если $t = 1$, то $i_1 = i_t = j$ и $G = A_j \in \mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{H}_j$. Поэтому при $t = 1$ имеем $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $t \neq 1$. Поскольку в прямом произведении $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_t}$ множители попарно перестановочны, то можем считать $A_{i_t} = A_j$. Это означает, что $G / A_j = G / A_{i_t} \cong A_{i_1} \times \dots \times A_{i_{t-1}} \in \mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A := A_{i_1} \times \dots \times A_{i_{t-1}}$. Тогда $G / A \cong A_j \in \mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ – формация, то из $G / A_j \in \mathfrak{H}$ и $G / A \in \mathfrak{H}$ следует, что $G \cong G / (A_j \cap A) \in \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{M}$ и, ввиду $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{F}_j$, получаем $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{H}_j$, что невозможно. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Предварительно установим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{H} = \omega F^n(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \delta)$ и $\mathfrak{F}$ – $\omega\delta^n$ -веерная формация, то достаточно проверить, что $\mathfrak{F}$ содержит множество $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}$. Действительно, из $\mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}_{j'} \subset \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $\mathfrak{H}$ – наименьшая $\omega\delta^n$ -веерная формация, содержащая множество $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}$, имеем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j$ (1). С другой стороны, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \omega F^n(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \delta) \cap \mathfrak{F}_j$. Так как $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j \oplus \mathfrak{M}_{j'}$, то, с учетом условия теоремы, справедливо $\pi(\mathfrak{M}_{j'}) \cap \omega = \left(\bigcup_{i \in I \setminus \{j\}} \pi(\mathfrak{M}_i)\right) \cap \omega = \bigcup_{i \in I \setminus \{j\}} (\pi(\mathfrak{M}_i) \cap \omega) \neq \emptyset$. Тогда по лемме 3 $\mathfrak{M}_{j'} \in \omega\delta^n F$. Поскольку, согласно лемме 1, решетка $\omega\delta^n F$ модулярна, то, ввиду $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M}_{j'} = (1)$, имеем

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \omega F^n(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \delta) \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j \wedge_{\omega\delta^n F} (\mathfrak{H}_j \vee_{\omega\delta^n F} \mathfrak{M}_{j'}) =$$

$$= \mathfrak{H}_j \vee_{\omega\delta^n F} (\mathfrak{F}_j \wedge_{\omega\delta^n F} \mathfrak{M}_{j'}) = \omega F^n (\mathfrak{H}_j \cup (\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M}_{j'}), \delta) = \mathfrak{H}_j.$$

Таким образом, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{H}_j$ (2). Из (1) и (2) следует равенство $\mathfrak{F}_j = \mathfrak{H}_j$, что, в силу выбора формации $\mathfrak{H}_j$, невозможно. Следовательно, $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 получаем $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, что противоречит выбору $\mathfrak{M}$. Таким образом, найдется $j \in I$ такое, что формация $\mathfrak{F}_j$ обладает максимальной $\omega\delta^n$ -всерной подформацией. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – br -направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, и $\mathfrak{F} \in \omega\delta^n F$. Тогда формация $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех $\omega\delta^n$ -необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ – множество всех $\omega\delta^n$ -необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.

1. Установим, что $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$. Пусть $G \in \Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$. Проверим, что $G \in \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{F} = \omega F^n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta)$. Достаточно показать, что $\mathfrak{F} = \omega F^n(\mathfrak{X}, \delta)$. Отметим, что $\omega F^n(\mathfrak{X}, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\omega F^n(\mathfrak{X}, \delta) \subset \mathfrak{F}$. Так как $\omega F^n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta) = \omega F^n(\mathfrak{X}, \delta) \vee_{\omega\delta^n F} \omega F^n(G, \delta)$, то по теореме 2 в $\mathfrak{F}$ существует такая максимальная $\omega\delta^n$ -всерная подформация $\mathfrak{H}$, что $\omega F^n(\mathfrak{X}, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$, и, значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $G \in \Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$, то $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $\omega F^n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\omega F^n(\mathfrak{X}, \delta) = \mathfrak{F}$ и поэтому $G \in \mathfrak{K}$. Следовательно, $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{K} \subseteq \Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$. Пусть $K \in \mathfrak{K}$. Предположим, что $K \notin \Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$. Тогда $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{F}$ и, согласно определению формации $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$, в $\mathfrak{F}$ существует такая максимальная $\omega\delta^n$ -всерная подформация $\mathfrak{F}_1$, что $K \notin \mathfrak{F}_1$. Рассмотрим формацию $\omega F^n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \delta)$. Так как $\mathfrak{F}_1 = \omega F^n(\mathfrak{F}_1, \delta) \subset \omega F^n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\omega F^n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \delta) = \mathfrak{F}$. Ввиду выбора группы K , имеем $\omega F^n(\mathfrak{F}_1, \delta) = \mathfrak{F}$. Это означает, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $K \in \Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$ и поэтому $\mathfrak{K} \subseteq \Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$.

Из 1 и 2 следует, что $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{K}$. Теорема доказана.

Замечание 1. В случае $\omega = \mathbb{P}$ из теорем 1 – 4 вытекают аналогичные свойства δ -всерных формаций групп.

Список литературы

1. Биркгоф Г. Теория решеток: перевод с английского – Москва: Наука, 1984. – 568 с.
2. Ведерников В.А. О новых типах ω -всерных формаций конечных групп // Украинський математический конгресс – 2001, Праці, Київ, Секція 1, (2002), 36–45.
3. Ведерников В.А., Сорокина М.М. ω -Всерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки, 71:1 (2002), 43–60.
4. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика, 13:3 (2001), 125–144.
5. Воробьев Н.Н. Алгебра классов конечных групп. – Витебск: Витебский гос. университет им. П.М. Машерова, 2012.
6. Еловикова Ю.А. Решетки Ω -расслоенных формаций // Дискретная математика, 14:2 (2002), 85–94.
7. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. тр., 2:2 (1999), 114–147.
8. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп // Украинский матем. журнал, 52:6 (2000), 783–797.

9. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
10. Сорокина М.М., Корпачева М.А. Критические ω -всерные τ -замкнутые формации конечных групп // Дискретная математика, 32:1 (2011), 94–101.
11. Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб., 94:4 (1974), 628–648.
12. Шеметков Л.А. О произведении формаций // Докл. АН БССР, 28:2 (1984), 101–103.
13. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
14. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin: Gruyter, 1992. – 891 p.
15. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z., 80:4 (1963), 300–305.
16. Maksakov S.P. On the lattices of the ω -fibered formations // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 27:1 (2021), 258–267.

Сведения об авторах

Сорокина Марина Михайловна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: mmsorokina@yandex.ru.

Максаков Серафим Павлович – аспирант 4 курса физико-математического факультета по направлению «Математика и механика» Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: msp222@mail.ru.

ON THE MAXIMAL SUBFORMATIONS OF n -MULTIPLE ω -FIBERED FORMATIONS OF FINITE GROUPS

S.P. Maksakov, M.M. Sorokina

Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky

Only finite groups and classes of finite groups are considered. A class of groups is called a formation if it is closed under homomorph images and under subdirect products. Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes and ω be a nonempty subset of the set $\mathbb{P}$. In the paper we study properties of maximal n -multiple ω -fibered subformations of a given n -multiple ω -fibered formation. The existence of a maximal n -multiple ω -fibered subformation in a formation with certain properties is established. A characterization of the formation $\Phi_{\omega\delta^n F}(\mathfrak{F})$ which is the intersection of all maximal n -multiple ω -fibered subformations with the direction δ of the formation $\mathfrak{F}$ is obtained.

Key words: a finite group, a class of groups, a formation, an ω -fibered formation, n -multiple ω -fibered formation.

References

1. Birkhoff G. Lattice Theory. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1967, – 418 p. Translated to Russian under the title «Teoriya reshetok» – Moscow: Nauka Publ., 1984, – 568 p.
2. Vedernikov V.A. On new types of ω -fibered formations of finite groups // Ukrainian Mathematical Congress – 2001. Section 1. Kiev: Inst. Matematiki NAN Ukrainy, (2002), 36–45.
3. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. ω -Fibered formations and Fitting classes of finite groups // Mathematical notes, 71:1 (2002), 43–60.
4. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. Ω -foliated formations and Fitting classes of finite groups // Discrete mathematics, 13:3 (2001), 125–144.
5. Vorob'ov N.N. Algebra of classes of finite groups. – Vitebsk: BSU named after P.M. Masherov, 2012. – 322 p.
6. Elovikova Y.A. On the lattices of Ω -foliated formations // Discrete mathematics, 14:2 (2002), 85–94.
7. Skiba A.N., Shemetkov L.A. Multiple ω -local formations and Fitting classes of finite groups // Matem. Tr., 2:2 (1999), 114–147.

8. Skiba A.N., Shemetkov L.A. Multiple $\mathcal{L}$ -compositional formations of finite groups // Ukrainian Math. Journal, 52:6 (2000), 783–797.
9. Skiba A.N. Algebra of formations. – Minsk: Belarusian science, 1997. – 240 p.
10. Sorokina M.M., Korpacheva M.A. The critical ω -foliated τ -closed formations of finite groups // Discrete Math. Appl., 21:1 (2011), 69–77.
11. Shemetkov L.A. Graduated formations of groups // Math., USSR SB., 94:4 (1974), 628–648.
12. Shemetkov L.A. On product of formations // Academy of Sciences USSR SB report, 28:2 (1984), 101–103.
13. Shemetkov L.A. Formations of finite groups. – Moscow: Nauka, 1978. – 240 p.
14. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin: Gruyter, 1992. – 891 p.
15. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z., 80:4 (1963), 300–305.
16. Maksakov S.P. On the lattices of the ω -fibered formations // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 27:1 (2021), 258–267.

About authors

Sorokina M.M. – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: mmsorokina@yandex.ru.

Maksakov S.P. – Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: msp222@mail.ru.