

ISSN 2519-2574

Ученые записки
Брянского
государственного
университета

№ 1
2026

Естественные науки

Главный редактор журнала

Зайцева Елена Владимировна – доктор биологических наук, профессор

Заместители главного редактора журнала

Харлан Алексей Леонидович – кандидат биологических наук

Лямцев Владимир Петрович – кандидат сельскохозяйственных наук

Члены редакции

Е.В. Зайцева, Г.В. Лобанов, С.В. Лукашов, В.П. Лямцев, П.А. Попов, Е.Г. Родикова, Ю.А. Семенищенков, А.Л. Харлан

Редакционная коллегия

Математика и механика / Компьютерные науки и информатика

Ответственные редакторы:

Родикова Е.Г. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского (*математика*).

Денисов И.А. – кандидат технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского (*компьютерные науки и информатика*).

Члены редакционной коллегии:

Васильев А.Ф. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии Гомельского национального университета.

Путылов С.В. – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Расулов К.М. – доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный работник высшей школы РФ, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета.

Сорокина М.М. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Физические науки

Ответственный редактор:

Попов П.А. – доктор физико-математических наук, профессор, кафедры экспериментальной и теоретической физики Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Члены редакционной коллегии:

Будько С.Л. – кандидат физико-математических наук, профессор Университета Айовы (США, г. Айова).

Митрошенков Н.В. – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой экспериментальной и теоретической физики Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Биологические науки

Ответственные редакторы:

Семенищенков Ю.А. – доктор биологических наук, профессор кафедры биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Харлан А.Л. – кандидат биологических наук, заведующий кафедрой биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Члены редакционной коллегии:

Анищенко Л.Н. – доктор сельскохозяйственных наук, профессор кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Булохов А.Д. – доктор биологических наук, профессор, Заслуженный работник высшего профессионального образования РФ, заведующий кафедрой биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Зайцева Е.В. – доктор биологических наук, профессор кафедры биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Заякин В.В. – доктор биологических наук, профессор кафедры химии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Зенкин А.С. – доктор биологических наук, заведующий кафедрой морфологии, физиологии и ветеринарной патологии Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Панасенко Н.Н. – доктор биологических наук, доцент кафедры биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Пронин В.В. – доктор биологических наук, профессор, руководитель центра доклинических исследований Федерального центра охраны здоровья животных.

Химические науки

Ответственный редактор:

Лукашов С.В. – кандидат химических наук, доцент кафедры химии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Члены редакционной коллегии:

Авдеев Я.Г. – доктор химических наук, ведущий научный сотрудник Института физической химии и электрохимии Российской академии наук.

Кузнецов С.В. – кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой химии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Шлеев С.В. – доктор химических наук, профессор университета Мальме.

Науки о Земле и окружающей среде

Ответственный редактор

Москаленко О.П. – кандидат географических наук, доцент кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Члены редакционной коллегии:

Долганова М.В. – кандидат биологических наук, доцент, заведующая кафедрой географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Потоцкая Т.И. – доктор географических наук, профессор кафедры социально-экономической географии и природопользования Смоленского государственного университета.

Чернов А.В. – доктор географических наук, профессор МГУ им. М.В. Ломоносова.

Шмакова М.В. – доктор географических наук, профессор Института озера-ведения Российской академии наук.

Педагогика (методика обучения естественным наукам)

Ответственный редактор:

Горбачев В.И. – доктор педагогических наук, Заслуженный учитель РФ, Почетный работник ВПО, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Члены редакционной коллегии:

Алдошина М.И. – доктор педагогических наук, профессор кафедры технологий психолого-педагогического и специального образования Орловского государственного университета.

Дробышев Ю.А. – доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики и статистики Финансового университета при Правительстве РФ.

Дробышева И.В. – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики и статистики Финансового университета при Правительстве РФ.

Малова И.Е. – доктор педагогических наук, Почетный работник ВПО, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Симукова С.В. – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной и теоретической физики Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации Эл № ФС77-62799 от 18.08.2015
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Ответственность за фактические данные, представленные в статьях, лежит на их авторах

© РИО ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского», 2026
© Коллектив авторов, 2026

ISSN 2519-2574

SCIENTIFIC NOTES
of the Bryansk State University

N 1
2026

Natural sciences

Editor-in-chief

Elena Vladimirovna Zaitseva, Sc. D. in Biological Sciences, Professor

Deputy Editor-in-chief

Alexey Leonidovich Kharlan, Ph. D. in Biological Sciences

Vladimir Petrovich Lyamtsev, Ph. D. in Agricultural Sciences

Члены редакции

Е.В. Зайцева, Г.В. Лобанов, С.В. Лукашов, В.П. Лямцев, П.А. Попов, Е.Г. Родикова, Ю.А. Семенищенков, А.Л. Харлан

Editorial board

Mathematics and Mechanics / Computer sciences

Associate editors:

Rodikova E.G. – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky (*Mathematics*).

Denisov I.A. – Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky (*Computer sciences*).

Editorial board:

Vasiliev A.F. – Sc. D. in Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Algebra and Geometry, Gomel National University.

Putilov S.V. – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Rasulov K.M. – Sc. D. in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of the Higher School of the Russian Federation, Head of the Department of Mathematical Analysis, Smolensk State University.

Sorokina M.M. – Sc. D. in Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Physical sciences

Associate editor:

Popov P.A. – Sc. D. in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Experimental and Theoretical Physics, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky.

Editorial board:

Budko S.L. – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Professor of the University of Iowa (USA, Iowa).

Mitroshenkov N.V. – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Experimental and Theoretical Physics, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky.

Biological sciences

Associate editors:

Semenishchenkov Yu.A. – Sc. D. in Biological Sciences, Professor of the Department of Biology, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky.

Kharlan A.L. – Ph. D. in Biological Sciences, Head of the Department of Biology, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Editorial board:

Anishchenko L.N. – Sc. D. in Agricultural Sciences, Professor of the Department of Geography, Ecology and Land Management, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Bulokhov A.D. – Sc. D. in Biological Sciences, Professor, Honored Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Professor of the Department of Biology, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Zaitseva E.V. – Sc. D. in Biological Sciences, Professor of the Department of Biology, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Zayakin V.V. – Sc. D. in Biological Sciences, Professor of the Department of Chemistry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Zenkin A.S. – Sc. D. in Biological Sciences, Head of the Department of Morphology, Physiology and Veterinary Pathology, Mordovian State University named after N. P. Ogarev.

Panasenko N.N. – Sc. D. in Biological Sciences, Associate Professor of the Department of Biology, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Pronin V.V. – Sc. D. in Biological Sciences, Professor, Head of the Center for Preclinical Research of the Federal Center for Animal Health.

Chemical Sciences

Associate editor:

Lukashov S.V. – Ph. D. in Chemical Sciences, Associate Professor of the Department of Chemistry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Editorial board:

Avdeev Ya.G. – Sc. D. in Chemical Sciences, Leading Researcher at the Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry, Russian Academy of Sciences.

Kuznetsov S.V. – Ph. D. in Chemical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Chemistry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Shleev S.V. – Sc. D. in Chemical Sciences, Professor at the University of Malmo.

Earth and Environmental Sciences

Associate editor:

Moskalenko O.P. – Ph. D. in Geographical Sciences, Associate Professor of the Department of Geography, Ecology and Land Management, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Editorial board:

Dolganova M.V. – Ph. D. in Biological Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Geography, Ecology and Land Management, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Pototskaya T.I. – Sc. D. in Geographical Sciences, Professor of the Department of Socio-Economic Geography and Environmental Management, Smolensk State University.

Chernov A.V. – Sc. D. in Geographical Sciences, Professor, Moscow State University.

Shmakova M.V. – Sc. D. in Geographical Sciences, Professor of the Institute of Lake Science, Russian Academy of Sciences.

Pedagogy

Associate editor:

Gorbachev V.I. – Sc. D. in Pedagogical Sciences, Honored Teacher of the Russian Federation, Honorary Worker of the Higher Educational Institution, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Editorial board:

Aldoshina M.I. – Sc. D. in Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Technologies of Psychological, Pedagogical and Special Education, Oryol State University.

Drobyshev Yu.A. – Sc. D. in Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics and Statistics, Financial University under the Government of the Russian Federation.

Drobysheva I.V. – Sc. D. in Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and Statistics, Financial University under the Government of the Russian Federation.

Malova I.E. – Sc. D. in Pedagogical Sciences, Honorary Worker of the Higher Educational Institution, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Simukova S.V. – Ph. D. in Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Experimental and Theoretical Physics, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

СОДЕРЖАНИЕ**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА***Колягин А.Ю.*

Дифференциальное и интегральное исчисление на основе альтернативных оценок
изменения функции и аргумента..... 7

Сорокина В.Н., Сорокина М.М.

Некоторые свойства классов групп, индуцированных подгрупповыми функторами 31

ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ*Кушнерёва А.А.*

Исследование теплопроводности легированного железа..... 35

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ*Артемов Д.А.*

Макрометрические показатели поджелудочной железы у белых крыс линии Wistar
при использовании биологически активных добавок..... 40

НАУКИ О ЗЕМЛЕ О ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ*Виняев Д.А., Варфоломеев А.Ф.*

Оценка пространственного размещения станций Санкт-Петербургского
метрополитена 45

ПЕДАГОГИКА*Левшаков Б.В., Тимохова Д.О., Долганова М.В.*

Эффективность использования технологии тестового контроля знаний и умений
обучающихся при изучении курса «География России» в 9 классе..... 54

ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ
ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ В РЕЦЕНЗИРУЕМОМ ЭЛЕКТРОННОМ НАУЧНОМ ЖУРНАЛЕ
«УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»
 («УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ БГУ») 62

CONTENT**MATHEMATICS AND MECHANICS**

<i>Kolyagin A.Yu.</i>	
Differential and integral calculus based on alternative estimates of function and argument change	7
<i>Sorokina V.N., Sorokina M.M.</i>	
Some properties of classes of groups induced by subgroup functors	31

PHYSICS

<i>Kushnereva A.A.</i>	
Thermal conductivity study of alloyed iron	35

BIOLOGY

<i>Artyomov D.A.</i>	
Macrometric parameters of the pancreas in white Wistar rats using biologically active additives	40

EARTH SCIENCES

<i>Vinyaev D.A., Varfolomeev A.F.</i>	
The current state of the St. Petersburg metro	45

PEDAGOGY

<i>Levshakov B.V., Timokhova D.O., Dolganova M.V.</i>	
Effectiveness of using test control technology to assess students' knowledge and skills in the "Geography of Russia" course in 9th grade	54

REQUIREMENTS TO THE CONTENTS AND PAPERS OFFERED FOR PUBLICATION IN PEER-REVIEWED ELECTRONIC SCIENTIFIC JOURNALS «SCIENTIFIC NOTES OF BRYANSK STATE UNIVERSITY» («SCIENTIFIC NOTES OF BSU»).....	62
---	----

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.2; 517.3; 519.6; 512

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ
АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ОЦЕНОК ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ И АРГУМЕНТА****А.Ю. Колягин**

Независимый исследователь

В статье представлен особый подход к понятию дифференцирования и интегрирования функций на основе нестандартной оценки изменения функций и аргумента. Один способ оценки связан с операцией деления – отношение значений функции, другой – с новой операцией, определённой с использованием понятия логарифма. Определены дифференцирование и интегрирование разного типа, включая дифференцирование одной функции по другой, определено разложение функций в произведение и другие структуры аналогично разложению в ряд Тейлора. На основе производных и интегралов нового типа даны примеры построения численных методов интерполяции, аппроксимации, дифференцирования и интегрирования функций.

Ключевые слова: дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, разложение функции в произведение, арифметические операции, численные методы, аппроксимация функций, численное дифференцирование, численное интегрирование, математическая физика.

Введение

В теории дифференциального и интегрального исчисления оценка изменения функции и аргумента выражается разностью значений соответствующих величин, т.е. основана на арифметической операции вычитания. В мало известной работе Никитина И. И. «Исчисление величин бесконечно близких к единице», опубликованной в 1970 году [1], определено понятие производной с оценкой изменения функции в форме отношения её значений вместо разности, т.е. с оценкой, основанной на операции деления, определяются соответствующие правила дифференцирования и интегрирования функций.

Данное исследование является, в определённом смысле, продолжением работы И. И. Никитина. Поскольку определить оценку изменения величин на основе обратной к следующей за умножением операции, т.е. операции возведения в степень не представляется возможным (она не обладает необходимыми для этого свойствами), в исследовании вводится особая операция с использованием понятия логарифма числа, на основе которой оценка изменения величин возможна. Также определяется и следующая операция, которая нужна для нового типа дифференцирования и интегрирования функций. На основе этих операций определён другой тип производной, соответствующие правила дифференцирования и интегрирования функций.

Далее в работе представлены и другие типы дифференцирования функций, вытекающие из альтернативных оценок изменения значений функции и аргумента. Эти способы дифференцирования позволяют получать разложение функций в особые сходящиеся ряды, произведения и другие структуры. На их основе определены численные методы приближения функций (интерполяция, аппроксимация), дифференцирования и интегрирования функций, решения нелинейных уравнений. Актуальность этих методов обоснована их повышенной точностью для определённого вида функций, которые используются в моделировании и аппроксимации процессов, протекающих с экспоненциальным и более высоким темпом.

1. Особые операции на основе понятия логарифма

В целях определения нового типа дифференцирования и интегрирования введём сначала две операции с числами, которые будем считать особыми арифметическими операциями. Первая из них будет следовать за операцией умножения, основываться на ней и обладать свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности по отношению к умножению. На основе этой операции можно будет оценивать изменение величин, в частности, значения функции. Вторая операция будет основана на первой по аналогии операции возведения в степень на основе умножения.

Покажем кратко логику, приводящую к определению этих операций. Первую операцию следует рассматривать отдельно на множестве положительных и на множестве отрицательных чисел (ноль исключается). В этой работе остановимся на множестве положительных чисел, а другой вариант может быть рассмотрен отдельно по аналогии данного исследования.

Очевидно, что любое положительное число a можно представить в виде

$$a = d^{(\log_d a)}, d > 0, d \neq 1.$$

Здесь следует рассматривать два варианта: $d > 1$ и $0 < d < 1$. В нашем исследовании мы остановимся на первом. Условно запись $a = d^{(\log_d a)}$ можно трактовать, как форму представления числа, показывающую, из какого «количества» перемножаемых базовых элементов d состоит рассматриваемое число: $a = \underbrace{d \times d \times d \times \dots \times d}_{\log_d a}$. В такой же форме представим вто-

рое положительное число $b = \underbrace{d \times d \times d \times \dots \times d}_{\log_d b}$. Рассмотрим $b^a = d^{(\log_d b)a}$. В этой операции величина $\log_d b$ показывает количество условных «единиц» d в b , а величина a условно показывает количество единиц «1» в a ($a = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \text{ единиц "1"}}$), т.е. разного типа единицы. В этой связи изменим операцию, заменив a на $\log_d a$, приводя эти единицы к одному типу.

Определение 1. Возведением числа $b > 0$ в логарифмическую степень (или в л-степень) $a > 0$ с базой $d > 1$ будем называть определение числа $c > 0$ следующим образом:

$$c = b^{\log_d a} = d^{\log_d b \log_d a}.$$

Эта операция обладает свойствами:

- коммутативность: $b^{\log_d a} = d^{\log_d b \log_d a} = d^{\log_d a \log_d b} = a^{\log_d b}$;
- ассоциативность: $(b^{\log_d a})^{\log_d c} = b^{\log_d a \log_d c} = b^{\log_d (a^{\log_d c})}$;
- дистрибутивность относительно умножения:
 $b^{\log_d (ac)} = b^{\log_d a + \log_d c} = b^{\log_d a} b^{\log_d c}$;
- нейтральным элементом выступает база d : $b^{\log_d d} = b$;
- симметричным числу $b \neq 1$ является величина $d^{\frac{1}{\log_d b}}$:
 $b^{\log_d \left(d^{\frac{1}{\log_d b}} \right)} = d^{(\log_d b) \left(\frac{1}{\log_d b} \right)} = d$.

Единица играет аналогичную роль, которую играет нуль в умножении, т.е. $\forall a > 0 \quad 1^{\log_d a} = a^{\log_d 1} = 1$.

Определение 2. Обратную к л-степени операцию, которую назовём обратной л-степенью с базой $d > 1$ числа $c > 0$ с показателем $a > 0$ и $a \neq 1$, будем называть нахождение числа $b > 0$ такого, что $b^{\log_d a} = c$: $b = c^{(\log_d a)^{-1}} = d^{(\log_d c) (\log_d a)^{-1}} = d^{\log_d c}$.

Для $a = 1$ эта операция не определена.

Примеры:

- л-степень числа 4 с показателем 100 и базой 10: $4^{\lg 100} = 16$;
- обратная л-степень 16 с показателем 100 и базой 10: $16^{(\lg 100)^{-1}} = 4$;
- обратная л-степень 16 с показателем 4 и базой 10: $16^{(\lg 4)^{-1}} = 10^{\frac{\lg 16}{\lg 4}} = 100$.

Теперь определим следующую за л-степенью и построенную на её основе операцию. В математике известно понятие следующей после возведения в степень операции, которую называют тетрацией [2]. Это понятие недостаточно определено и, поэтому, такая операция практически не используется. Мы используем её название для следующей после л-степени операции, которую назовём л-тетрацией.

Условно л-тетрацию $b > 1$ с показателем $a > 0$ можно проиллюстрировать, как последовательное слева направо возведение b в л-степень b с количеством операндов b , равным a :

$$\underbrace{\left(\left((b^{\log_d b})^{\log_d b} \right)^{\log_d b} \right)^{\log_d b} \dots^{\log_d b}}_{a \text{ операндов}} = b^{\frac{(\log_d b)(\log_d b) \dots (\log_d b)}{a-1 \text{ сомножителей}}} = b^{(\log_d b)^{a-1}} = d^{(\log_d b)^a}.$$

Определение 3. Л-тетрацией с базой $d > 1$ и показателем $a > 0$ числа $b > 1$ будем называть вычисление величины $c = d^{(\log_d b)^a}$. Очевидно, что $c > 1$.

Обратные к л-тетрации операции определяем, как решение относительно a и b уравнения $c = d^{(\log_d b)^a}$:

- л-логарифмом с базой $d > 1$ числа $c > d > 1$ по основанию $b > d > 1$ назовём величину $a = \log_{\log_d b} \log_d c$ (очевидно, что $a > 0$);
- обратной л-тетрацией с базой $d > 1$ и показателем $a > 0$ числа $c > 1$ назовём величину $b = d^{(\log_d c)^{\frac{1}{a}}}$ (очевидно, что $b > 1$);
- когда a является натуральным числом, величину $b = d^{(\log_d c)^{\frac{1}{a}}}$ также будем называть извлечением л-корня из c степени a с базой d .

Примеры:

- л-тетрация 1000 с показателем 2 и базой 10: $10^{((\lg 1000)^2)} = 1000000000$;
- л-логарифм из 1000000000 с основанием 1000 и базой 10:
 $\log_{\lg 1000} \lg 1000000000 = 2$;
- л-корень степени 2 из 1000000000 с базой 10: $10^{(\lg 1000000000)^{\frac{1}{2}}} = 1000$.

2. Основы дифференциального и интегрального исчисления второго типа

Перед рассмотрением использования определённых выше операций для оценки изменения функции и определения нового типа производной в этом разделе представим упомянутый выше подход Никитина И. И. к определению производной, дифференцирования и интегрирования функций [1]. Его теория, которую будем называть дифференциальным и интегральным исчислением второго типа, строится по аналогии с обычной теорией дифференциального и интегрального исчисления [3], которую отнесём к первому типу. Отметим, что его подход с альтернативной оценкой изменения функции перекликается с известным понятием логарифмической производной.

Если говорить о производной первого типа, то, по сути, она показывает «на сколько» меняется функция в точке x за «единицу» изменения аргумента. Никитин И. И. рассматривает соотношение изменения функции и аргумента, показывающее «во сколько раз» меняется функция за «единицу» изменения аргумента в рассматриваемой точке. В этом случае следует рассматривать функцию в области, где она положительна (значение производной большее единицы показывает во сколько раз увеличивается функция) и отдельно, где она отрицательна (такое значение показывает во сколько раз она уменьшается). Далее будем рассматривать только первый вариант, считать функции положительными в рассматриваемых точках и областях, включая примеры производных и интегралов. В случае, когда функция отрицательна, рассмотрение можно строить аналогичным образом.

Пусть функция $f(x)$ определена и положительна в окрестности x . Если её аргумент меняется от x до $x + \Delta x$, а функция равномерно изменяется в $a > 0$ раз, то

$$f(x + \Delta x) = f(x)a^{\Delta x} \Rightarrow a = \left[\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Производная второго типа функции $f(x)$ в точке x , которую обозначим $\overline{f(x)}$, определяется, как предел:

$$\overline{f(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Производные второго и первого типов связаны между собой:

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) + f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{\Delta x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\frac{1}{\Delta x}} \right]^{\frac{1}{\Delta x}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^{\ln' f(x)}. \end{aligned}$$

На основе этой формулы определён список производных второго типа от элементарных функций и правила их вычисления.

Примеры:

- $\overline{c\varphi(x)} = e^{\frac{c\varphi'(x)}{c\varphi(x)}} = e^{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}} = \overline{\varphi(x)}, c = const.$;
- $\overline{\varphi(x)\psi(x)} = e^{\ln'(\varphi(x)\psi(x))} = e^{\ln' \varphi(x) + \ln' \psi(x)} = e^{\ln' \varphi(x)} e^{\ln' \psi(x)} = \overline{\varphi(x)} \overline{\psi(x)}$;
- $\overline{f(\varphi(x))} = e^{\frac{f'(\varphi)\varphi'(x)}{f(\varphi)}} = \left(e^{\frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)}} \right)^{\varphi'(x)} = (\overline{f(\varphi)})^{\varphi'(x)}$;
- $\overline{c} = e^{\frac{c'}{c}} = e^0 = 1 \ (c \neq 0)$;
- $\overline{x^n} = e^{\frac{nx^{n-1}}{x^n}} = e^{\frac{n}{x}}$;
- $\overline{\sin x} = e^{\frac{\sin' x}{\sin x}} = e^{ctgx}$;
- $\overline{a^x} = e^{\ln' a^x} = e^{(x \ln a)'} = a, \overline{e^x} = e$.

Далее определяется понятие дифференцирования нового типа на основе возможности представления отношения $\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}$ при фиксированном x в виде показательной функции $\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} = a^{\Delta x} u(\Delta x)$, где главный множитель $a^{\Delta x}$ играет ту же роль, что и дифференциал в исчислении бесконечно малых. Поэтому $a^{\Delta x}$ назовём дифференциалом второго типа, а $u(\Delta x)$ – величиной сколь угодно близкой к единице более высокого порядка, чем $a^{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Это можно интерпретировать так: если рассмотреть $\ln(a^{\Delta x} u(\Delta x)) = \Delta x \ln a + \ln u(\Delta x)$, то $\ln u(\Delta x)$ будет бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x \ln a$. Дифференциал переменной определяем также, как и для первого типа: $\Delta x = dx$.

Пример определения дифференциала второго типа функции $f(x) = 2^{x^2}$ в $\dot{x} = 1$:

$$\frac{f(\dot{x}+\Delta x)}{f(x)} = e^{\ln \frac{f(\dot{x}+\Delta x)}{f(x)}} = e^{\ln 2^{(\dot{x}+\Delta x)^2} - \ln 2^{x^2}} = e^{2\dot{x}\Delta x \ln 2} e^{(\Delta x)^2 \ln 2} \Big|_{x=2} = 4^{\dot{x}\Delta x} 2^{(\Delta x)^2}, a^{\Delta x} = 4^{\Delta x}.$$

Производные второго типа более высокого порядка определяются аналогично тому, как это делается для производной первого типа:

$$\overline{\overline{f(x)}} = \overline{[f(x)]}, \dots, \overline{f(x)^{(n)}} = \overline{[f(x)^{(n-1)}]}.$$

На основе этого возникает возможность разложения функции в бесконечное произведение. Для этого в ряде Тейлора для $\ln(f(x))$ производные первого типа заменяются на выражения с производными второго типа, полученными на основе указанной связи производных первого и второго типов:

$$\ln' f(x) = \ln \overline{f(x)}, \ln'' f(x) = \ln \overline{\overline{f(x)}}, \dots, \ln^{(n)} f(x) = \ln \overline{f(x)^{(n)}};$$

$$\ln(f(x + \Delta x)) = \ln(f(x)) + \Delta x \ln(\overline{f(x)}) + \frac{\Delta x^2}{2!} \ln(\overline{f(x)})' + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} \ln(\overline{f(x)})^{(n)} + o(\Delta x^n), \Delta x \rightarrow 0.$$

Из этого разложения следует справедливость утверждения:

Если функция $f(x)$ определена и положительна в точке x_0 и её окрестности, а также имеет в этой точке производные второго типа до порядка n включительно, то при аргументе x из этой окрестности стремящемся к x_0

$$f(x) = f(x_0) \frac{x-x_0}{1!} \overline{f(x_0)}' \frac{(x-x_0)^2}{2!} \overline{f(x_0)}'' \dots \overline{f(x_0)}^{(n)} \frac{(x-x_0)^n}{n!} e^{o((x-x_0)^n)} \text{ или}$$

$$f(x) = \prod_{k=0}^n \overline{f(x_0)}^{(k)} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \times e^{o((x-x_0)^n)}.$$

Аналогично первому типу, вводится и понятие первообразных для $f(x)$ как функций, производные которых второго типа равны $f(x)$. Нахождение совокупности первообразных второго типа определяется как действие, обратное дифференцированию второго типа $f(x)$, называется интегрированием второго типа. Обозначим его символом $\int$. Пусть $\overline{F(x)} = f(x)$.

Тогда на основе равенства $\overline{cF(x)}^{\Delta x} = \overline{F(x)}^{\Delta x}$, ($c = \text{const}$), получаем: $\int f(x)^{dx} = cF(x)$.

С использованием формул производных второго типа определяются соответствующие формулы неопределённых интегралов второго типа для функций и правила их вычисления.

Примеры:

- $\int \overline{\varphi(x)\psi(x)}^{dx} = \int \overline{\varphi(x)}^{dx} \int \overline{\psi(x)}^{dx} = c\varphi(x)\psi(x);$
- $\int (\overline{f(\varphi)})^{\varphi'(x)dx} = cf(\varphi(x))$
- $\int \left(e^{\frac{n}{x}}\right)^{dx} = cx^n;$
- $\int (e^{ctgx})^{dx} = c \sin x;$
- $\int a^{dx} = ca^x.$

Так как $\overline{e^{\int \ln f(x) dx}} = e^{\frac{(e^{\int \ln f(x) dx})'}{e^{\int \ln f(x) dx}}} = e^{\ln f(x)} = f(x)$, неопределённые интегралы второго и первого типа связаны следующим равенством: $\int f(x)^{dx} = e^{\int \ln f(x) dx}$.

Понятие определённого интеграла второго типа вводится, как предел соответствующих интегральных произведений, которые формируются на разбиении интервала, где интегрируемая функция непрерывна и одного знака. Здесь мы рассматриваем только вариант положительной функции.

Пусть $f(x)$ определена и положительна на $[a, b]$. Разобьём отрезок на части точками:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_{k-1} \leq \omega_k \leq x_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \delta = \max_k \Delta x_k.$$

Тогда определённым интегралом второго типа этой функции с пределами a и b , который обозначим $\int_a^b f(x)^{dx}$, будет называться следующий конечный предел, если он существует, который определяется на основе различных разбиений $[a, b]$ при $\delta \rightarrow 0$:

$$\int_a^b f(x)^{dx} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n f(\omega_k)^{\Delta x_k}.$$

Пусть этот предел существует. Тогда из этого равенства следует:

$$\ln \int_a^b f(x)^{dx} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln \left(\prod_{k=1}^n f(\omega_k)^{\Delta x_k} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \ln f(\omega_k) = \int_a^b \ln f(x) dx.$$

На основе этого получаем формулу выражения определённого интеграла второго типа через интеграл первого типа:

$$\int_a^b f(x)^{dx} = e^{\int_a^b \ln f(x) dx}.$$

Далее на основе этой формулы имеем:

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)^{dx} = e^{\int_a^b \ln f(x) dx} = e^{\int \ln f(x) dx|_{x=b} - \int \ln f(x) dx|_{x=a}} = \frac{e^{\int \ln f(x) dx|_{x=b}}}{e^{\int \ln f(x) dx|_{x=a}}} = \frac{\int f(x)^{dx}|_{x=b}}{\int f(x)^{dx}|_{x=a}}.$$

Интеграл $\int f(x)^{dx}$, который является первообразной второго типа для $f(x)$, обозначим $cF(x)$. Тогда получаем формулу вычисления определённого интеграла второго типа:

$$\int_a^b f(x)^{dx} = \frac{\int f(x)^{dx}|_{x=b}}{\int f(x)^{dx}|_{x=a}} = \frac{F(b)}{F(a)}.$$

В своей работе Никитин И. И. даёт примеры приложения своей теории для упрощения процесса обычного дифференцирования и интегрирования в ряде случаев.

Говоря о дифференцируемости, как первого, так и второго типов, функции $f(x)$ в точке, мы связываем это понятие с возможностью представления изменения $f(x)$ в окрестности этой точки в виде определённого типа функции от Δx . В первом случае – это линейная функция, т.е. функция вида $\psi(x) = a_0 + a_1x$, а во втором – это функция вида $\psi(x) = a_0a_1^x$. Для использования в дальнейшем обобщённой терминологии такого рода функции, соответствующие понятию дифференцируемости некоторого типа, будем называть базовыми. Также далее функцию, которую обозначим $P_x^n(x)$, вида $P_x^n(x) = a_0a_1^x a_2^{x^2} \dots a_n^{x^n}$ будем называть показательным многочленом степени n .

Отметим, что производная второго типа всегда положительна и характеризует изменение функции в сторону увеличения и уменьшения в рассматриваемой точке в зависимости от знака функции в окрестности этой точки. Если функция положительна, то при значении производной больше единицы функция растёт, равной единице – не меняется, меньше единицы – убывает. В противном случае при значении производной больше единицы функция убывает, равной единице – не меняется, меньше единицы – растёт.

3. Основы дифференциального и интегрального исчисления третьего типа

В этом разделе рассмотрим основы дифференциального и интегрального исчисления, оценивая изменение функции в виде обратной л – степени её значений в точках x и $x + \Delta x$, т.е. в виде $d^{\log_{f(x)} f(x+\Delta x)}$. Напомним, что рассматриваем далее только $d > 1$ и не указываем это условие. Учитывая, что операция л-степени была определена пока только на множестве положительных чисел, можно рассматривать функции там, где они положительны. Также в этом случае надо рассматривать отдельно вариант для $f(x) > 1$ и для $0 < f(x) < 1$. В данной работе мы остановимся на первом варианте, включая примеры производных и интегралов.

Дифференцируемость функции в точке x определим возможностью представления её изменения, т.е. $d^{\log_{f(x)} f(x+\Delta x)}$, в окрестности этой точки в виде соответствующей базовой функции от Δx на основе л-степени и л-тетрации (аналоги базовой – линейной функцией от Δx для дифференциала первого типа). Такого рода функции состоят из частей, связанных не сложением, как в линейной функции ($y = a_1x + a_0$), а л-степенью: $y = (d^{(\log_d a_1)^x})^{\log_d a_0}$, где $a_1 > 1$ и $a_0 > 1$.

Такую функцию можно записать и в виде $y = a_0^{(\log_d a_1)^x} = d^{(\log_d a_0)(\log_d a_1)^x}$. Она относится к виду функций, которые будем обозначать $P_{l;d}^n(x)$ и называть л-многочленами степени n : $P_{l;d}^n(x) = d^{(\log_d a_0)(\log_d a_1)^x (\log_d a_2)^{x^2} \dots (\log_d a_n)^{x^n}}$, $a_i > 1, i = \overline{1, n}$.

По определению полагаем, что, если изменение функции $f(x)$ представимо в виде: $d^{\log_{f(x)} f(x+\Delta x)} = (d^{(\log_d a)^{\Delta x}})^{\log_d v(\Delta x)} = d^{(\log_d a)^{\Delta x} \log_d v(\Delta x)}$, где $v(\Delta x)$ имеет более высокий порядок стремления к d , чем $d^{(\log_d a)^{\Delta x}}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $v(\Delta x)$ - величина, бесконечно близкая к d , то $f(x)$ дифференцируема по третьему типу.

В терминах новых операций такого типа производная определяется пределом при $\Delta x \rightarrow 0$ обратной л-тетрации с показателем $\frac{1}{\Delta x}$ и базой d из величины изменения функции, выраженной обратной л-степенью значений функции с базой d , т.е. $d^{\log_{f(x)} f(x+\Delta x)}$. Далее для удобства положим $d = e$ и будем опускать упоминание базы.

Определение 4. Производной третьего типа в точке x функции действительного переменного $f(x) > 1$ будем называть следующий предел, который обозначим $\widetilde{f(x)}$:

$$\widetilde{f(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{(\log_{f(x)} f(x+\Delta x))^{\frac{1}{\Delta x}}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{e^{\left(\frac{\ln f(x+\Delta x)}{\ln f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}}} = e^{\overline{\ln f(x)}} = e^{e^{\frac{f'(x)}{f(x) \ln f(x)}}}.$$

Дифференциалом третьего типа функции $f(x)$ (обозначим $\widetilde{df(x)}$) в этом случае выступает л-тетрация производной с показателем Δx : $\widetilde{df(x)} = e^{(\ln \widetilde{f(x)})^{\Delta x}}$. Этот дифференциал можно выразить с использованием производной второго и первого типов:

$$\widetilde{df(x)} = e^{(\ln \widetilde{f(x)})^{\Delta x}} = e^{(\overline{\ln f(x)})^{\Delta x}} = e^{e^{\frac{\Delta x f'(x)}{f(x) \ln f(x)}}}.$$

На основе определения производной третьего типа можно получить её выражения для различных функций и правила её вычисления.

Примеры:

- $\widetilde{c} = e^{\overline{\ln c}} = e^1 = e, c = \text{const.};$
- $\widetilde{\varphi(x)^c} = e^{\overline{\ln \varphi(x)^c}} = e^{\overline{c \ln \varphi(x)}} = e^{\overline{\ln \varphi(x)}} = \widetilde{\varphi(x)};$
- $\widetilde{\varphi(x)^{\ln \psi(x)}} = e^{\overline{\ln \varphi(x)^{\ln \psi(x)}}} = e^{\overline{\ln \varphi(x) \ln \psi(x)}} = e^{\overline{\ln \varphi(x)}} e^{\overline{\ln \ln \psi(x)}} = \widetilde{\varphi(x)}^{\ln \widetilde{\psi(x)}};$
- $\widetilde{x^a} = e^{\overline{\ln x^a}} = e^{\overline{a \ln x}} = e^{\overline{\ln x}} = e^{e^{\frac{1}{x \ln x}}};$
- $\widetilde{a^x} = e^{\overline{\ln a^x}} = e^{\overline{x \ln a}} = e^{\overline{x}} = e^{e^{\frac{1}{x}}};$
- $\widetilde{a^{x^b}} = e^{\overline{\ln a^{x^b}}} = e^{\overline{x^b \ln a}} = e^{\overline{x^b}} = e^{e^{\frac{b}{x}}}$.

По аналогии с разложением функции в ряд Тейлора можно получить и разложение функции в бесконечную л-степень с производными третьего типа. Выражение этих производных разных порядков через производные второго типа таких же порядков имеет вид:

$$\widetilde{f(x)} = e^{\overline{\ln f(x)}}, \widetilde{\widetilde{f(x)}} = e^{\overline{\ln e^{\overline{\ln f(x)}}}} = e^{\overline{\overline{\ln f(x)}}}, \dots, \widetilde{f(x)}^{(n)} = e^{\overline{\ln f(x)}^{(n)}}.$$

На основе этого $\overline{\ln f(x)} = \ln \widetilde{f(x)}, \overline{\overline{\ln f(x)}} = \ln \widetilde{\widetilde{f(x)}}, \dots, \overline{\ln f(x)}^{(n)} = \ln \widetilde{f(x)}^{(n)}$

Рассмотрим разложение $\ln f(x + \Delta x)$ в произведение с производными второго типа:

$$\ln f(x + \Delta x) = \ln f(x) \overline{\ln f(x)}^{\Delta x} \overline{\overline{\ln f(x)}}^{\frac{\Delta x^2}{2!}} \dots \overline{\ln f(x)}^{(n) \frac{\Delta x^n}{n!}} e^{o(\Delta x^n)}, \Delta x \rightarrow 0.$$

Здесь $e^{o(\Delta x^n)}$ - величина бесконечно близкая к единице. Заменим в этом разложении $\overline{\ln f(x)}^{(n)}$ на $\ln \widetilde{f(x)}^{(n)}$ и выразим $f(x + \Delta x)$, представив $e^{o(\Delta x^n)} = \ln e^{e^{o(\Delta x^n)}} = \ln v(\Delta x)$, где $v(\Delta x) = e^{e^{o(\Delta x^n)}}$ - величина бесконечно близкая к e . В результате получим:

$$f(x + \Delta x) = f(x) (\ln \widetilde{f(x)})^{\Delta x} (\ln \widetilde{\widetilde{f(x)}})^{\frac{\Delta x^2}{2!}} \dots (\ln \widetilde{f(x)}^{(n)})^{\frac{\Delta x^n}{n!}} \ln v(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0 = \quad (1)$$

$$= f(x) \left(\ln e^{(\ln \widetilde{f(x)})^{\Delta x}} \right) \left(\ln e^{(\ln \widetilde{f(x)})^{\frac{\Delta x^2}{2!}}} \right) \dots \left(\ln e^{(\ln \widetilde{f(x)})^{\frac{\Delta x^n}{n!}}} \right)^{\ln v(\Delta x^n)}, \Delta x \rightarrow 0. \quad (2)$$

Разложение функции в форме (2) представляет л-степень (как сложение в разложении в ряд) элементов вида $e^{(\ln \widetilde{f(x)})^{\frac{\Delta x^n}{n!}}}$ (как в ряде Тейлора слагаемые вида $\frac{\Delta x^n}{n!} f(x)^{(n)}$), которые являются л-тетрацией производных третьего типа соответствующего порядка с показателем $\frac{\Delta x^n}{n!}$ (как в ряде Тейлора – произведение производных на $\frac{\Delta x^n}{n!}$). Это разложение назовём разложением функции в л-степень, как ещё одно разложение функции в дополнение к разложению в ряд с обычными производными и разложению в произведение с производными второго типа.

Равнозначная форме (2) форма (1) разложения функции является более компактной формой, которую также можно называть разложением функции в степень, но не с производными третьего типа, а с логарифмами производных третьего типа.

Введём понятие первообразной третьего типа для $f(x)$, как функции $F(x)$ такой, что $\widetilde{F(x)} = f(x)$. Действие обратное к вычислению производной третьего типа $f(x)$ определим, как нахождение совокупности её первообразных и будем называть неопределённым интегрированием третьего типа. Используя символ $\sim \int$, обозначим это действие $\sim \int dx f(x)$. Учитывая, что $\widetilde{F(x)^c} = \widetilde{F(x)}$, где $c = const.$, можно записать: $\sim \int dx f(x) = F(x)^c$. Используя формулы производных третьего типа, можно определить правила интегрирования этого типа и получить таблицу неопределённых интегралов третьего типа от соответствующих функций.

Примеры:

- $\sim \int dx e = c, c = const.$;
- $\sim \int dx \widetilde{\varphi(x)} = \varphi(x)^c$;
- $\sim \int dx (\varphi(x)^{\ln \psi(x)}) = (\sim \int dx \varphi(x))^{\ln(\sim \int dx \psi(x))}$;
- $\sim \int dx (e^{\frac{1}{x \ln x}}) = x^{ca} = x^b$;
- $\sim \int dx (e^{\frac{1}{x}}) = a^{cx} = b^x$;
- $\sim \int dx (e^{\frac{b}{x}}) = a^{cx^b} = d^{x^b}$.

На основании определения производной третьего типа можно показать, что:

$$\left(e^{-\int \ln \widetilde{f(x)} dx} \right) = e^{\overline{\ln(e^{-\int \ln f(x) dx})}} = e^{-\int \ln f(x) dx} = e^{\ln f(x)} = f(x).$$

Тогда справедливо следующее выражение неопределённого интеграла третьего типа через неопределённый интеграл второго типа, а также через обычный неопределённый интеграл, учитывая выражение интеграла второго типа через обычный интеграл:

$$\sim \int dx f(x) = e^{-\int \ln f(x) dx} = e^{e^{\int \ln \ln f(x) dx}}.$$

Понятие определённого интеграла третьего типа вводим, как предел соответствующих интегральных л-степеней, которые формируются на разбиении интервала, где интегрируемая функция непрерывна и больше единицы:

Пусть $f(x)$ определена и больше единицы на $[a, b]$. Разобьём отрезок на части точками:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_{k-1} \leq \omega_k \leq x_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \delta = \max_k \Delta x_k.$$

Тогда определённым интегралом третьего типа этой функции с пределами a и b , который обозначим $\int_a^b dx f(x)$, будет называться следующий предел, если он существует, который определяется на основе различных разбиений $[a, b]$ при $\delta \rightarrow 0$:

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\prod_{k=1}^n (\ln f(\omega_k))^{\Delta x_k}}.$$

Пусть этот предел существует. Тогда из этого равенства следует:

$$\begin{aligned} \ln \ln \int_a^b dx f(x) &= \ln \ln \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\prod_{k=1}^n (\ln f(\omega_k))^{\Delta x_k}} = \ln \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln e^{\prod_{k=1}^n (\ln f(\omega_k))^{\Delta x_k}} = \\ &= \ln \lim_{\delta \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n (\ln f(\omega_k))^{\Delta x_k} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \ln \ln f(\omega_k) = \int_a^b \ln \ln f(x) dx. \end{aligned}$$

На основе этого получаем формулу выражения определённого интеграла третьего типа через интеграл первого типа:

$$\int_a^b dx f(x) = e^{e^{\int_a^b \ln \ln f(x) dx}}.$$

Далее на основе этой формулы имеем:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b dx f(x) &= e^{e^{\int_a^b \ln \ln f(x) dx}} = e^{e^{\int \ln \ln f(x) dx|_{x=b} - \int \ln \ln f(x) dx|_{x=a}}} = \\ &= \frac{e^{\int \ln \ln f(x) dx|_{x=b}}}{e^{\int \ln \ln f(x) dx|_{x=a}}} = \frac{\ln e^{\int \ln \ln f(x) dx|_{x=b}}}{\ln e^{\int \ln \ln f(x) dx|_{x=a}}} = \frac{\ln \int dx f(x)|_{x=b}}{\ln \int dx f(x)|_{x=a}}. \end{aligned}$$

Интеграл $\int dx f(x)$, который является первообразной третьего типа для $f(x)$, обозначим $(F(x))^c$. Тогда получаем формулу вычисления определённого интеграла третьего типа:

$$\int_a^b dx f(x) = e^{\frac{\ln \int dx f(x)|_{x=b}}{\ln \int dx f(x)|_{x=a}}} = e^{\frac{\ln F(b)}{\ln F(a)}} = F(b)^{\frac{1}{\ln F(a)}}.$$

4. Другие типы производных с альтернативной оценкой изменения функции и аргумента

В начальной части первого раздела об операции л-степени было показано, что число $a > 0$ можно представить в виде $a = d^{\log_d a}$, где величина $\log_d a$ условно определяет «количество» перемножаемых единиц d , дающих в результате число a . Учитывая это и положив, как условились ранее $d = e$, в понятии производной второго типа изменение положительной функции $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ можно представить в виде $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = e^{\ln f(x_2) - \ln f(x_1)}$. Таким образом величина $\ln f(x_2) - \ln f(x_1)$ показывает в явном виде изменение функции в «количестве» единиц e в то время, как величина $e^{\ln f(x_2) - \ln f(x_1)}$ показывает во сколько раз изменяется функция, т.е. без выбранной единицы измерения e . В этом случае будем говорить об оценке изменения значения функции в неявном виде.

Поэтому можно рассмотреть изменение функции в явном виде, т.е. $\ln f(x_2) - \ln f(x_1)$, за единицу изменения аргумента для целей определения производной соответствующего типа. Данный вариант отличается от производной второго типа, но связан с ним. Поэтому обозначим его тип 2.1, а производную обозначим $\overset{2.1}{f'(x)}$. В этом случае понятие дифференцирования связываем с возможностью представления значения изменения функции в точке x_1 в виде базовой функции $\ln f(x_2) - \ln f(x_1) = a\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x = x_2 - x_1$. Тогда определение производной сводится к пределу:

$$\overset{2.1}{f'(x_1)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x_2) - \ln f(x_1)}{\Delta x} = \ln' f(x_1).$$

По аналогии с представлением положительного $a = e^{\ln a}$, где $\ln a$ показывает «количество» перемножаемых единиц e , рассмотрим теперь возможность представления числа $a > 1$, как числа, условно состоящего из определённого «количества» единиц $b > 1$, $b \neq e$, объединённых операций л-степени по основанию e . Л-логарифм a имеет вид $e^{\log_{\ln b} \ln a}$, где показатель $\log_{\ln b} \ln a$ как раз и даёт это «количество» единиц b .

Для удобства положим $b = e^e$. Тогда л-логарифм a примет вид:

$$e^{\log_{\ln b} \ln a} = e^{\log_{\ln e^e} \ln a} = e^{\ln \ln a}$$

Таким образом, величина $\ln \ln a$ показывает какое количество единиц $b = e^e$, объединённых операциями л-степени с основанием e , даёт a :

$$\underbrace{\left(\left((b^{\ln b})^{\ln b} \right)^{\ln b} \right)^{\ln b}}_{\ln \ln a} = b^{(\ln b)^{\ln \ln a - 1}} = e^{(\ln b)^{\ln \ln a}} = e^{(\ln e^e)^{\ln \ln a}} = e^{e^{\ln \ln a}} = a.$$

Далее рассмотрим связанную с производной третьего типа оценку изменения функции, которую можно представить в виде: $e^{\log_{f(x_1)} f(x_2)} = e^{e^{\ln \log_{f(x_1)} f(x_2)}} = e^{e^{\ln \ln f(x_2) - \ln \ln f(x_1)}}$.

Таким образом заключаем, что в этой оценке величина $\ln \ln f(x_2) - \ln \ln f(x_1)$ показывает в явном виде на какое количество единиц e^e изменяется функция (в смысле л-степени), в то время, как величина $e^{e^{\ln \ln f(x_2) - \ln \ln f(x_1)}}$ показывает это изменение в неявном виде.

Тогда также, оценивая изменение функции в единицах e^e , получаем вариант производной, связанной с производной третьего типа. Назовём эту производную производной типа 3.1 и обозначим ${}^{3.1}\widetilde{f}(x)$:

$${}^{3.1}\widetilde{f}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln f(x_2) - \ln \ln f(x_1)}{\Delta x} = \ln' \ln f(x_1).$$

Ранее мы рассматривали разные варианты оценки изменения функции, оставляя оценку изменения аргумента в виде $\Delta x = x_2 - x_1$. Рассмотрим теперь понятие дифференцирования и производной первого типа при оценке изменения аргумента, которая использовалась для оценки изменения значений функции в производной второго типа. При этом рассматриваем вариант с положительными аргументами.

Изменение аргумента в форме $\frac{x_2}{x_1}$ представляем в виде $\frac{x_2}{x_1} = e^{\ln \frac{x_2}{x_1}} = e^{\ln x_2 - \ln x_1}$ и далее оцениваем изменение аргумента, как $\ln x_2 - \ln x_1$.

Тогда дифференцируемость функции в точке x_1 определим как возможность представления изменения $f(x)$ в этой точке в виде соответствующей базовой функции от $\Delta \ln x$:

$$f(x_2) - f(x_1) = a \Delta \ln x + o(\Delta \ln x), \Delta \ln x = \ln(x_2) - \ln x_1 \rightarrow 0.$$

Предполагается, что у $o(\Delta \ln x)$ более высокий порядок стремления к 0, чем у $a \Delta \ln x$ при $\Delta \ln x \rightarrow 0$. В этом случае производная соответствующего типа в x_1 , которую обозначим $f'^{\ln x}(x_1)$, определяется, как предел:

$$f'^{\ln x}(x_1) = \lim_{\Delta \ln x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta \ln x} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x_2) - \ln x_1}{\Delta x}} = x_1 f'(x_1).$$

Рассматривая аналогичным образом производную второго типа с описанной выше оценкой изменения аргумента в виде $\Delta \ln x$, мы получим модифицированный вид производной второго типа (обозначим $\overline{f}(x)^{\ln x}$): $\overline{f}(x)^{\ln x} = e^{\frac{x f'(x)}{f(x)}}$.

5. Дифференцирование одной функции по другой функции

Описанный в предыдущем разделе подход можно трактовать и как оценку изменения исследуемой функции $f(x)$ за единицу изменения логарифмической функции $\ln x$, когда её

аргумент x меняется на единицу. Тогда естественно обобщить этот подход и рассмотреть более детально вопрос оценки изменения исследуемой функции $f(x)$ за единицу изменения некой достаточно гладкой функции $\psi(x)$.

Определение 5. Пусть $f(x)$ и $\psi(x) \neq \text{const.}$ – дифференцируемые в точке x_0 функции (в традиционном смысле). Обозначим разность значений функций в некоторой точке x из окрестности x_0 и в точке x_0 : $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ и $\Delta \psi = \psi(x) - \psi(x_0)$, а $\Delta x = x - x_0$.

Производной первого типа функции $f(x)$ по функции $\psi(x)$ в точке x_0 , которую обозначим $f'^\psi(x_0)$, будем называть предел:

$$f'^\psi(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta \psi} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta \psi} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{f'(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$

Если в точке x_0 в отношении $\frac{f'(x_0)}{\psi'(x_0)}$ возникает неопределённость вида $\frac{0}{0}$, то для определения производной в точке x_0 применяют правило Лопиталя [3] и $f'^\psi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\psi'(x)}$.

Некоторые правила вычисления этой производной:

1. $(f_1 \mp f_2)'^\psi = f_1'^\psi \mp f_2'^\psi$;
2. $(f_1 f_2)'^\psi = f_1'^\psi f_2 + f_2'^\psi f_1$;
3. $(f_1/f_2)'^\psi = (f_1'^\psi f_2 - f_2'^\psi f_1)/(f_2)^2$;
4. $(cf)'^\psi = cf'^\psi$, $c = \text{const.}$;

Теперь определим понятие дифференцируемости $f(x)$ по $\psi(x)$.

Пусть $f(x)$ и $\psi(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и точка $x = x_0 + \Delta x$ тоже принадлежит этой окрестности.

Тогда функцию $f(x)$ будем называть дифференцируемой по $\psi(x)$ в точке x_0 , если приращение Δf может быть представлено в виде $\Delta f = A\Delta\psi + o(\Delta\psi)$, $\Delta\psi \rightarrow 0$, где A – постоянная величина для x_0 . Отметим, что $\Delta\psi \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Главную часть линейной функции от переменной $\Delta\psi$, т.е. $A\Delta\psi$ назовём дифференциалом $f(x)$ по $\psi(x)$ в точке x_0 и обозначим его $d^\psi f(x_0)$.

Таким образом, в соответствии с данным определением можно записать следующие равенства:

$$d^\psi f(x_0) = A\Delta\psi \Rightarrow \Delta f = d^\psi f(x_0)\Delta\psi + o(\Delta\psi), \Delta x \rightarrow 0, \Delta\psi \rightarrow 0.$$

Дифференцируемость функции $f(x)$ по $\psi(x)$ в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение $\Delta\psi$, приращение функции Δf является линейной функцией от $\Delta\psi$. Обычное понятие дифференциала функции является частным случаем дифференциала $f(x)$ по $\psi(x)$ в при $\psi(x) = x$.

Для данного понятия дифференцируемости также справедливо утверждение, что для дифференцируемости функции $f(x)$ по $\psi(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную $f'^\psi(x_0)$. При этом $d^\psi f(x_0) = f'^\psi(x_0) \Delta\psi$.

Доказательство этого аналогично доказательству соответствующего утверждения для обычного понятия дифференцируемости функции (доказательство опускаем).

Отметим, что для данного вида производной справедливы правила Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{g'(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)/\psi'(x)}{g'(x)/\psi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'^\psi(x)}{g'^\psi(x)}.$$

Рассмотрим далее вопрос разложения функции $f(x)$ в ряд на основе производной по $\psi(x)$. Пусть $f(x)$ имеет производную по $\psi(x)$ до порядка n в точке x_0 . Из определения 5 и условий дифференцируемости следует, что в некоторой окрестности x_0 приращение функции Δf может быть представлено в виде:

$$\Delta f = f'^\psi(x_0)\Delta\psi + o(\Delta\psi) \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'^\psi(x_0)\Delta\psi + o(\Delta\psi).$$

Функцию $P_f(x) = A_0 + A_1\Delta\psi$ назовём функциональным многочленом первого порядка и будем строить функциональный многочлен $P_f^n(x)$ порядка n следующей формы:

$$P_f^n(x) = A_0 + A_1\Delta\psi + A_2(\Delta\psi)^2 + \dots + A_n(\Delta\psi)^n.$$

Наложим условия для определения $P_f^n(x)$:

$$a) f(x) = P_f^n(x) + o((\Delta\psi)^n), \Delta x \rightarrow 0, \Delta\psi \rightarrow 0;$$

$$b) P_f^n(x_0) = f(x_0); P_f^{n'\psi}(x_0) = f'^\psi(x_0); \dots; P_f^{(n)\psi}(x_1) = f^{(n)\psi}(x).$$

Далее определим коэффициенты многочлена $A_0, A_1, \dots, A_n$, учитывая, что при $x = x_0$ $\Delta\psi = 0$.

Положим $A_0 = f(x_0)$. Из формы $P_f^n(x)$ следует выполнение первой части условия b , т.е. $P_f^n(x_0) = f(x_0)$.

Вычислим $P_f^{n'\psi}(x_0)$ при $x = x_0$: $P_f^{n'\psi}(x_0) = A_1 + 2A_2\Delta\psi + \dots + nA_n(\Delta\psi)^{n-1} = A_1$. Положим $A_1 = f'^\psi(x)$. Тогда будет выполнена вторая часть условия b .

Вычислим $P_f^{n''\psi}(x_0)$ при $x = x_0$: $P_f^{n''\psi}(x_0) = 2A_2\Delta\psi + \dots + nA_n(\Delta\psi)^{n-1} = 2A_2$. Положим $A_2 = \frac{1}{2}f''^\psi(x)$. Тогда будет выполнена третья часть условия b .

Далее, аналогичным образом рассматривая производные от $P_f^n(x_0)$ следующих порядков, мы получим все коэффициенты, при которых выполняется условия b полностью:

$$A_0 = f(x_0); A_1 = f'^\psi(x_0); A_2 = \frac{f''^\psi(x_0)}{2}; \dots; A_n = \frac{f^{(n)\psi}(x_0)}{n!}.$$

Из условия a следует необходимость доказать, что функция $r_n(x) = f(x) - P_f^n(x)$ при $x \rightarrow x_0$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем $(\Delta\psi)^n$. Для этого рассмотрим отношение функций $\frac{r_n(x)}{(\Delta\psi)^n}$.

Обе функции дифференцируемы по $\psi(x)$ до порядка n в точке x_0 и её окрестности и обе равны нулю в точке x_0 . Поэтому рассмотрим пределы отношений их производных по $\psi(x)$, применяя указанное выше правило Лопиталья и учитывая, что из условия b следует равенство нулю производных от $r_n(x_0)$, т.е. $r_n'^\psi(x_0) = \dots = r_n^{(n)\psi}(x_0) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(\Delta\psi)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n'^\psi(x)}{n(\Delta\psi)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)\psi}(x)}{n!\Delta\psi} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n)\psi}(x)}{n!} = 0.$$

На основе этого заключаем, что $r_n(x) = o((\Delta\psi)^n)$ с $\Delta\psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и выполняется условие a . Следовательно функции $f(x)$ раскладывается в окрестности точки x_0 в функциональный ряд:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'^\psi(x_0)\Delta\psi + \frac{f''^\psi(x_0)}{2}(\Delta\psi)^2 + \dots + \frac{f^{(n)\psi}(x_0)}{n!}(\Delta\psi)^n + o((\Delta\psi)^n), \Delta\psi \rightarrow 0.$$

Данное разложение будем называть разложением в функциональный ряд Тейлора. Обычное разложение функции в ряд Тейлора является частным случаем этого разложения при $\psi(x) = x$.

Пример разложения $f(x) = e^x$ по $\psi(x) = \sin x$ в окрестности точки $x = \frac{\pi}{4}$.

$$e^x|_{x=\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}}; (e^x)' \sin x = \frac{e^x}{\cos x}|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}; (e^x)'' \sin x = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^3 x}|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4e^{\frac{\pi}{4}}.$$

$$e^{(\frac{\pi}{4}+x)} = e^{\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 2e^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dots$$

Отметим, что если для каждого натурального n разложить функцию $f(x) = \cos(nx)$ по $\psi(x) = \cos(x)$ в окрестности $x_0 = 0$, то эти разложения будут иметь вид многочленов Чебышева от $\cos(x)$:

$$\cos(2x): \cos(2x)|_{x=0} = 1; \cos(2x)' \cos(x) = \frac{-4 \sin(x) \cos(x)}{-\sin(x)} = 4 \cos(x) \Big|_{x=0} = 4;$$

$$\cos(2x)'' \cos(x) = \frac{-4 \sin(x)}{-\sin(x)} = 4|_{x=0} = 4; \cos(2x)''' \cos(x) = 0|_{x=0} = 0.$$

$$\cos(2x) = 1 + 4(\cos(x) - 1) + 2(\cos(x) - 1)^2 + 0 \dots + 0 =$$

$$= 1 + 4 \cos(x) - 4 + 2\cos^2(x) - 4 \cos(x) + 2 = 2\cos^2(x) - 1 = T_2(\cos(x)).$$

$$\cos(3x): \cos(3x)|_{x=0} = 1;$$

$$\cos(3x)' \cos(x) = \frac{-3 \sin(3x)}{-\sin(x)} = \frac{-3(3\sin(x) - 4\sin^3 x)}{-\sin(x)} = 9 - 12 \sin^2 x|_{x=0} = 9;$$

$$\cos(3x)'' \cos(x) = \frac{-24 \sin(x) \cos(x)}{-\sin(x)} = 24 \cos(x)|_{x=0} = 24;$$

$$\cos(3x)''' \cos(x) = \frac{-24 \sin(x)}{-\sin(x)} = 24|_{x=0} = 24, \cos(2x)^{(4)} \cos(x) = 0|_{x=0} = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= 1 + 9(\cos(x) - 1) + 12(\cos(x) - 1)^2 + 4(\cos(x) - 1)^3 + 0 \dots + 0 = \\ &= 1 + 9 \cos(x) - 9 + 12\cos^2(x) - 24 \cos(x) + 12 + 4\cos^3(x) - 12\cos^2(x) + 12 \cos(x) - 4 = \\ &= 4\cos^3(x) - 3 \cos(x) = T_3(\cos(x)). \end{aligned}$$

Таким же образом получим $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 = T_4(\cos(x))$ и т.д.

По аналогии с определением производной и дифференцируемости первого типа функции $f(x)$ по $\psi(x)$ можно определить производную и дифференцируемость $f(x)$ по $\psi(x)$ второго типа. Опуская детальное описание, отметим, что в этом случае производная второго типа функции $f(x)$ (рассматриваем случай $f(x) > 0$) по $\psi(x)$ в точке x_0 (обозначим $\bar{f}^\psi(x_0)$) будет определяться пределом:

$$\begin{aligned} \bar{f}^\psi(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x)}{f(x_0)} \right)^{\frac{1}{\Delta \psi}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{\ln \left(\frac{f(x_0 + \Delta x)}{f(x_0)} \right)^{\frac{1}{\Delta \psi}}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln f(x_0 + \Delta x) - \ln f(x_0)}{\Delta \psi}} = \\ &= e^{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x_0 + \Delta x) - \ln f(x_0)}{\Delta \psi}} = e^{(\ln f(x_0))' \psi} = e^{\frac{\ln' f(x_0)}{\psi'(x_0)}} = e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0) \psi'(x_0)}} = (\bar{f}(x_0))^{\frac{1}{\psi'(x_0)}} = e^{\frac{f'(x_0) \psi(x_0)}{f(x_0)}}. \end{aligned}$$

Разложение функции в окрестности точки x_0 в соответствующее функциональное произведение будет иметь вид:

$$f(x) = f(x_0) \left(\bar{f}^\psi(x_0) \right)^{\Delta \psi} \left(\bar{\bar{f}}^\psi(x_0) \right)^{\frac{(\Delta \psi)^2}{2!}} \dots \left(\bar{f}^{(n)\psi}(x_0) \right)^{\frac{(\Delta \psi)^n}{n!}} e^{o((\Delta \psi)^n)}, \Delta \psi \rightarrow 0.$$

6. Некоторые прикладные аспекты результатов исследования

В своей работе Никитин И. И. даёт ряд примеров приложения дифференцирования и интегрирования второго типа для упрощения процесса обычного дифференцирования и интегрирования функций в некоторых случаях. Полагаем, что в некоторых случаях для упрощения процесса обычного дифференцирования и интегрирования могут быть использованы также дифференцирование и интегрирование третьего и других типов. Но в этом разделе мы рассмотрим другую область приложения результатов исследования.

На основе обычных понятий дифференцирования и интегрирования функций построены разные численные методы, включающие и методы интерполяции, экстраполяции, аппроксимации функций, численного дифференцирования, интегрирования и другие [4]. Такого рода методы могут быть построены с применением теории дифференцирования и интегрирования второго, третьего и других типов.

Использование таких методов может быть полезным, когда в исследуемом физическом процессе изменение интересующих величин в целом или на отдельных промежутках подвержено факторам, задающим экспоненциальный или более высокий темп изменения, например соответствующий изменению экспоненциальной функции $a^{\psi(x)}$ или функции – башне вида $a^{b^{\psi(x)}}$ или $a^{b^{c^{\psi(x)}}}$ и выше. Тогда данные методы в моделировании такого рода процессов с помощью описания их соответствующими функциями могут давать существенное снижение погрешности.

Далее представим примеры определения численных методов на основе дифференцирования и интегрирования новых типов.

Методы интерполяции и экстраполяции функций.

Во многих известных методах интерполяция и экстраполяция функций осуществляется многочленами, проходящими через точки с известными значениями функции в них. По аналогии такого рода методы могут строиться на основе показательных и л-степенных многочленов в качестве интерполянтов, с использованием теории разложения функций в сходящиеся произведения и л-степени. Также можно рассматривать определение методов приближения функций функциональными многочленами.

Например, построим простейший метод интерполяции дифференцируемой функции $f(x) > 0$ с использованием показательного многочлена первой степени $P_x(x) = a_0 a_1^x$ в качестве интерполанта на сегменте $[x_1, x_2]$ по известным значениям $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Для определения a_0 и a_1 решим систему $\begin{cases} a_0 a_1^{x_1} = f(x_1) \\ a_0 a_1^{x_2} = f(x_2) \end{cases}$, получим уравнение интер-

полянта $P_x(x_1 + h) = f(x_1) \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \right)^{\frac{h}{x_2 - x_1}}$ и формулу метода: $f(x_1 + h) \approx f(x_1) \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \right)^{\frac{h}{x_2 - x_1}}$.

Если интерполировать функцию в середине сегмента $[x_1, x_2]$, т.е. положить $h = \frac{x_2 - x_1}{2}$, то формула метода примет вид: $f\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) \approx f(x_1) \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

Аналогичным образом можно построить методы интерполяции и экстраполяции функций показательными многочленами более высоких степеней и л-степенным многочленами. Рассмотрим конкретный пример интерполяции и экстраполяции разного типа многочленами функции, имеющей вид:

$$f(x) = 1,2^{2^{1,03(x-5)^3} 1,2^{(x-5)^2}} + 2 \cos(x) + 2.$$

По графику функции (рис. 1) видно, что при $x > 7$ первое слагаемое функции оказывает большее влияние на её значение (рост графика) по сравнению с $0 < x < 7$.

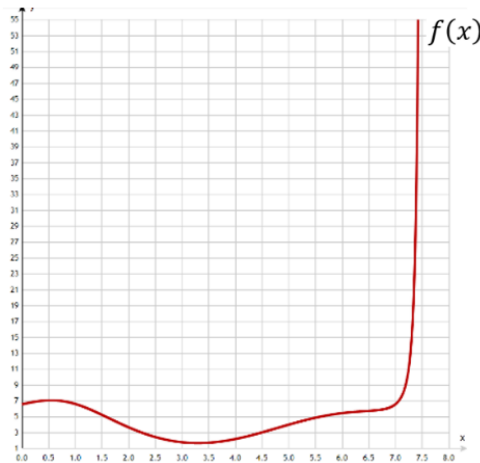


Рис. 1. График функции $f(x) = 1,2^{2^{1,03(x-5)^3} 1,2^{(x-5)^2}} + 2 \cos(x) + 2$

Будем приближать $f(x)$ в некоторых точках интервала $[0; 1]$ разного типа многочленами $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, построенными на одних и тех же трёх узлах с известными значениями функции в них: $f(0,4) = 7,024353448$; $f(0,5) = 7,063273$; $f(0,6) = 7,06163001$.

Формулы многочленов:

$$\psi_1(x) = -2,028126854x^2 + 2,21450967x + 6,463049877 - \text{многочлен};$$

$$\psi_2(x) = e^{-0,287900168x^2 + 0,314363815x + 1,869701676} - \text{показательный многочлен};$$

$$\psi_3(x) = e^{-0,147470848x^2 + 0,161027848x + 0,626697199} - \text{л-степенной многочлен}.$$

В таблице 1 даны значения $f(x)$ и значения приближений многочленами при $x = 0,45$, $x = 0,55$ и $x = 0,8$ с указанием абсолютных погрешностей каждого метода $\Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \Delta\psi_3$.

Таблица 1. Приближение $f(x)$ на интервале $[0; 1]$

x	0,45	0,55	0,8
$f(x)$	7,089825493	7,11790408	7,18094664
$\psi_1(x)$	7,04888354	7,06752182	6,93665643
$\psi_2(x)$	7,048857936	7,06753649	6,9374663
$\psi_3(x)$	7,048844812	7,06754402	6,93787576
$\Delta\psi_1(x)$	0,040941953	0,05038226	0,24429021
$\Delta\psi_2(x)$	0,040967558	0,05036759	0,24348034
$\Delta\psi_3(x)$	0,04098068	0,05036006	0,24307088

На этом интервале функция не показывает резкого роста или снижения и все три многочлена дают близкие погрешности.

Теперь будем приближать $f(x)$ в точках интервала $[7; 7,5]$ разного типа многочленами $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$, построенными на трёх других узлах с известными значениями функции в них: $f(7,35) = 22,09621261$; $f(7,375) = 28,67993987$; $f(7,4) = 39,23214005$.

$\psi_1(x) = 3174,778333x^2 - 46485,26187x + 170179,3084$ – многочлен;

$\psi_2(x) = e^{42,00535237x^2 - 608,0971456x + 2203,375278}$ – показательный многочлен;

$\psi_3(x) = e^{6,684825422x^2 - 95,19846978x + 339,7076907}$ – л-степенной многочлен.

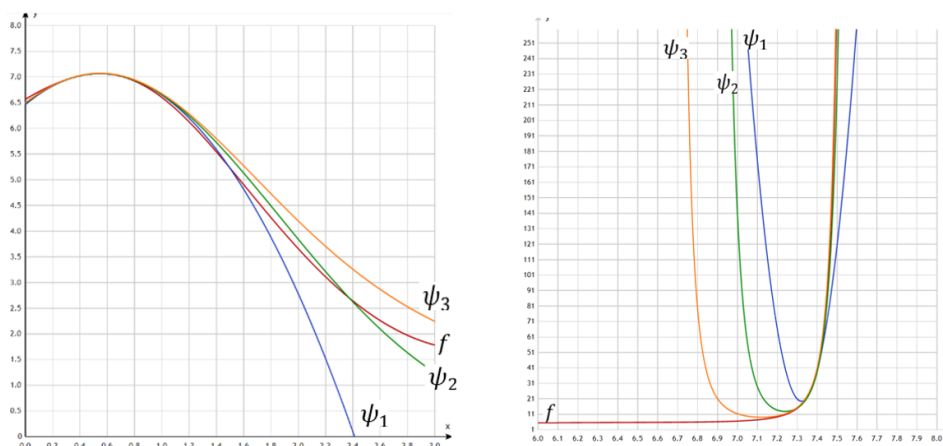
В таблице 2 даны значения $f(x)$ и приближений многочленами в точках $x = 7,3625$, $x = 7,3875$ и $x = 7,425$ с указанием абсолютной погрешности $\Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \Delta\psi_3$.

Таблица 2. Приближение $f(x)$ на интервале $[7; 7,5]$

x	7,3625	7,3875	7,425
$f(x)$	25,04530115	33,32668128	57,18088202
$\psi_1(x)$	24,89201713	33,45998084	53,75281314
$\psi_2(x)$	25,00907434	33,32419728	56,55996435
$\psi_3(x)$	25,02313156	33,30438302	57,15152384
$\Delta\psi_1(x)$	0,153284026	0,133299566	3,42806888
$\Delta\psi_2(x)$	0,036226811	0,002483993	0,620917668
$\Delta\psi_3(x)$	0,02216960	0,02229825	0,02935818

На этом интервале, где функция демонстрирует более высокий темп изменения, показательный и л-степенной многочлены дают существенно меньшую погрешность по сравнению с погрешностью обычного многочлена.

На рисунке 2 даны графики $f(x)$ и $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$ на интервалах $[0; 1]$ и $[7; 7,5]$.

Рис. 2. Графики $f(x)$ и $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$ для $[0; 1]$ слева и для $[7; 7,5]$ справа

Методы аппроксимации функций.

Рассмотрим теперь некоторые численные методы аппроксимации функций на основе данных о её значении в нескольких точках интересующего интервала значений аргумента. Как известно, в качестве критерия наилучшего приближения можно рассматривать максимальное значение из модулей разностей известных значений аппроксимируемой функции ($f_i = f(x_i)$), и значений аппроксимирующей функции или аппроксиманта ($\psi_i = \psi(x_i)$), т.е. $\max |\psi_i - f_i|$. Также критерием наилучшего приближения может быть наименьшее среднее арифметическое абсолютных значений отклонений $\frac{\sum_{i=1}^n |\psi_i - f_i|}{n}$.

Понятие модуля, которое используется в этих критериях, определено на основе вычитания, т.е. обратной операции к сложению, являющейся первой операцией поля действительных чисел. Не сложно убедиться, что в соответствии с теорией алгебраических систем [5] множество положительных действительных чисел с операциями умножения и л-степени тоже образуют поле. Для этого поля положительных чисел можно определить понятие, аналогичное модулю действительного числа.

Модулем по умножению положительного числа a , который обозначим $|a|_\times$, будем называть величину: $|a|_\times = \begin{cases} a, & a \geq 1 \\ \frac{1}{a}, & a < 1 \end{cases}$.

Модуль по умножению тоже можно использовать для критериев в аппроксимации функций (здесь мы говорим о положительных функциях в рассматриваемой области). Это означает, что для положительных функций в качестве критерия наилучшего приближения можно рассматривать:

$$\max |\psi_i/f_i|_\times, |\psi_i/y_i|_\times = \begin{cases} \psi_i/f_i, & \psi_i/f_i \geq 1 \\ \frac{1}{\psi_i/f_i}, & \psi_i/f_i < 1 \end{cases}.$$

Кроме этого, по аналогии с критерием наименьшего среднего арифметического модулей разности значений функций можно рассматривать критерий наименьшего среднего геометрического модулей по умножению частного значений положительных функций:

$$S_\times = \left(\prod_{i=1}^n |\psi_i/f_i|_\times \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Более детально на этих критериях здесь останавливаться не будем, а рассмотрим метод наименьших квадратов, который часто используется для аппроксимации функций. Его основой является критерий наилучшего приближения, базирующийся на нахождении минимума суммы квадратов разности экспериментальных значений функции и значений аппроксиманта, который определяется несколькими коэффициентами. Этот минимум находится на основе частных производных от суммы квадратов, рассматриваемой в качестве функции от нескольких переменных, которыми выступают искомые коэффициенты аппроксиманта.

Используя этот подход, можно описать соответствующий критерий наилучшего приближения и метод аппроксимации на основе операций умножения, л-степени, л-тетрации и производной второго типа.

Можно показать (доказательство опускаем), что в этом случае необходимым условием экстремума положительных функций нескольких переменных является равенство единице первых частных производных второго типа по всем переменным (по аналогии равенства нулю обычных частных производных функции нескольких переменных). Частные производные второго типа определяются по аналогии с частными производными первого типа. Частную производную, например, от $f(x, y)$ второго типа по x обозначим $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

Пусть $(x_i; y_i), i = 1, \dots, n$ – известные данные аппроксимируемой положительной функции, а $f(x; a_1; \dots; a_m)$ – выбранная в качестве аппроксиманта функция с параметрами $a_1; \dots; a_m$. Обозначим $f_i = f(x_i; a_1; \dots; a_m)$ и построим следующее произведение л-тетраций с показателем 2:

$$Q = \prod_{i=1}^n e^{\ln^2 \frac{f_i}{y_i}} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i}{y_i} \right)^{\ln \frac{f_i}{y_i}}.$$

Здесь $e^{\ln^2 \frac{f_i}{y_i}} = \left(\frac{f_i}{y_i} \right)^{\ln \frac{f_i}{y_i}}$ – это аналог квадрата разности в методе наименьших квадратов.

Чем ближе значения f_i к y_i , тем ближе к единице сомножители этого произведения л-тетраций.

Тогда в качестве критерия наилучшего приближения будем рассматривать максимальное приближение этого произведения к единице при соответствующих значениях параметров $a_1; \dots; a_m$, а критерий назовём критерием минимальных л-тетраций с показателем 2.

Далее будем рассматривать это произведение, как функцию нескольких аргументов $a_1; \dots; a_m$ и приравняем к единице частные производные второго типа этой функции по каждому аргументу. Для определения $a_1; \dots; a_m$ и, тем самым – аппроксиманта, необходимо решить полученную таким образом систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(a_0; \dots; a_m)}{\partial a_0} = 1 \\ \dots \\ \frac{\partial Q(a_0; \dots; a_m)}{\partial a_m} = 1 \end{cases}$$

В качестве аппроксиманта можно использовать показательный многочлен степени m $P_x^m(x) = a_0 a_1^x a_2^{x^2} \dots a_m^{x^m}$ при условии, что известны n ($n > m$) значений (x_i, y_i) аппроксимируемой функции. Тогда:

$$Q = \prod_{i=1}^n \left(\frac{P_x^m(x_i)}{y_i} \right)^{\ln \frac{P_x^m(x_i)}{y_i}} = \prod_{i=1}^n e^{\ln^2 \frac{P_x^m(x_i)}{y_i}} = \prod_{i=1}^n e^{\left(\frac{\ln a_0 a_1^{x_i} a_2^{x_i^2} \dots a_m^{x_i^m}}{y_i} \right)^2}.$$

В этом случае система уравнений сводится к линейной системе уравнений, а её решение даёт искомые значения коэффициентов аппроксиманта $P_x^m(x) = a_0 a_1^x a_2^{x^2} \dots a_m^{x^m}$.

Для наглядного примера на рисунке 3 представлены графики аппроксимантов функции $f(x) = 3 \times 2^{x^3} \times 0,3^{x^2} \times 0,5^x$, один из которых – многочлен вида $\psi_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, а другой – показательный многочлен вида $\psi_2(x) = a_0 a_1^x a_2^{x^2}$. На рисунке слева аппроксиманты определены на основе значений функций для аргументов: -0,5; -0,2; 0,2; 0,3; 0,4, а справа – для аргументов: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5

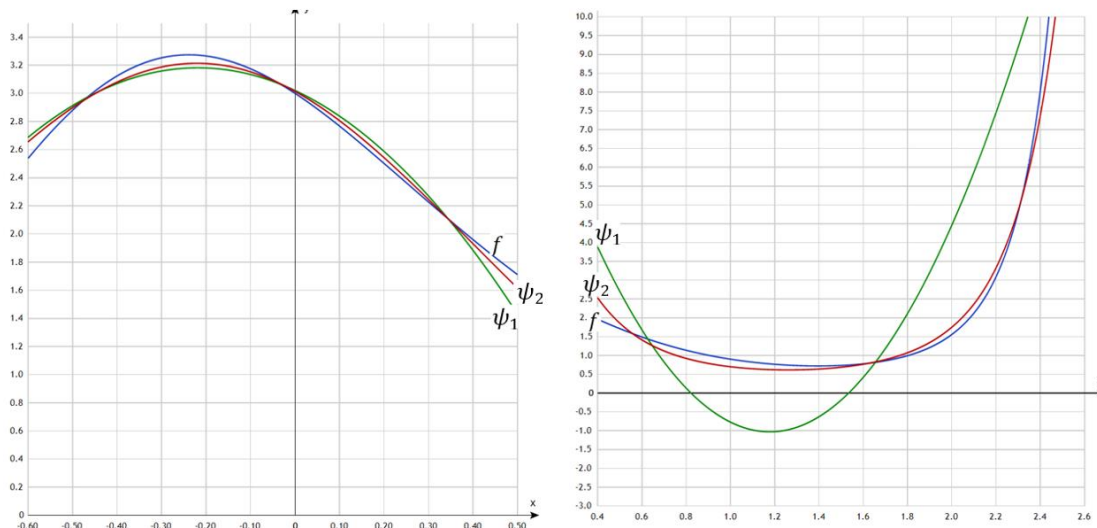


Рис. 3. Графики $f(x)$ и аппроксимантов $\psi_1(x), \psi_2(x)$

По этим графикам видно, что для этой функции погрешность приближения показательным многочленом $\psi_2(x)$ меньше погрешности приближения обычным многочленом $\psi_1(x)$.

Метод решения нелинейных уравнений.

Рассмотрим построение метода численного решения нелинейного уравнения с использованием производных нового типа – аналога метода Ньютона (метода касательных). Как известно, формула итерационного метода Ньютона выводится на основе выражения значения переменной x касательной к точке графика $f(x)$, когда касательная пересекает ось абсцисс. Эта формула имеет вид: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

В соответствии с понятием производной второго типа аналог касательной к $f(x)$ в точке x_0 (назовём этот аналог показательной касательной) – это график проходящего через $(x_0; f(x_0))$ показательного многочлена первой степени $P_x(x) = ba^x$, где $a = \overline{f(x_0)} = e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$.

Формулу соответствующего итерационного метода получаем на основе выражения значения переменной x показательной касательной в точке графика $f(x)$, когда она пересекает прямую $y = 1$.

Рассмотрим в общем виде имеющее единственный корень на отрезке $[a; b]$ уравнение $f(x) = 1$, где функция $f(x)$ на $[a; b]$ положительна, монотонна и выпукла вниз.

Уравнение показательной касательной к $f(x)$ в точке $x = b$: $y = f(b) \left(\frac{f(b)}{f(x)} \right)^{(x-b)}$.

Из условия её пересечения с $y = 1$ получаем: $x = b - \frac{\ln f(b)}{\ln \frac{f(b)}{f(x)}} = b - \frac{f(b) \ln f(b)}{f'(b)}$.

Заменяя x на x_{n+1} , а b на x_n получаем искомую формулу: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \ln f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Если $f(x)$ на $[a; b]$ положительна, монотонна и выпукла вверх, то уравнение преобразуем к равносильному $\psi(x) = -1$, где $\psi(x) = -f(x)$, получаем формулу из условия пересечения показательной касательной к $\psi(x)$ с $y = -1$: $x_{n+1} = x_n - \frac{\psi(x_n) \ln(-\psi(x_n))}{\psi'(x_n)}$.

Эта формула справедлива для решения уравнения $\psi(x) = -1$, где функция $\psi(x)$ на $[a; b]$ отрицательна, монотонна и выпукла вверх.

Для примера рассмотрим решение уравнения $3^{2x^2} - x^2 = 5$ на $[0,5; 1,5]$.

Для этого решим равносильное ему уравнение $f_1(x) = 3^{2x^2} - x^2 - 5 = 0$ методом Ньютона с погрешностью $|x_{n+1} - x_n| \leq 0,001$.

На рисунке 4 показаны графики $f_1(x)$ и нескольких касательных, пересекающих Ox в приближённых значениях корня, а по таблице видно, что потребовалось 9 итераций для достижения результата с заданной погрешностью.

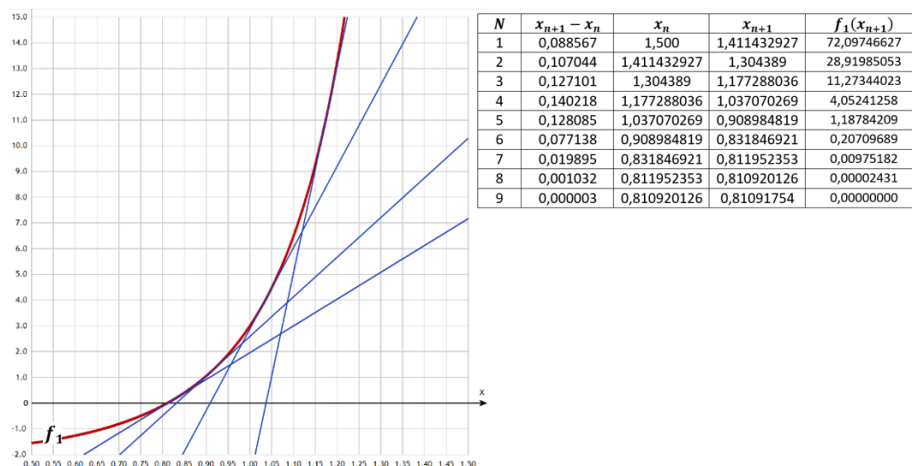


Рис. 4. Графики $f_1(x)$ и касательных с данные по итерациям (метод Ньютона)

Рассмотрим решение того же уравнения $3^{2x^2} - x^2 = 5$ на $[0,5; 1,5]$ новым методом на основе производной второго типа. Для этого преобразуем уравнение в равносильное:

$$f_2(x) = (3^{2x^2} - x^2)/5 = 1.$$

На рисунке 5 показаны графики $f_2(x)$ и нескольких показательных касательных, пересекающих $y = 1$ в приближённых значениях корня.

По таблице видно, что потребовалось 5, а не 9 итераций для достижения результата с требуемой погрешностью.

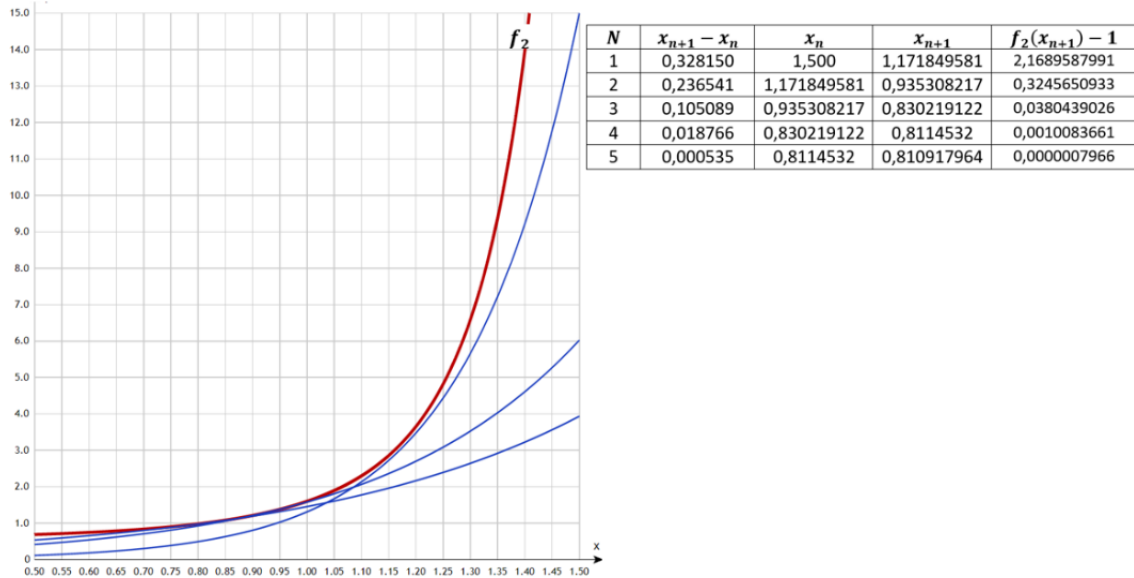


Рис. 5. Графики $f_2(x)$ и показательных касательных с данные по итерациям (аналог метода Ньютона)

Аналогичный метод можно получить и на основе производной третьего типа, определив соответствующую формулу вычисления приближений корня уравнения вида $f(x) = d$, которое имеет единственный корень на $[a; b]$, а $d > 1$ является базой производной третьего типа. При условии, что $f(x)$ на $[a; b]$ больше d , монотонна и выпукла вниз, этими приближениями будут x -координаты точек пересечения прямой $y = d$ с графиками функций вида $y = a^{b^x}$, касающихся $f(x)$ в соответствующих точках. Будем называть эти функции л-касательными к $f(x)$ в этих точках. Уравнение л-касательной в точке $(x_n; f(x_n))$ имеет вид:

$$y = f(x_n) (\log_a f(x_n))^{x - x_n}.$$

В этом случае, действуя аналогичным образом, получим соответствующую формулу вычисления приближений:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \ln f(x_n) \ln \log_a f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Для определения метода в случае уравнений с другими условиями для $f(x) > 0$ относительно $0, 1, 1/d, d$, а также для $f(x) < 0$ относительно $0, -1, -1/d, -d$ надо корректировать определения производной третьего типа, а на основе их - определять уравнения касательных кривых и строить методы нахождения точек их пересечения с соответствующей прямой: $y = d$ или $y = 1/d$ или $y = -d$ или $y = -1/d$.

Методы численного дифференцирования функций.

На основе производной второго типа и разложения функции в произведение можно получить также методы численного дифференцирования первого типа. Эти методы могут оказаться более точными в некоторых случаях. Полагаем, что это – случаи дифференцирования функций, меняющихся с экспоненциальным и более высоким темпом.

По аналогии с известными методами численного дифференцирования можно определить формулы численного дифференцирования второго типа, а на основе связи производной второго и первого типов ($\overline{f(x)} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$) – получать методы вычисления приближённых значений производных первого типа.

Например, рассмотрим простейший метод вычисления производной, вытекающий из разложения функции в ряд Тейлора: $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + o(h)$. Аналогичный ему метод определения приближённого значения производными второго типа получаем на основе разложения функции в произведение:

$\overline{f(x)} = \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} \times e^{o(h)}$. Учитывая, что $\overline{f(x)} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, получаем:

$$f'(x) \approx f(x) \ln \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = f(x) \frac{\ln f(x+h) - \ln f(x)}{h}.$$

Приведём пример ещё одного метода численного дифференцирования $f(x)$ с использованием производной второго типа. Будем строить метод дифференцирования функции на интервале с равномерным расположением узлов и определять формулу вычисления производной в узлах интервала x , используя её значения в узле x и в двух соседних узлах $x-h$ и $x+h$, где h – расстояние между узлами.

В этом случае производную второго типа от $f(x)$ заменим производной второго типа от интерполянта $P_x^2(x) = a^{x^2} b^x c$ и используем формулу связи производных первого и второго типов:

$$\begin{cases} \overline{P_x^2(x)} = \overline{a^{x^2} b^x c} = \overline{a^{x^2} b^x} \\ \overline{f(x)} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} \end{cases} \Rightarrow f'(x) \approx f(x) \ln(\overline{a^{x^2} b^x}).$$

Определяем вид $P_x^2(x)$, проходящего через точки $(x-h; f(x-h))$, $(x; f(x))$ и $(x+h; f(x+h))$ составляем и решаем соответствующую систему уравнений, находим выражения нужных коэффициентов a и b и определяем формулу метода:

$$\begin{aligned} \overline{P_l^2(x)} &= \left(\frac{f(x+h)}{f(x-h)} \right)^{\frac{1}{2h}} \Rightarrow \overline{f(x)} \approx \overline{P_l^2(x)} = \left(\frac{f(x+h)}{f(x-h)} \right)^{\frac{1}{2h}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) \approx f(x) \ln \left(\frac{f(x+h)}{f(x-h)} \right)^{\frac{1}{2h}} = f(x) \frac{\ln f(x+h) - \ln f(x-h)}{2h} \end{aligned}$$

Поставим задачу определить метод вычисления производных в средних точках между узлами, используя значения функции в двух соседних узлах. Для этого заменим в полученной формуле $f(x-h)$ на $f(x)$, $2h$ на h , а $f(x)$ на приближённое значение $f\left(x + \frac{h}{2}\right)$ по интерполяционной формуле, представленной ранее: $f\left(x + \frac{h}{2}\right) \approx \sqrt{f(x)f(x+h)}$:

$$f'\left(x + \frac{h}{2}\right) \approx \sqrt{f(x)f(x+h)} \ln \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = \sqrt{f(x)f(x+h)} \frac{\ln f(x+h) - \ln f(x)}{h}.$$

Продифференцируем для примера функцию $f(x) = 3 \times 2^{x^3} \times 0,3^{x^2} \times 0,5^x$ на основе её значений в узлах интервала $[2; 2,6]$ с шагом 0,05. Производные будем вычислять в середине между соседними узлами.

Применим последний построенный метод и известный метод $f'(x + \frac{h}{2}) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

В таблице 3 даны результаты численного дифференцирования.

Обозначения:

$$\psi_1(x + \frac{h}{2}) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

$$\psi_2(x + \frac{h}{2}) = \sqrt{f(x)f(x+h)} \frac{\ln f(x+h) - \ln f(x)}{h};$$

$$d1 = \left| f'(x + \frac{h}{2}) - \psi_1(x + \frac{h}{2}) \right|;$$

$$d2 = \left| f'(x + \frac{h}{2}) - \psi_2(x + \frac{h}{2}) \right|.$$

Таблица 3. Результаты численного дифференцирования $f(x) = 3 \times 2^{x^3} \times 0,3^{x^2} \times 0,5^x$

$x + h/2$	f'	ψ_1	ψ_2	$d1$	$d2$
2,025	4,943712644	4,958254471	4,953737603	0,01454183	0,01002496
2,075	6,372693059	6,393032682	6,385943048	0,02033962	0,01324999
2,125	8,294289697	8,323081329	8,311977691	0,02879163	0,01768799
2,175	10,913662	10,95493628	10,937536	0,04127428	0,023874
2,225	14,53403725	14,5939964	14,56664921	0,05995915	0,03261196
2,275	19,60967557	19,69799495	19,65480176	0,08831938	0,04512619
2,325	26,83066028	26,96264882	26,89396766	0,13198854	0,06330738
2,375	37,26057037	37,46080877	37,35068794	0,2002384	0,09011757
2,425	52,56330684	52,87186639	52,69357395	0,30855955	0,13026711
2,475	75,38248999	75,86572702	75,57385302	0,48323704	0,19136303
2,525	109,9860155	110,7556073	110,2719037	0,76959179	0,28588815
2,575	163,3788342	164,6259011	163,8135011	1,24706691	0,43466698

По таблице видно, что в этом случае погрешность $d2$ метода $\psi_2(x)$ существенно меньше погрешности $d1$ метода $\psi_1(x)$.

Методы численного интегрирования функций.

Производные новых типов могут быть использованы и для определения соответствующих методов численного интегрирования. Рассмотрим, например, построение метода с производной второго типа по аналогии с известным методом трапеций, который по сути основан на замене интегрируемой функции интерполяционным многочленом первой степени на каждом шаге интегрирования. Это означает, что на каждом сегменте $[x; x + h]$ сетки значений функции вычисляют приближённое значение интеграла по формуле:

$$\int_x^{x+h} f(x)dx = h \frac{f(x) + f(x+h)}{2}.$$

В случае производной второго типа интегрируемую функцию заменим показательным интерполяционным многочленом первой степени, построенным на тех же точках $P_x(x) = a_0 a_1^x$. Определив коэффициенты a_0, a_1 , вычислив интеграл и проведя преобразования, получим искомую формулу метода, который назовём методом показательных трапеций:

$$\int_x^{x+h} f(x)dx = h \frac{f(x+h) - f(x)}{\ln f(x+h) - \ln f(x)}.$$

Вычислим для примера этими методами $\int_1^{1,5} 3 \times x^2 \times 2^{x^3} dx$ с шагом 0,02.

Обозначим символом I фактическое значение $\int_1^{x_{n+1}} 3 \times x^2 \times 2^{x^3} dx$. Для метода трапеций приближённое значение интеграла на каждом шаге от x_n до x_{n+1} обозначим $i1$ и нарастающей суммой приближение интеграла от 1 до x_{n+1} — $I1$, а погрешность — $d1 = |I - I1|$. Для метода показательных трапеций соответствующие обозначения будут: $i2$, $I2$ и $d2 = |I - I2|$.

Таблица 4. Результаты численного интегрирования

x	$f(x)$	I	$i1$	$I1$	$d1$	$i2$	$I2$	$d2$
1	6							
1,02	6,51294	0,12505	0,12513	0,12513	0,00008	0,12506	0,12506	0,00001
1,04	7,07629	0,26085	0,13589	0,26102	0,00017	0,13581	0,26087	0,00002
1,06	7,69599	0,40848	0,14772	0,40874	0,00027	0,14764	0,40851	0,00003
1,08	8,37876	0,56911	0,16075	0,56949	0,00038	0,16065	0,56916	0,00005
1,1	9,13224	0,74410	0,17511	0,74460	0,00050	0,17500	0,74416	0,00006
1,12	9,96513	0,93493	0,19097	0,93558	0,00064	0,19085	0,93502	0,00008
1,14	10,88730	1,14330	0,20852	1,14410	0,00080	0,20839	1,14340	0,00010
1,16	11,91005	1,37109	0,22797	1,37207	0,00098	0,22782	1,37122	0,00013
1,18	13,04629	1,62046	0,24956	1,62164	0,00118	0,24939	1,62061	0,00016
1,2	14,31079	1,89380	0,27357	1,89521	0,00141	0,27338	1,89399	0,00019
1,22	15,72047	2,19386	0,30031	2,19552	0,00166	0,30009	2,19408	0,00023
1,24	17,29480	2,52372	0,33015	2,52567	0,00196	0,32990	2,52399	0,00027
1,26	19,05617	2,88689	0,36351	2,88918	0,00229	0,36323	2,88721	0,00032
1,28	21,03037	3,28738	0,40087	3,29005	0,00267	0,40054	3,28775	0,00037
1,3	23,24721	3,72973	0,44278	3,73282	0,00310	0,44241	3,73016	0,00043
1,32	25,74118	4,21912	0,48988	4,22271	0,00359	0,48946	4,21962	0,00050
1,34	28,55225	4,76149	0,54293	4,76564	0,00416	0,54245	4,76207	0,00058
1,36	31,72684	5,36363	0,60279	5,36843	0,00481	0,60223	5,36430	0,00067
1,38	35,31896	6,03334	0,67046	6,03889	0,00555	0,66982	6,03412	0,00077
1,4	39,39160	6,77959	0,74711	6,78600	0,00641	0,74637	6,78048	0,00089
1,42	44,01833	7,61270	0,83410	7,62010	0,00740	0,83324	7,61372	0,00103
1,44	49,28525	8,54459	0,93304	8,55313	0,00855	0,93204	8,54577	0,00118
1,46	55,29339	9,58904	1,04579	9,59892	0,00988	1,04463	9,59040	0,00136
1,48	62,16148	10,76205	1,17455	10,77347	0,01142	1,17321	10,76361	0,00156
1,5	70,02934	12,08216	1,32191	12,09538	0,01321	1,32035	12,08396	0,00179

Сравнивая погрешность в разных методах (столбцы $d1$ и $d2$) заключаем, что метод показательных трапеций существенно точнее в этом случае.

Заключение

Данное исследование имеет определённые теоретические и практические результаты. Определение операций л-степени и л-тетрации с их свойствами позволяет рассматривать различные включающие эти операции новые алгебраические системы на подмножествах действительных чисел. Это может быть полезным для исследований в области теории чисел, групп, полей и в других областях.

Новые типы дифференцирования и интегрирования также расширяют само понятие производной, дифференциального и интегрального исчисления, представляют собой дополнительные инструменты исследования функций действительного переменного, которые могут быть перенесены на функции нескольких действительных переменных и на функции комплексного переменного.

В прикладном плане отметим, что построение и применение численных методов на основе теории нового типа дифференцирования и интегрирования функций может быть полезным в решении задач математической физики, в частности, давать существенное уменьшение погрешности в математическом моделировании таких физических процессов, которые по своей природе протекают с «повышенным темпом» роста или убывания. Полагаем, что это могут быть процессы в области физики взрыва, плазмы, химических реакций и в других областях.

Очевидно, что такие новые методы требуют большего количества операций и больше компьютерного времени. Вместе с этим они могут быть эффективными, если получение экспериментальных данных связаны с существенными трудностями и затратами, а методы позволяют достичь требуемой точности на базе меньшего количества экспериментальных данных.

Также отметим, что при большом объёме вычислительных задач в рамках допустимой точности эти методы могут привести и к сокращению временных затрат. Например, при заданной точности и большом количестве задач численного интегрирования (на больших сетках с большим количеством прохождения этих сеток) новые методы могут позволить существенно уменьшить количество шагов интегрирования. В этом случае, даже с учётом большего числа операций на каждом шаге, эти методы могут в итоге снизить потребности компьютерного времени.

Список литературы

1. Никитин И. И. Исчисление величин бесконечно близких к единице // МОПИ им. Н. К. Крупской. Учёные записки, том 269. Математический анализ, вып. 14. – 1969. – С. 302-311.
2. Кузнецов Д. Ю. Тетрация как специальная функция // Владикав. мат. жур. – 2010. – Т.12. – В.2. – С.31-45.
3. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – 720 с.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы: учебное пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
5. Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С., Стеллецкий И. В. Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения. – М.: Просвещение, 1973. – 144 с.

Сведения об авторе

Колягин Андрей Юрьевич – кандидат педагогических наук, независимый исследователь, г. Москва, e-mail: ak.russia4444@yandex.ru.

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS BASED ON ALTERNATIVE ESTIMATES OF FUNCTION AND ARGUMENT CHANGE

A.Yu. Kolyagin

Independent researcher

The article presents a special approach to the concept of differentiation and integration of functions based on non-standard assessment of changes in functions and argument. One method of evaluation is associated with the division operation - the ratio of the values of the function, the other - with a new operation defined using the concept of logarithm. Differentiation and integration of different types are defined, including differentiation of one function over another, expansion of functions into a product and other structures is defined similarly to Taylor series expansion. Based on derivatives and integrals of a new type, examples are given for constructing numerical methods for interpolation, approximation, differentiation and integration of functions.

Keywords: *differential calculus, integral calculus, decomposition of a function into a product, arithmetic operations, numerical methods, approximation of functions, numerical differentiation, numerical integration, mathematical physics.*

References

1. Nikitin I.I. Calculation of values infinitely close to unity // MOPI named after N.K. Krupskaya. Scholarly Notes, Volume 269. Mathematical analysis, issue 14. – 1969. – P. 302-311.
2. Kuznetsov D. Yu. Tetration as a special function//Vladikav. mat. zhur. – 2010. – T.12. – V.2. – P.31-45.
3. Ilyin V.A., Sadovnichy V.A., Sendov Bl. H. Mathematical analysis. – M.: Nauka, 1979. – 720 p.
4. Kalitkin N. N. Numerical methods: textbook. – St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2011. – 592 p.
5. Varpakhovsky F.L., Solodovnikov A.S., Stelletsky I.V. Algebra. Groups, rings, fields. Vector and Euclidean spaces. Linear mappings. – M.: Prosveshchenie, 1973. – 144 p.

About author

Kolyagin A. Yu. – Candidate of Pedagogical Sciences, independent researcher, Moscow, e-mail: ak.russia4444@yandex.ru.

УДК 512.542

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КЛАССОВ ГРУПП, ИНДУЦИРОВАННЫХ ПОДГРУППОВЫМИ ФУНКТОРАМИ

В.Н. Сорокина, М.М. Сорокина

ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. В работе исследуются свойства классов групп в зависимости от свойств подгрупповых функторов, их определяющих.

Ключевые слова: группа, конечная группа, класс групп, подгрупповой функтор.

Рассматриваются только конечные группы. Классом групп называется всякая совокупность групп, содержащая с каждой группой и все изоморфные ей группы. Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп.

Исследования последних десятилетий выявили тесную взаимосвязь между классами групп и подгрупповыми функторами (см., напр., [2, 3]). Подгрупповой функтор представляет собой такое отображение τ , которое сопоставляет каждой группе G непустую совокупность $\tau(G)$ её подгрупп, удовлетворяющее условию $(\tau(G))^\varphi = \tau(G^\varphi)$, для любого изоморфизма φ каждой группы G [2]. В монографии [3] для произвольного класса групп $\mathfrak{F}$ и произвольного подгруппового функтора τ был введён в рассмотрение и исследован класс групп $\mathfrak{F}^\tau = \{G \in \mathfrak{F} \mid \tau(G) \subseteq \mathfrak{F}\}$, являющийся наибольшим τ -замкнутым подклассом класса $\mathfrak{F}$. В монографии [2] для подгрупповых функторов τ и θ был построен и изучен класс групп $\mathfrak{G}_\tau(\theta) = \{G \in \mathfrak{G} \mid \theta(G) = \tau(G)\}$. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$. В теореме 1 настоящей работы установлены свойства класса групп $\mathfrak{F}^\tau$ в случае, когда τ – ω -регулярный подгрупповой функтор. В теореме 2 изучаются свойства класса групп $\mathfrak{G}_\tau^\omega(\theta) = \{G \in \mathfrak{G} \mid \theta^\omega(G) = \tau^\omega(G)\}$, где $\theta^\omega(G)$ и $\tau^\omega(G)$ – множества всех ω -подгрупп группы G из $\theta(G)$ и $\tau(G)$ соответственно.

Обозначения и определения, используемые в статье, являются стандартными (см., напр., [2]). Приведем лишь некоторые из них. Через $\pi(G)$ обозначается совокупность всех простых делителей порядка группы G . Группа G называется ω -группой, если $\pi(G) \subseteq \omega$. Подгруппа H группы G называется ω -подгруппой группы G , если H является ω -группой.

Подгрупповой функтор τ называется *решеточным* [2, с. 17], если для любой группы G из того, что $H, K \in \tau(G)$, следует, что $H \cap K \in \tau(G)$ и $\langle H, K \rangle \in \tau(G)$. Пусть τ – решеточный подгрупповой функтор. Подгрупповой функтор θ называется *τ -фильтрующим* [2, с. 17], если для любой группы G множество $\theta(G)$ является фильтром решетки $\tau(G)$, т.е. для любой группы G выполняются следующие условия:

- 1) из $A \in \theta(G)$, $X \in \tau(G)$ и $A \subseteq X$ следует, что $X \in \theta(G)$;
- 2) из $A \in \theta(G)$, $B \in \theta(G)$ следует, что $A \cap B \in \theta(G)$.

Подгрупповой функтор τ называется ω -регулярным [1, с. 9], если для любой группы G и любой ее нормальной ω -подгруппы N выполняются следующие условия:

- 1) из $H \in \tau(G)$ следует, что $HN/N \in \tau(G/N)$;
- 2) из $K/N \in \tau(G/N)$ следует, что $K \in \tau(G)$.

Замечание 1. Понятие ω -регулярного подгруппового функтора является обобщением понятия регулярного подгруппового функтора [2, с. 197], а именно, каждый регулярный подгрупповой функтор является ω -регулярным для любого множества ω . В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, понятия ω -регулярного и регулярного подгрупповых функторов совпадают.

Подгрупповой функтор τ называется ω -радикальным [5, с. 11], если для любой группы G и любой ее нормальной ω -подгруппы N имеет место равенство

$$N \cap \tau(G) = \tau(N),$$

где $N \cap \tau(G) = \{N \cap L \mid L \in \tau(G)\}$.

Замечание 2. Понятие ω -радикального подгруппового функтора является обобщением понятия радикального подгруппового функтора [2, с. 16], а именно, каждый радикальный подгрупповой функтор является ω -радикальным для любого множества ω . В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, понятия ω -радикального и радикального подгрупповых функторов совпадают.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется:

Q^ω -замкнутым, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная ω -подгруппа группы G , следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$;

S_n^ω -замкнутым, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная ω -подгруппа группы G , следует, что $N \in \mathfrak{F}$;

R_0^ω -замкнутым, если из того, что $G/N_1, G/N_2 \in \mathfrak{F}$ и N_1, N_2 – нормальные ω -подгруппы группы G , следует, что $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$ [4, с. 112].

Замечание 3. Понятие Q^ω -замкнутого (S_n^ω -замкнутого, R_0^ω -замкнутого) класса групп является обобщением понятия Q -замкнутого (соответственно, S_n -замкнутого, R_0 -замкнутого) класса групп, а именно, всякий Q -замкнутый (соответственно, S_n -замкнутый, R_0 -замкнутый) класс групп является Q^ω -замкнутым (соответственно, S_n^ω -замкнутым, R_0^ω -замкнутым) для любого множества ω . В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, понятия Q^ω -замкнутого и Q -замкнутого (соответственно, S_n^ω -замкнутого и S_n -замкнутого, R_0^ω -замкнутого и R_0 -замкнутого) классов групп совпадают.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп, τ – подгрупповой функтор. Тогда

$$\mathfrak{F}^\tau = \{G \in \mathfrak{F} \mid \tau(G) \subseteq \mathfrak{F}\} \text{ [3, с. 218].}$$

В теореме 1 для ω -радикального подгруппового функтора τ установлено свойство класса групп $\mathfrak{F}^\tau$ в зависимости от свойств класса групп $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. Пусть ω – непустое множество простых чисел, τ – ω -радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Если $\mathfrak{F}$ – S_n^ω -замкнутый класс групп, то класс групп $\mathfrak{F}^\tau$ также является S_n^ω -замкнутым.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n^ω -замкнутый класс групп, $G \in \mathfrak{F}^\tau$, N – нормальная ω -подгруппа группы G . Установим, что $N \in \mathfrak{F}^\tau$. Ввиду задания класса групп $\mathfrak{F}^\tau$, достаточно проверить, что $\tau(N) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \tau(N)$. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – S_n^ω -замкнутый класс групп и $G \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$. По определению ω -радикального подгруппового функтора имеет место равенство

$$N \cap \tau(G) = \tau(N).$$

Тогда из $H \in \tau(N)$ следует, что $H \in N \cap \tau(G)$. Это означает, что существует $L \in \tau(G)$ такая, что $H = N \cap L$. Так как N – нормальная ω -подгруппа группы G , то $\pi(N \cap L) \subseteq \omega$. Исходя из свойств нормальных подгрупп, приходим к выводу, что H – нормальная ω -подгруппа группы L . Поскольку $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$, то $L \in \mathfrak{F}$ и, по определению S_n^ω -замкнутого класса групп, $H \in \mathfrak{F}$. Тем самым доказано, что любая τ -подгруппа группы N принадлежит классу групп $\mathfrak{F}$, т.е. $\tau(N) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, приходим к выводу, что $N \in \mathfrak{F}^\tau$. Следовательно, класс групп $\mathfrak{F}^\tau$ является S_n^ω -замкнутым. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп, τ и θ – подгрупповые функторы. Следуя [2, с. 38], введем в рассмотрение следующий класс групп:

$$\mathfrak{G}_\tau^\omega(\theta) = \{G \mid \theta^\omega(G) = \tau^\omega(G)\},$$

где $\theta^\omega(G)$ и $\tau^\omega(G)$ – множества всех ω -подгрупп группы G , принадлежащих множествам $\theta(G)$ и $\tau(G)$ соответственно. В теореме 2 установлены свойства класса групп $\mathfrak{G}_\tau^\omega(\theta)$. Через S_n^ω обозначается подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе совокупность всех ее нормальных ω -подгрупп.

Теорема 2. Пусть τ – ω -регулярный решеточный подгрупповой функтор, θ – ω -регулярный τ -фильтрующий подгрупповой функтор, причем $S_n^\omega(G) \subseteq \tau^\omega(G) \cap \theta^\omega(G)$ для любой группы G . Тогда класс групп $\mathfrak{G}_\tau^\omega(\theta)$ является Q^ω -замкнутым и R_0^ω -замкнутым.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\tau^\omega(\theta)$. Установим, что класс групп $\mathfrak{F}$ является Q^ω -замкнутым. Пусть $G \in \mathfrak{F}$, N – нормальная ω -подгруппа группы G . Покажем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Достаточно проверить, что $\theta^\omega(G/N) = \tau^\omega(G/N)$.

Исходя из определения ω -регулярного подгруппового функтора, $\tau^\omega(G/N) = \tau^\omega(G)N/N$ и $\theta^\omega(G/N) = \theta^\omega(G)N/N$. По заданию класса групп $\mathfrak{F}$ справедливо равенство $\tau^\omega(G)N/N = \theta^\omega(G)N/N$. Следовательно, $\tau^\omega(G/N) = \theta^\omega(G/N)$. Это означает, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Таким образом, приходим к выводу, что класс групп $\mathfrak{F}$ является Q^ω -замкнутым.

Установим, что класс групп $\mathfrak{F}$ является R_0^ω -замкнутым. Пусть $G/N_1, G/N_2 \in \mathfrak{F}$, N_1, N_2 – нормальные ω -подгруппы группы G . Покажем, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Достаточно проверить, что $\tau^\omega(G/N_1 \cap N_2) = \theta^\omega(G/N_1 \cap N_2)$.

Покажем, что $\theta^\omega(G/N_1 \cap N_2) \subseteq \tau^\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Вначале отметим, что $N_1 \cap N_2$ – нормальная ω -подгруппа группы G . Пусть $L/N_1 \cap N_2 \in \theta^\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Установим, что $L/N_1 \cap N_2 \in \tau^\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Так как $L/N_1 \cap N_2 \in \theta^\omega(G/N_1 \cap N_2)$, то по определению ω -регулярного подгруппового функтора следует, что $L \in \theta^\omega(G)$. Так как $\theta(G)$ – фильтр $\tau(G)$, то $L \in \tau^\omega(G)$ и, по определению ω -регулярного подгруппового функтора, получаем, что $L/N_1 \cap N_2 \in \tau^\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Таким образом, справедливо включение:

$$\theta^\omega(G/N_1 \cap N_2) \subseteq \tau^\omega(G/N_1 \cap N_2).$$

Покажем, что $\tau^\omega(G/N_1 \cap N_2) \subseteq \theta^\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Так как $N_1, N_2 \in S_n^\omega(G)$, $S_n^\omega(G) \subseteq \tau^\omega(G) \cap \theta^\omega(G)$, то $N_1, N_2 \in \tau^\omega(G)$ и $N_1, N_2 \in \theta^\omega(G)$. Так как $\theta(G)$ – фильтр $\tau(G)$ и $N_1, N_2 \in \theta^\omega(G)$, то $N_1 \cap N_2 \in \theta^\omega(G)$. Пусть $K/N_1 \cap N_2 \in \tau^\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Установим, что $K/N_1 \cap N_2 \in \theta^\omega(G/N_1 \cap N_2)$.

Так как $K/N_1 \cap N_2 \in \tau^\omega(G/N_1 \cap N_2)$, то, по определению ω -регулярного подгруппового функтора, $K \in \tau^\omega(G)$. Из того, что $K \in \tau^\omega(G)$, $N_1 \cap N_2 \in \theta^\omega(G)$, $N_1 \cap N_2 \subseteq K$, по определению τ -фильтрующего подгруппового функтора, следует, что $K \in \theta^\omega(G)$. Следуя определению ω -регулярного подгруппового функтора, получаем $K/N_1 \cap N_2 \in \theta^\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Таким образом, $\tau^\omega(G/N_1 \cap N_2) \subseteq \theta^\omega(G/N_1 \cap N_2)$.

Тем самым установлено, что $\tau^\omega(G/N_1 \cap N_2) = \theta^\omega(G/N_1 \cap N_2)$, и поэтому $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Таким образом, класс групп $\mathfrak{F}$ является R_0^ω -замкнутым. Теорема доказана.

Следствие 1 [2]. Пусть τ – такой регулярный решеточный подгрупповой функтор, что $S_n(G) \subseteq \tau(G)$ для любой группы G . Тогда для любого регулярного τ -фильтрующего подгруппового функтора θ класс групп $\mathfrak{G}_\tau(\theta) = \{G \mid \theta(G) = \tau(G)\}$ является формацией.

Список литературы

1. Васина О.Ю. О связи ω -регулярных подгрупповых функторов с классами групп / О.Ю. Васина // Сборник статей международной научно-практической конференции «Наука и молодежь: актуальные вопросы современных научных исследований». – Пенза: МЦНС «Наука и просвещение», 2022. – С. 8-10.
2. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука. – 2003. – 254 с.
3. Скиба А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука. – 1997. – 240 с.
4. Сорокина В.Н. Свойства классов групп / В.Н. Сорокина, М.М. Сорокина // Международная научно-практическая конференция «Теоретические и прикладные аспекты естественно-научного образования в эпоху цифровизации». – Брянск: БГУ, 2025. – С. 111-114.

5. Сорокина М.М. Свойства класса групп $\mathfrak{G}_7^\omega$ / М.М. Сорокина, В.Н. Сорокина // Ученые записки Брянского государственного университета: естественные науки. – 2025. – № 3 (39). – С. 11-15.

Сведения об авторах

Сорокина Марина Михайловна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», e-mail: *mmsorokina@yandex.ru*.

Сорокина Валерия Николаевна – аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», e-mail: *lera.koshechkina.00@mail.ru*.

SOME PROPERTIES OF CLASSES OF GROUPS INDUCED BY SUBGROUP FUNCTORS

V.N. Sorokina, M.M. Sorokina

Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky

Only finite groups and classes of finite groups are considered. In the paper we study properties of classes of groups depending on the properties of the subgroup functors that define them.

Keywords: *group, finite group, class of groups, subgroup functor.*

References

1. Vasina O.Yu. On the Relationship between ω -Regular Subgroup Functors and Group Classes / O.Yu. Vasina // Collection of articles from the international scientific and practical conference "Science and Youth: Current Issues in Modern Scientific Research". – Penza: MCNS "Science and Education", 2022. – P. 8-10.
2. Kamornikov S.F., Sel'kin M.V. Subgroup Functors and Classes of Finite Groups / S.F. Kamornikov, M.V. Sel'kin. – Minsk: Belarusian Science. – 2003. – 254 p.
3. Skiba A.N. Algebra of Formations / A.N. Skiba. – Minsk: Belarusian Science. – 1997. – 240 p.
4. Sorokina V.N. Properties of Classes of Groups / V.N. Sorokina, M.M. Sorokina // International scientific and practical conference «Theoretical and applied aspects of natural science education in the era of digitalization». – Bryansk: BSU, 2025. – P. 111-114.
5. Sorokina M.M. Properties of the Class of Groups $\mathfrak{G}_7^\omega$ / M.M. Sorokina, V.N. Sorokina // Scientific Notes of The Bryansk State University: natural sciences. – 2025. – № 3 (39). – P. 11-15.

About authors

Sorokina M. M. – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: *mmsorokina@yandex.ru*.

Sorokina V. N. – Postgraduate Student of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: *lera.koshechkina.00@mail.ru*.

ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 536.212, 536.2.023

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЛЕГИРОВАННОГО ЖЕЛЕЗА

А.А. Кушнерёва

ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

В температурном интервале 50 – 300 К экспериментально определены значения коэффициента теплопроводности поликристаллического образца железа с добавками 0.31 масс. % меди, 0.15 % стронция и 0.05 % свинца. Рассчитаны температурные зависимости коэффициента температуропроводности и средней длины свободного пробега фононов. В области температур 50 – 150 К теплопроводность оказалась значительно выше, чем у высокочистого отожженного железа.

Ключевые слова: железо, легирование, теплопроводность, температуропроводность температурная зависимость, фонон-дефектное рассеяние.

Введение

Металлы являются хорошими проводниками тепла. Это объясняется переносом тепловой энергии свободными электронами. В соответствии с законом Видемана-Франца, электронный вклад в теплопроводность пропорционален удельной электропроводности σ металла и температуре T : $k = \sigma L T$ [1]. В качестве постоянной Лоренца L для металлов принято значение $L \approx 2.47 \text{ Вт}/(\text{Ом} \cdot \text{K}^2)$. И в случае металлических образцов с малым содержанием примесей и структурных дефектов электронный вклад в теплоперенос в области комнатной температуры обычно на два порядка превосходит вклад решеточный (фононный). Однако, примесные ионы могут сильно отличаться по массо-размерным характеристикам и устройству электронных оболочек от основных ионов металла, вследствие чего наличие примесей даже в малых количествах может значительным образом повлиять на электро-, а значит, и на теплопроводность металла.

С учетом данных предположений целью настоящей работы было экспериментальное исследование температурной зависимости теплопроводности металлического образца с малой электропроводностью. Объектом исследования был поликристаллический образец железа, содержащего в качестве легирующих добавок 0.31 масс. % Cu, 0.15 % Sr и 0.05 % Pb. Изготовитель данного материала не известен, образец для исследований предоставлен д. х. н., проф. П.П. Федоровым (Институт общей физики РАН им. А.М. Прохорова, г. Москва).

Эксперимент

На рис. 1 представлена фотография куска железа, из которого был вырезан образец в виде параллелепипеда с размерами $2.21 \times 4.75 \times 22 \text{ мм}$. При механической обработке он проявлял высокую твердость. Оценочные измерения удельной электропроводности материала в области комнатной температуры дали очень низкую величину $\sigma \approx 20 \text{ См}/\text{м}$ (по сравнению с чистым железом, у которого $\sigma = 10^7 \text{ См}/\text{м}$).

Теплопроводность в интервале температур 50 – 300 К были измерена абсолютным стационарным методом продольного теплового потока. Аппаратура и методика измерений подробно описаны в [2]. Отличие заключалось в отсутствии омического контакта спаев измерительных термопар и проводящего электрический ток образца. Расстояние между датчиками температуры на образце составляло $\Delta l = 11.8 \text{ мм}$. Погрешность определения коэффициента теплопроводности находилась в пределах $\pm 5 \%$.



Рис. 1. Фотография куска легированного железа

Экспериментальные результаты и их анализ

Результаты измерений теплопроводности в графическом виде $k(T)$ приведены на рис. 3. Для сравнения здесь же представлены справочные рекомендуемые значения для высокоочищенного отожженного железа [3].

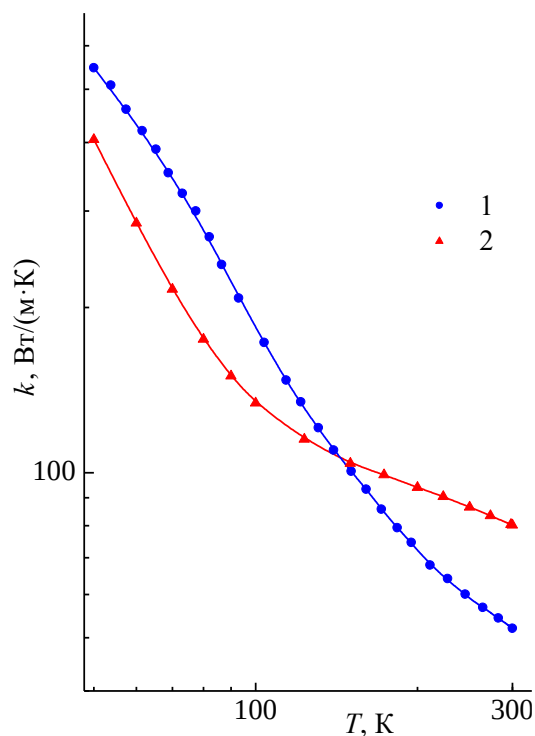


Рис. 2. Температурная зависимость теплопроводности железа легированного (1) и чистого (2)

Видно, что два сравниваемых графика $k(T)$ существенно различаются. В случае чистого железа наблюдается проявление возрастающего с ростом температуры электронного вклада в теплопроводность на фоне убывающей решеточной составляющей, что сказывается на замедлении убывания общей - измеряемой - теплопроводности. А кривая $k(T)$ для легированного железа демонстрирует типичный для диэлектрических (и полупроводниковых) кристаллических сред характер. Действительно, малость величины удельной электропроводности исследованного образца позволяет оценить электронный вклад в теплопроводность, как несущественный по сравнению с решеточной составляющей. При температуре $T=300$ К экспериментальная теплопроводность Fe:Cu, Sr, Pb составила величину $k = 52$ Вт/(м К), что закономерно значительно ниже теплопроводности чистого железа $k = 80.4$ Вт/(м К). Однако в

низкотемпературной области наблюдается обратная картина: теплопроводность допированного железа существенно выше, чем чистого (547 Вт/(м К) и 405 Вт/(м К) при $T = 50$ К, соответственно). Такое соотношение является нетривиальным.

Дело в том, что, в соответствии с законом Видемана-Франца, при низких температурах сравнению подлежит решеточная (фононная) теплопроводность двух образцов. Рассеяние фононов в поликристаллических материалах происходит внутри кристаллических зёрен и на межзёренных границах.

Очевидно, что при внесении примесей в решетку железа создаются центры фонон-дефектного рассеяния. Они обусловлены различиями масс и размеров замещающих Cu, Sr, Pb и замещаемых Fe атомов. Как видно из табл. 1, указанные различия весьма значительны. Некоторая неоднозначность сравнения размеров связана с тем, что железо в исследованном температурном интервале образует объемноцентрированную кубическую кристаллическую решетку (ОЦК), а медь, стронций и свинец – плотноупакованную гранецентрированную кубическую (ГЦК). Кроме того, возможны проявления различий электронных конфигураций примесных и матричных атомов. Любые отклонения от периодичности кристаллического поля являются причиной фонон-дефектного рассеяния и соответствующего понижения теплопроводности [4].

Таблица 1. Массы (ат.ед.) и радиусы (Å) атомов

Атом	масса	радиус
Fe	55.845	1.26
Cu	63.546	1.28
Sr	87.62	2.15
Pb	207.2	1.75

А интенсивность рассеяния фононов на межзеренных границах растет с уменьшением размеров зерен. Однако, отжиг чистого железа приводит к росту зерен, а наличие примесей, наоборот, ограничивает их размер. И рассеяние фононов на дефектах, как известно [5], наиболее существенно при низких температурах. При повышении температуры до комнатной доминирующими факторами становятся макроскопические характеристики, такие, как плотность, скорость звука и др., которые в случае малых содержаний примесей и изменяются, соответственно, слабо.

Таким образом, приведенные обстоятельства предполагают обратное, по сравнению с полученными экспериментальными результатами, соотношение низкотемпературных теплопроводностей образцов чистого и допированного железа.

Для выявления значительности вклада ного рассеяния фононов на межзёренных границах необходимо оценить значения средней длины их свободного пробега $l(T)$. Эту величину можно определить из дебаевского выражения для теплопроводности

$$k = C v l / 3,$$

где C – теплоемкость единицы объема кристалла, v – средняя скорость распространения фононов (звука) [6]. Теплоемкость $C(T)$ единицы объема железа можно найти из данных [7] по теплоемкости удельной: $C = C_{\text{уд}} \times \rho$ ($\rho = 7.874$ г/см³ – плотность). Влияние примесей обычно носит аддитивный характер в отношении теплоемкости, поэтому, с учетом малых концентраций допантов, можно пренебречь этим влиянием. В качестве средней скорости звука также примем характеристику для чистого железа. Поликристаллический материала в макроскопическом масштабе является изотропным. Из данных для продольной скорости $v_l = 5950$ м/с и поперечной $v_t = 3240$ м/с [8] определим среднее значение v в соответствии с формульным выражением

$$\frac{3}{v^3} = \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}.$$

В результате получаем величину $v = 3614$ м/с.

Рассчитанный график температурной зависимости средней длины $l(T)$ пробега фононов в исследованном образце представлен на рис. 3. В области комнатной температуры величина l оказалась очень большой – около 123 ангстрем. И даже экстраполяция рассчитанных значений $l(T)$ в область температуры плавления T_m дает значения l , более чем на порядок превышающие параметр кристаллической ячейки железа (для низкотемпературной α -модификации и для δ -феррита он составляет около $a = 2.866$ ангстрем, для γ -железа (аустенита) – около $a = 3.6$ ангстрем). Полученные большие значения l не совсем характерны для диэлектрических соединений. Например, для фторидов минимальные значения l близки к параметрам элементарной ячейки или к среднему междоузельному расстоянию (см., например, [9–10]). По-видимому, полученная относительно большая величина l связана с простотой химического состава кристалла, высокой симметрией кристаллической решетки и жесткостью межатомных связей.

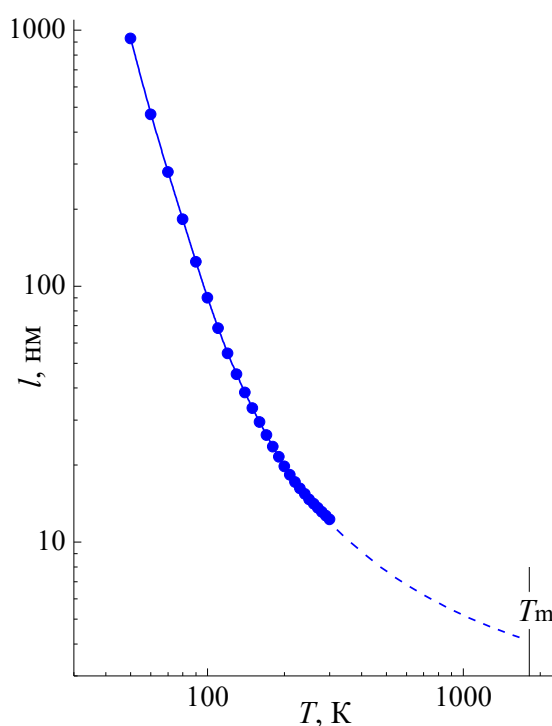


Рис. 3. Температурная зависимость средней длины свободного пробега фононов в образце легированного железа

Если теплопроводность в исследованном температурном интервале изменяется на один порядок, то диапазон изменений величины $l(T)$ гораздо больший. Это объясняется тем, что $l(T)$ находится делением убывающей с ростом температуры теплопроводности на возрастающую теплоемкость. Определенная для самой низкой исследованной температуры $T = 50$ К средняя длина свободного пробега фононов составила около $l = 0.93$ мкм. Несмотря на такие большие размеры, очевидно, они значительно меньше доминирующих размеров кристаллитов в исследованном материале. Крутой рост кривой $l(T)$ и отсутствие признаков его снижения при понижении температуры также свидетельствуют об относительной малости значений l и их удаленности от средних размеров зёрен. Поэтому основной вклад в тепловое сопротивление в исследованном материале следует, по-видимому, отнести ко внутризёренным процессам.

Кроме коэффициента теплопроводности, важным физическим параметром, определяющим скорость протекания тепловых процессов в материале, является коэффициент

температуропроводности a_t . Он связан с теплопроводностью k и средней длиной свободного пробега фононов l :

$$a_t = k/C = vl/3).$$

Поскольку скорость звука слабо зависит от температуры, характеры температурного поведения $a_t(T)$ и $l(T)$ практически идентичны. По абсолютной величине рассчитанный коэффициент a_t изменяется от 1.12×10^3 мм²/с ($T = 50$ К) до 14.8 мм²/с ($T = 300$ К).

Заключение

Таким образом, внесение примесей в железо обусловило как малую величину электропроводности, так и типичный для диэлектрических и полупроводниковых сред характер температурной зависимости теплопроводности. Неясным остается причина более высокой теплопроводности по отношению к чистому железу. Предположительно, она связана с особенностью температурной зависимости фонон-электронного взаимодействия в исследованном материале.

Работа выполнена под руководством профессора кафедры экспериментальной и теоретической физики Попова П.А.

Список литературы

1. Franz R., Wiedemann G. Ueber die Wärme-Leitungsfähigkeit der Metalle // *Annalen der Physik.* – 1853. – V. 165. – S. 497-531. – doi:10.1002/andp.18531650802
2. Попов П.А. Теплопроводность лазерных кристаллов со структурой граната в интервале температур 6 – 300 К: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1993. – 214 с.
3. Теплопроводность твердых тел: справочник под ред. А.С. Охотина. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 320 с.
4. Федоров П.П., Попов П.А. Принцип эквивалентности источников беспорядка и теплопроводность твердых тел // *Наносистемы: физика, химия, математика.* – 2013. – Т. 4. – № 1. – С. 148-159.
5. Klemens P. G. Thermal Conductivity and Lattice Vibrational Modes // *Solid State Physics.* Vol. 7 / ed. by F. Seitz, D. Turnbull. – New York: Academic Press, Inc., 1958. – P. 1–98.
6. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М.: Мир, 1979. – 286 с.
7. Таблицы физических величин. Справочник под ред. акад. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат. 1976. – 1008 с.
8. <https://dpva.ru/Guide/GuidePhysics/Sound/SolidsSoundSpeed/>
9. Karimov D., Buchinskaya I., Arkharova N., Prosekov P., Grebenev V., Sorokin N., Glushkova T., Popov P. Growth from melt and properties investigation of ScF₃ single crystals // *Crystals.* – 2019. – V. 9. – № 7. – P. 371. – <https://doi.org/10.3390/cryst9070371>.
10. Попов П.А., Федоров П.П., Теплопроводность фторидных оптических материалов. – Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2012. – 210 с.

Сведения об авторе

Кушнерёва Алена Андреевна – студентка магистратуры Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: alenazen01@mail.ru.

THERMAL CONDUCTIVITY STUDY OF ALLOYED IRON

A.A. Kushnereva

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

The thermal conductivity of a polycrystalline iron sample doped with 0.31 wt. % copper, 0.15 % strontium, and 0.05 % lead was experimentally determined in the temperature range of 50 – 300 K. The temperature

dependences of the thermal diffusivity and the mean free path of phonons were calculated. In the temperature range of 50 – 150 K, the thermal conductivity was significantly higher than that of high-purity annealed iron.

Keywords: iron, alloying, thermal conductivity, thermal diffusivity, temperature dependence, phonon-defect scatterin.

References

1. Franz R., Wiedemann G. Ueber die Wärme-Leitungsfähigkeit der Metalle // *Annalen der Physik.* – 1853. – V. 165. – S. 497-531. – doi:10.1002/andp.18531650802
2. Popov P.A. Thermal conductivity of laser crystals with garnet structure in the temperature range of 6 – 300 K: diss. ... cand. phys. and mathematics. – Moscow, 1993. – 214 p.
3. Thermal conductivity of solids: Handbook edited by A.S. Okhotin. – Moscow: Energo-Atomizdat, 1984. – 320 p.
4. Fedorov P.P., Popov P.A. Principle of equivalency of the disorder sources and heat conductivity of solids // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics.* – 2013. – V.4. – № 1. – P 148-159.
5. Klemens P.G. Thermal Conductivity and Lattice Vibrational Modes / ed. by F. Seitz, D. Turnbull // *Solid State Physics.* Vol. 7. – New York: Academic Press, Inc., 1958. – P. 1–98.
6. Berman R. Thermal Conduction in Solids. Clarendon Press, Oxford. – 1976.
7. Tables of physical quantities. Handbook edited by Academician I.K. Kikoin. – Moscow: Atomizdat Publishing House. – 1976. – 1008 p.
8. <https://dpva.ru/Guide/GuidePhysics/Sound/SolidsSoundSpeed/>
9. Karimov D., Buchinskaya I., Arkharova N., Prosekov P., Grebenev V., Sorokin N., Glushkova T., Popov P. Growth from melt and properties investigation of ScF₃ single crystals // *Crystals.* – 2019. – V. 9. – № 7. – P. 371. – <https://doi.org/10.3390/cryst9070371>
10. Popov P.A., Fedorov P.P. Thermal conductivity of fluoride optical materials». – Bryansk: Desyatochka Group of Companies, 2012. – 210 p.

About author

Kushnereva A.A. – master's student of the Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: alenazen01@mail.ru .

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 619 611.24

**МАКРОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПОДЖЕЛУДОЧНОЙ ЖЕЛЕЗЫ
У БЕЛЫХ КРЫС ЛИНИИ WISTAR ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ
БИОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ДОБАВОК****Д.А. Артемов**

ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

В статье представлены результаты исследования макроскопических параметров поджелудочной железы у белых крыс серии Wistar при использовании биологически активных добавок. В эксперименте использовались препараты «Ковелос Орегано» и «Ковелос олеомикс жидкий», изготовленные научно-производственным предприятием ООО Экокремний Брянской области. Полученные морфологические промеры сравнивались с контрольной группой.

Ключевые слова: поджелудочная железа, белые крысы, линия Wistar, «Ковелос», «Ковелос Орегано», «Ковелос олеомикс жидкий», Экокремний, макроморфология, органы, измерения.

Жизнеспособность молодняка и повышение продуктивности сельскохозяйственных животных происходит за счет повышения ее естественной резистентности, устойчивости к стрессам, и быстрого усвоения корма и качественных ветпрепаратов и биологически активных добавок [1, 3]. В этой связи поиск и изучение природных корректоров метаболизма среди природных материалов весьма целесообразен, поскольку многие из них оказывают влияние на сохранение структурного, функционального, биохимического гомеостаза, чего нельзя сказать о синтетических медикаментах [5, 7].

Научно-производственным предприятием ООО Экокремний Брянской области, разработана энергетическая добавка «Ковелос». В состав «Ковелос» входит диоксид кремния аморфный, пропиленгликоль, пищевой глицерин и витамин Е [2, 6].

«Ковелос – Орегано» (сухая и жидкая форма) для всех видов сельскохозяйственных животных и птицы эффективная добавка нового поколения на основе натурального эфирного масла орегано. Обладает оздоравливающим действием на кишечник, стимулирует выделение и активацию ферментов ЖКТ (щелочной фосфатазы, аминопептидазы, сахаразы, лактазы, мальтазы), стимулирует иммунитет животных. Обладает антиоксидантными свойствами.

«Ковелос – Олеомикс жидкий»- натуральный продукт, основанный на эфирных маслах. Содержит в 1 литре: эвкалиптовое масло (14-17%), масло тимьяна (4,5-8%), масло перечной мяты (4-6%), анисовое масло (6-8%), эмульгатор (51,5%), вода очищенная (до 100%) [2, 4].

Исследование проводилось на базе научно-исследовательских лабораторий кафедры биологии естественно-географического факультета ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского». Исследование по влиянию биологически активных добавок (БАД) «Ковелос Орегано» и «Ковелос Олеомикс жидкий» было выполнено на клинически здоровых белых половозрелых крысах линии Wistar.

Объектом исследования послужили белые половозрелые крысы линии Wistar (n=48) массой тела 200-250 г. из лаборатории экспериментальных животных биопитомника ООО «СМК СТЕЗАР», г. Владимир.

Животных до начала экспериментов адаптировали в течение 1-ой недели. На протяжении всего срока адаптации, а также в период проведения экспериментов, животные

содержались группами по 4 особи в общих клетках со свободным доступом к пище и воде при комнатной температуре воздуха (18–22 °С) и естественном освещении.

Для проведения опыта, было сформировано три группы по 16 особей: 2 опытные – получавшие БАД «Ковелос Орегано» и БАД «Ковелос Олеомикс», и контрольная группа – находившаяся на основном рационе.

После окончания периода адаптации крысы всех групп получали основной рацион в течении 10 суток. С 18-го дня эксперимента в рацион первой опытной группы была добавлена биологически активная добавка «Ковелос Орегано», второй опытной группы «Ковелос Олеомикс жидкий».

Крысам (самкам и самцам) линии Wistar массой 200±50 г первой опытной группы один раз в сутки между 11 и 12 часами перорально вводили раствор водной взвеси БАД «Ковелос Орегано» в дозе 0,7 мг/кг.

Крысам (самкам и самцам) линии Wistar массой 200±50 г второй опытной группы один раз в сутки 11 и 12 часами перорально вводили БАД «Ковелос Олеомикс жидкий» в дозе 0,7 мг/кг.

Для изучения влияния БАД «Ковелос Орегано» и «Ковелос Олеомикс жидкий» на строение поджелудочной железы у белых крыс серии Wistar, был проведен комплекс анатомических, макроморфометрических и статистических методов исследования.

Абсолютную массу поджелудочной железы определяли сразу же после вскрытия, так как по данным Г.А. Меркулова (1969) и R. Kanerva (1983) фиксация вызывает значительные изменения массы нормальных органов. Взвешивание производили на электрических весах ВЛКТ-500М (ГОСТ 241-04-80) с точностью до 0,01 г. [2].

Были определены линейные размеры поджелудочной железы. Длину, ширину, толщину измеряли при помощи линейки с ценой деления 1 мм. При изучении анатомического строения поджелудочной железы у белых крыс серии Wistar определяли абсолютную массу (г), длину (см), ширину (см).

Установлено, что макроскопически у взрослой белой крысы поджелудочная железа располагается между листками большого сальника в глубине брюшной полости на уровне тел краниальных поясничных позвонков (L1-L2), занимает поперечное положение между 12-перстной кишкой (справа) и селезенкой (слева). Ее длина колеблется от 26 до 34 мм (29,4±1,1 мм), масса у самцов составляет от 0,9 до 1,1 г (0,96±0,03 г), у самок - от 0,9 до 1,2 г (1,03±0,05 г). Результаты макроморфологических промеров поджелудочной железы белых крыс представлены в таблицах 1-4.

Таблица 1. Макрометрические показатели поджелудочной железы белых крыс при 10-ти кратном введении БАД «Ковелос Орегано» и «Ковелос олеомикс жидкий»

Вариант эксперимента	Масса, г	Длина, мм	Ширина, мм
Контроль	1,1±0,1	30,2±1,3	7,6±0,3
Первая опытная группа	0,9±0,1	34,9±1,4	8,2±0,3
Вторая опытная группа	1,2±0,2	29,1±1,1	7,4±0,3

Таблица 2. Макрометрические показатели поджелудочной железы белых крыс при 20-ти кратном введении БАД «Ковелос Орегано» и «Ковелос олеомикс жидкий»

Вариант эксперимента	Абсолютная масса, г	Длина, мм	Ширина, мм
Контроль	0,9±0,1	30,5±1,4	6,0±0,2
Первая опытная группа	1,0±0,1	27,2±1,2	9,4±0,3
Вторая опытная группа	0,9±0,1	25,8±1,1	8,8±0,3

Таблица 3. Макрометрические показатели поджелудочной железы белых крыс при 30-ти кратном введении БАД «Ковелос Орегано» и «Ковелос олеомикс жидкий»

Вариант эксперимента	Абсолютная масса, г	Длина, мм	Ширина, мм
Контроль	1,0±0,1	26,3±1,1	7,5±0,3
Первая опытная группа	0,9±0,1	28,0±1,2	9,1±0,4
Вторая опытная группа	1,1±0,1	27,9±1,2	7,3±0,3

Таблица 4. Макрометрические показатели поджелудочной железы белых крыс при 40-ка кратном введении БАД «Ковелос Орегано» и «Ковелос олеомикс жидкий»

Вариант эксперимента	Абсолютная масса, г	Длина, мм	Ширина, мм
Контроль	1,1±0,2	31,1±1,4	8,1±0,3
Первая опытная группа	0,9±0,1	27,8±1,3	8,3±0,3
Вторая опытная группа	1,0±0,1	33,4±1,4	9,5±0,4

Макроскопически орган имеет вид грозди, состоящей из большого числа уплощенных округлой, овальной, листовидной формы долек; их размеры колеблются от 0,8х2 до 4х6 мм.

По синтопии в поджелудочная железа можно условно выделить справа налево дуоденальную, желудочно-печеночную, селезеночную части.

При сравнении анатомии поджелудочной железы белой крысы и человека можно считать, что дуоденальная часть органа белой крысы соответствует головке, желудочно-печеночная - телу и селезеночная - хвосту поджелудочной железы человека.

При проведении морфометрического анализа образцов поджелудочной железы животных всех групп установлено, что площадь островковой части у крыс получающих БАД «Ковелос Орегано» и «Ковелос Олеомикс жидкий» не превышала аналогичные значения у белых крыс контрольной группы.

Список литературы

1. Зайцева Е.В., Тельцов Л.П., Харлан А.Л., Крикливый Н.Н., Щеглов Н.А. Критические периоды онтогенеза цыплят-бройлеров кросса "Ross-308" // Вестник Брянского государственного университета. – 2013. – № 4. – С. 91-96.
2. Князева А.С., Артемов Д.А., Сайфулин А.В., Харлан А.Л., Зайцева Е.В. Изменение массы тела белых крыс под влиянием кремнийсодержащих добавок // Ученые записки Брянского государственного университета. – 2025. – № 4 (40). – С. 23-27.
3. Новцева Е.Ю., Зайцева Е.В., Харлан А.Л. Морфологическая адаптация структур сердца и биохимических показателей крови у петушков цыплят-бройлеров кросса "Ross-308" при введении в основной рацион сорбента "Ковелос-Сорб" // Siberian Journal of Life Sciences and Agriculture. – 2022. – Т. 14, №2. – С. 11-35.
4. Овсепьян В.А., Юрина Н.А. Кормовая добавка на основе нанодисперсного кремнезема // Сборник научных трудов Краснодарского научного центра по зоотехнии и ветеринарии. – 2017. – №3. – С. 103-108.
5. Первушова М.Н., Первушова Н.Н., Лось С.Л. Морфология сердца и печени кур кросса "Хайсекс Браун" под влиянием препарата "Ковелос Сорб" // Ученые записки Брянского государственного университета. – 2017. – №4 (8). – С. 75-79.
6. Седнева Е.Ю. Динамика абсолютной и относительной массы сердца цыплят-бройлеров кросса "Ross-308" при добавлении к основному рациону питания сорбента «Ковелос-сорб» // Международный научно-исследовательский журнал. – 2021. – №8-2 (110). – С. 32-35.

7. Харлан А.Л., Епихова О.Г. Сравнительная характеристика гистоморфологии концевых протоков почек и железы третьего века бройлеров кросса "Смена-7" // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6. – С. 544.

Сведения об авторе

Артемов Денис Анатольевич – аспирант кафедры биологии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: *kafbot2002@mail.ru*.

MACROMETRIC PARAMETERS OF THE PANCREAS IN WHITE WISTAR RATS USING BIOLOGICALLY ACTIVE ADDITIVES

D.A. Artyomov

Bryansk State University named after Academician of I.G. Petrovsky

The article presents the results of a study of macroscopic parameters of the pancreas in white Wistar rats using biologically active additives. The experiment used the drugs «Covelos Oregano» and «Covelos oleomix liquid», manufactured by the scientific and production enterprise Ekokremniy Bryansk region. The obtained morphological measurements were compared with the control group.

Keywords: *pancreas, white rats, Wistar line, Covelos, Covelos Oregano and Covelos oleomix liquid, Ekokremniy, macromorphology, organs, measurements.*

References

1. Zaitseva E.V., Teltsov L.P., Kharlan A.L., Krikliiv N.N., Shcheglov N.A. Critical periods of ontogenesis of broiler chickens of the cross «Ross-308» // Bulletin of the Bryansk State University. – 2013. – No. 4. – P. 91-96.
2. Knyazeva A.S., Artyomov D.A., Saifulin A.V., Kharlan A.L., Zaitseva E.V. Body weight changes in white rats under the influence of silicon-containing additives // Scientific Notes of Bryansk State University. – 2025. – № 4 (40). – P. 23-27.
3. Novtseva E.Yu., Zaitseva E.V., Kharlan A.L. Morphological adaptation of heart structures and biochemical blood parameters in roosters of Ross-308 broiler chickens when introducing Covelos-Sorb sorbent into the main diet / Siberian Journal of Life Sciences and Agriculture. – 2022. – Vol. 14, No. 2. – P. 11-35.
4. Ovsepyan V.A., Yurina N.A. Feed additive based on nanodispersed silica // Collection of scientific papers of the Krasnodar Scientific Center for Animal Science and Veterinary Medicine. – 2017. – No. 3. – P. 103-108.
5. Pervushova M.N., Pervushova N.N., Los S.L. Morphology of the heart and liver of Hayesex Brown chickens under the influence of the drug Covelos Sorb // Scientific Notes of Bryansk State University. – 2017. – №4 (8). – P. 75-79.
6. Sedneva E.Yu. Dynamics of absolute and relative heart mass of broiler chickens of the Ross-308 cross when added to the basic diet of the Covelos-sorb sorbent // International Scientific Research Journal. – 2021. – No. 8-2 (110). – P. 32-35.
7. Kharlan A.L., Epikhova O.G. Comparative characteristics of the histomorphology of the terminal ducts of the kidneys and the gland of the third century of the Smena-7 cross broilers // Modern problems of science and education. – 2012. – No. 6. – P. 544.

About author

Artemov D.A. – postgraduate student, Department of Biology, I.G. Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: *kafbot2002@mail.ru*.

НАУКИ О ЗЕМЛЕ И ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

УДК 911.3

ОЦЕНКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗМЕЩЕНИЯ СТАНЦИЙ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО МЕТРОПОЛИТЕНА

Д.А. Виняев, А.Ф. Варфоломеев

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
имени Н.П. Огарева

В данной статье рассмотрено пространственное размещение станций Санкт-Петербургского метрополитена по составленному картографическому материалу. Созданные карты дают представление о точном расположении линий и станций метро в городе. Представлено описание объекта исследования, выявлены закономерности размещения станций метро, районов с полным отсутствием станций метро, определена доступность подземного транспорта для жителей города. В результате работы выявлены недостатки при распределении станций метро по городу, предложены пути их устранения. Определены перспективные участки строительства новых станций и линий метро в Санкт-Петербурге.

Ключевые слова: метро, подземный транспорт, Санкт-Петербург, картографический материал, доступность, линия, жилые районы.

Метро является самым быстрым городским транспортом, поэтому это средство передвижения пользуется большой популярностью среди жителей городов [2, 3]. Однако на практике строительство метро происходит не согласованно с застройкой жилых районов, что приводит к неравномерному расположению станций по территории города. Некоторые районы города имеют высокую доступность подземного транспорта, в то время как другие районы не имеют ни одной станции метро. В рамках данной работы было рассмотрено размещение станций Санкт-Петербургского метро с целью выявления пространственных закономерностей расположения линий и станций по территории города.

Санкт-Петербургское метро было открыто 15 ноября 1955 года. За время эксплуатации метро постоянно расширялось, строились новые станции и линии [1, 4, 6]. На март 2026 года метро насчитывает 75 станций, 8 пересадочных узлов, 6 линий с эксплуатационной длиной в 131 км. Схема расположения линий и размещения станций метро представлена на рисунке 1.

Как показано на рис.1 Санкт-Петербургское метро достаточно большое. Последним изменением в структуре подземного транспорта является открытие новой 6 линии, которая имеет 2 станции и в перспективе планируется её продление. Открытие новой станции «Горный институт» в конце 2024 года продлило 4 линию метро. В ближайшее время планируется открытие новой станции между станциями «Горный институт» и «Спасская». Недостатком схемы является то, что по ней невозможно определить закономерности расположения подземного транспорта в городе. Чтобы это сделать, необходимо создать картографический материал с точным расположением станций и линий в городе. В результате работы были созданы карты, показывающие точное расположение метро в городе. Картографический материал создавался в геоинформационной системе QGIS 2.18 [7]. Данная программа выбрана в связи с ее открытым доступом и возможностью работы с разными модулями, облегчающими построение карт.

Густота станций метро показана на рисунке 2 на тепловой карте (теплокарте). Теплокарта – это графическое представление данных, где индивидуальные значения отображаются при помощи цвета. Как видно из рисунка 2, границы города достаточно

протяженные, однако это связано с присоединением к городу пригородных территорий, в которых сосредоточена малая часть населения и строительство метро в таких районах нецелесообразно. Основная часть станций сосредоточена в центральной исторической части города, где проживает основная часть городского населения. Метро протягивается длинными линиями с одной части города в другую.



Рис. 1. Схема Санкт-Петербургского метро

Чтобы оценить доступность станций метро для жителей Санкт-Петербурга обратимся к рисунку 3, на котором показана доступность подземного транспорта в городе. На карте показаны жилые районы, в которых нет метро и доступность метро в радиусе 1 км. Вокзалы в городе расположены в непосредственной близости от метро, аэропорт удален от ближайших станций. Линии метро отсутствуют в некоторых северных районах современной жилой застройки. Полностью отсутствует метро в восточной части города. В юго-западном районе Санкт-Петербурга практически нет станций метро. В эти части города необходимо прокладывать линии метро. По карте видно, что крайняя северная станция первой линии выходит за пределы границ города. Небольшие жилые районы между линиями метро также находятся в непосредственном удалении от станций метро, однако площадь этих районов незначительна.

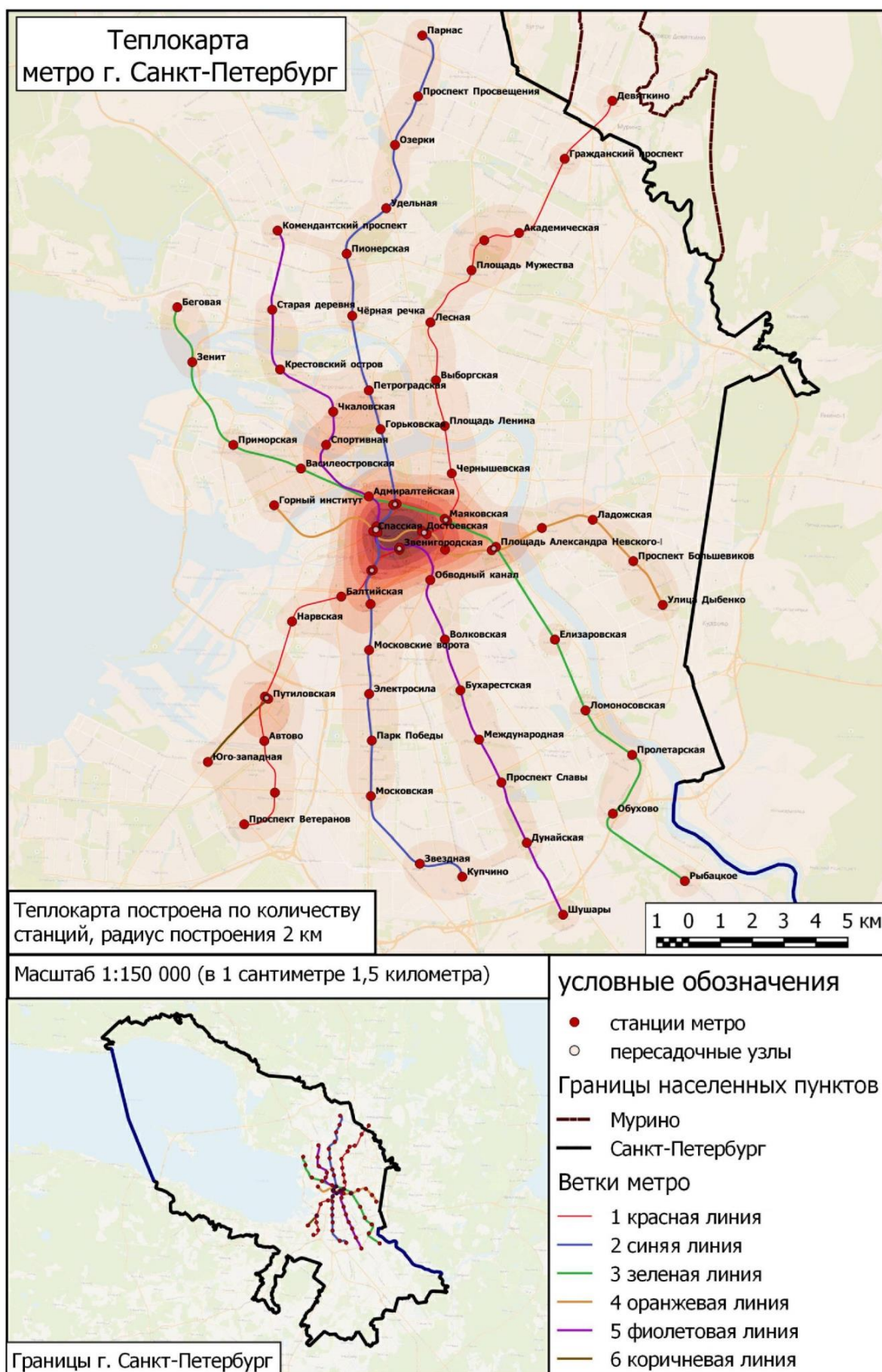


Рис. 2. Теплокарта Санкт-Петербургского метро с границами города

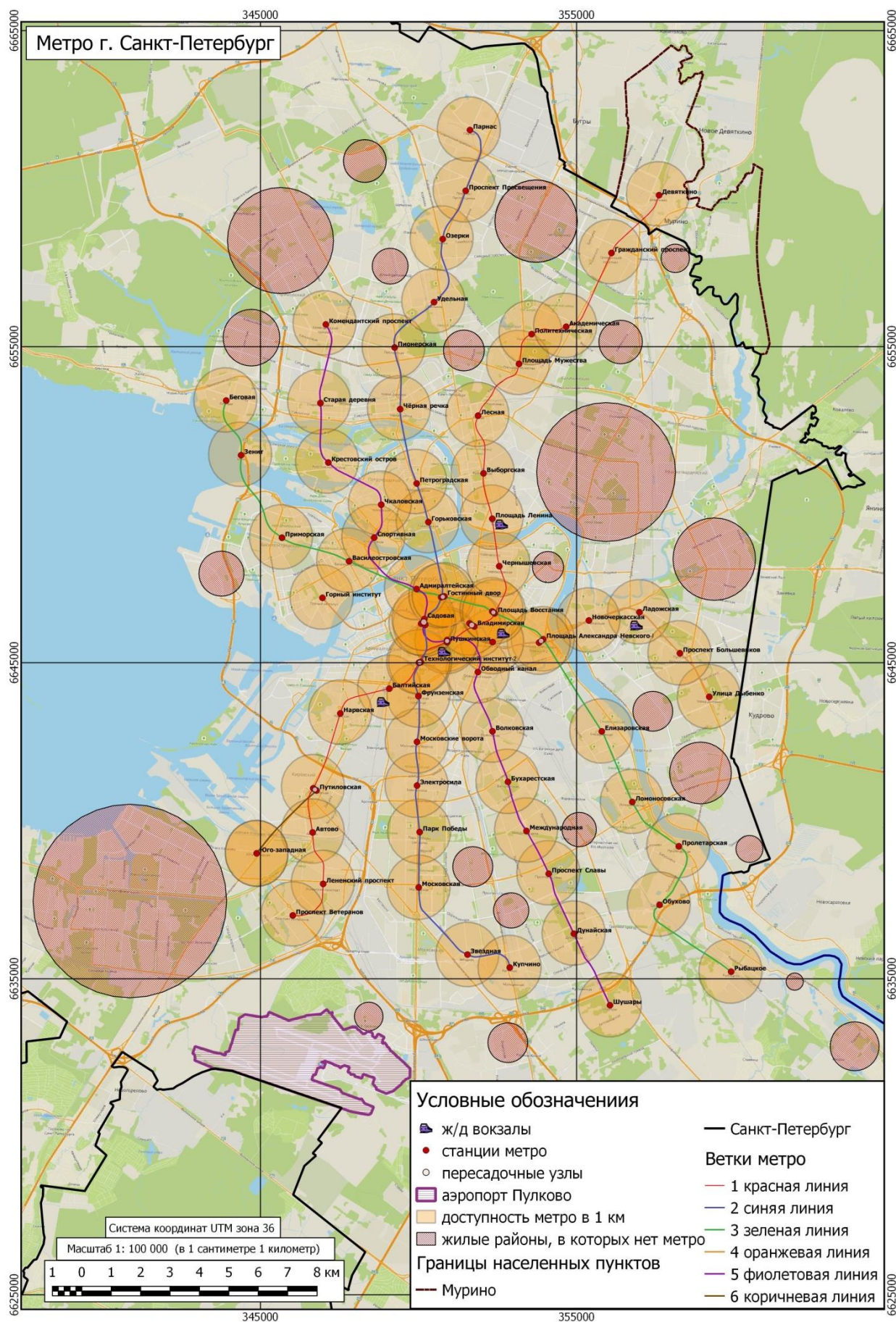


Рис. 3. Доступность метро Санкт-Петербурга

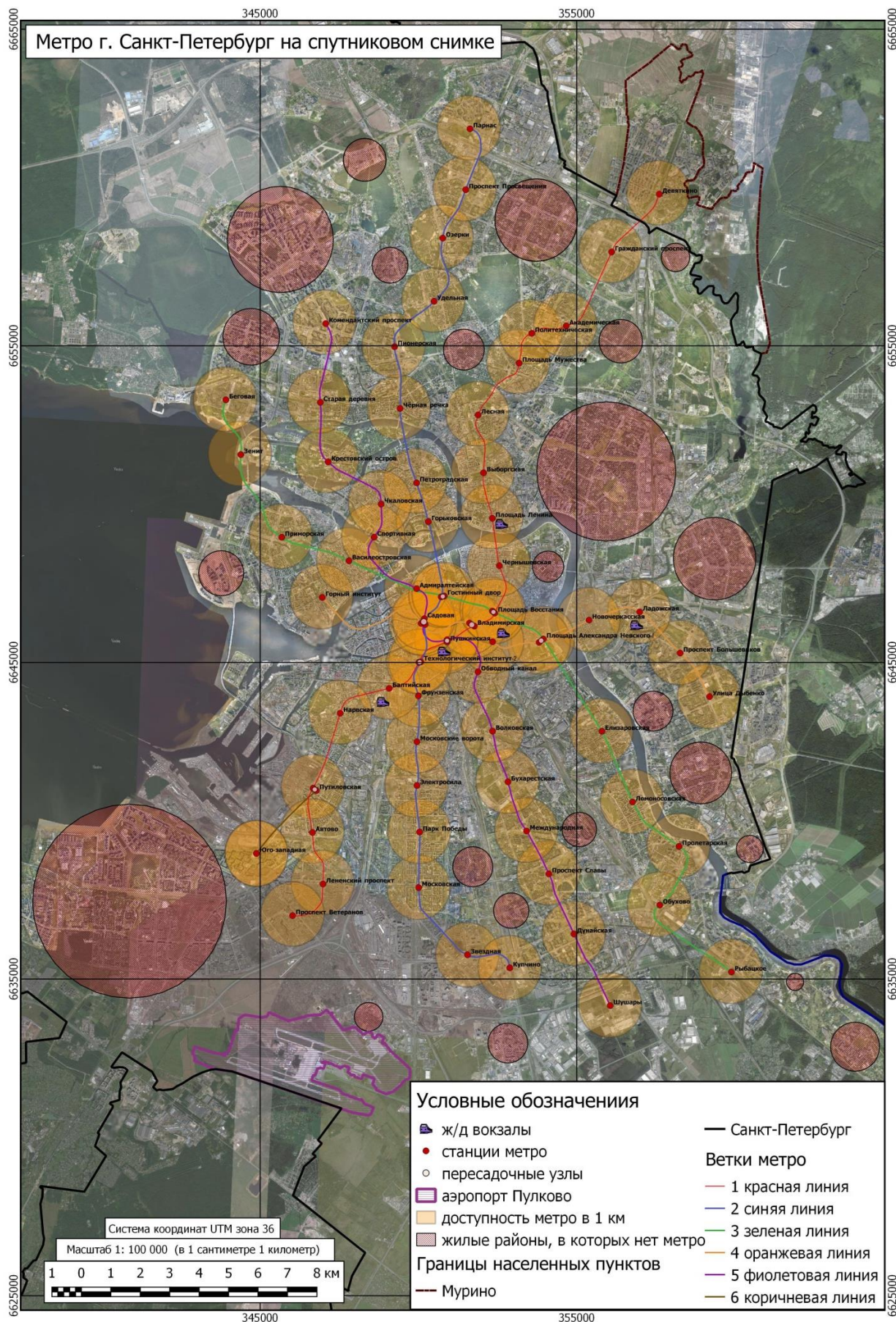


Рис. 4. Метро Санкт-Петербурга на спутниковом снимке

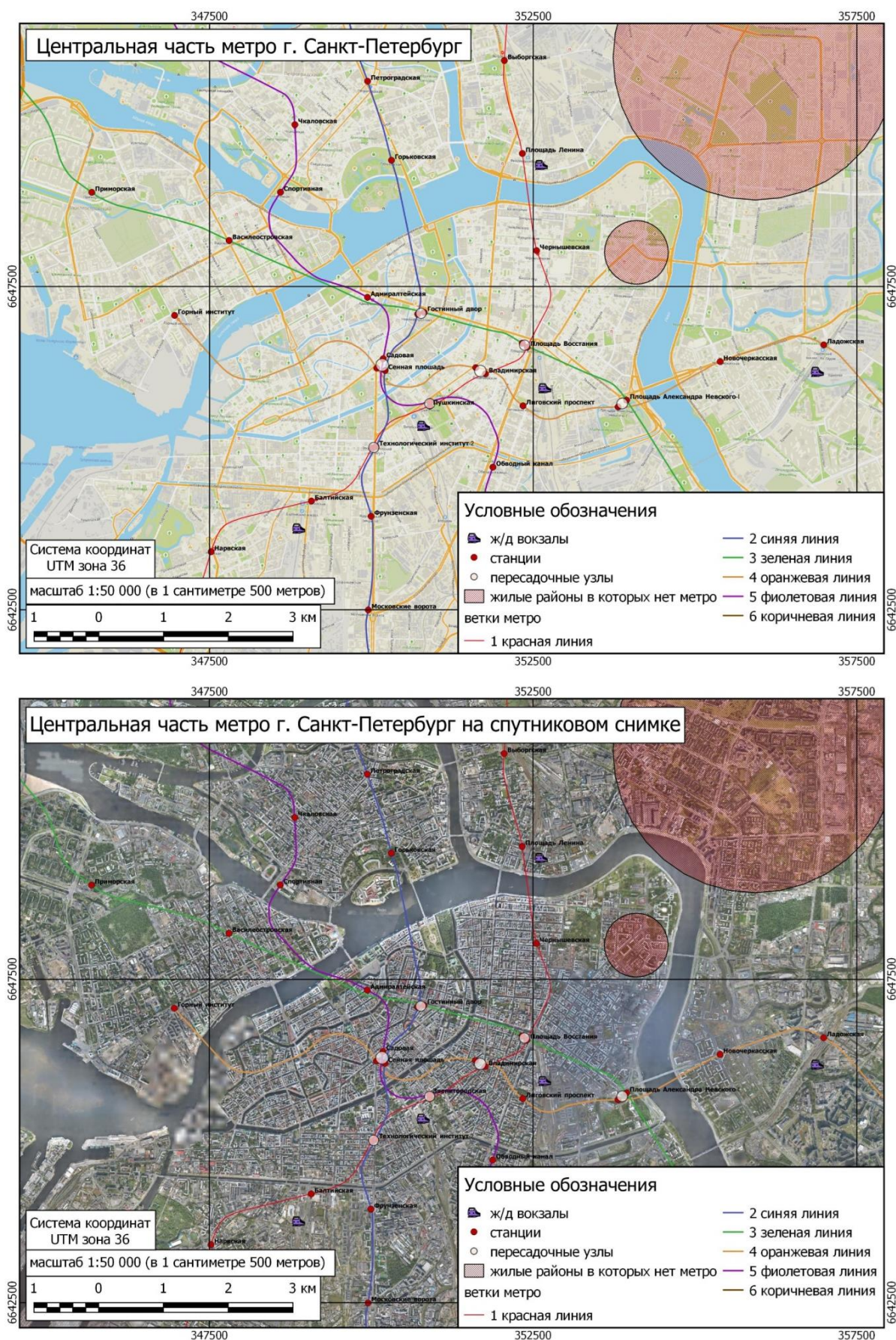


Рис. 5. Метро центральной части города Санкт-Петербург

Значительным недостатком Санкт-Петербургского метро является отсутствие кольцевой линии, как в Московском метрополитене. Для того, чтобы совершить переход с одной линии на другую, необходимо ехать до центральной части города, что увеличивает время пути и повышает нагрузку на станции метро. Другим негативным фактором является то, что жители вместо того, чтобы передвигаться подземным видом транспорта, пользуются наземным или личными автомобилями, что приводит к транспортной нагрузке в городе. В перспективах расширения Санкт-Петербургского метро продление существующих линий в районы с новой застройкой. В приоритете – продление третьей и пятой линий в северную часть города и продление первой и шестой линий в юго-западную часть города. Также в планах развития метро продление 6 линии на северо-восток, что поможет разгрузить южную часть метро и провести эту линию в восточную часть города, где совсем нет линий метро.

Таким образом, чтобы разгрузить центральную часть города, Санкт-Петербургскому метро необходима кольцевая линия и ряд полукольцевых линий на окраинах города. При проектировании метро также необходимо учитывать развитие городской инфраструктуры.

Для большей детализации состояния метро Санкт-Петербурга составлена карта метро по спутниковому снимку, показанная на рисунке 4. Спутниковый снимок даёт полное представление о городе, чем обычная карта, так как по нему можно определить объекты инфраструктуры жилых районов. На снимке просматриваются промышленные зоны, зеленые насаждения и т.д. Используя спутниковый снимок, можно определить наиболее перспективные районы для проживания в городе, построить оптимальный маршрут от местонахождения до пункта назначения, более подробно оценить состояние метро в городе [5, 8].

Что касается центральной исторической части города, то в ней доступность метро достаточно высокая (рис.5). В дальнейшем, открытие новой станции между станциями «Горный институт» и «Спасская» увеличит пропускную способность метро центральной части Санкт-Петербурга.

По результатам проделанной работы можно сделать вывод, что составленный картографический материал с точным расположением станций и линий метро, даёт полную и достоверную информацию о подземном транспорте в городе Санкт-Петербург. Данным материалом можно воспользоваться для получения более подробной информации о станциях и линиях метро в городе. Оценивая пространственное размещение линий и станций метро Санкт-Петербурга, можно говорить о том, что оно охватывает основную часть города, но для более эффективного использования подземного транспорта необходимо его дальнейшее развитие, планирование оптимального расположения линий и станций в городе. Наиболее важным является строительство кольцевой линии и продление существующих линий в жилые районы, где отсутствует доступность метро. Следует также отметить, что строительство метро в городе должно проходить согласованно с развитием жилых построек и инфраструктуры. Если учесть эти факторы, метро в Санкт-Петербурге может стать самым перспективным транспортом в городе.

Список литературы

1. Михайлюк М.А. Влияние метрополитена на социально-экономическое развитие территорий Санкт-Петербурга: история и перспективы развития системы петербургского метрополитена // VI Семеновские чтения: наследие П. П. Семенова-Тян-Шанского и современная наука: сб. науч. ст. по материалам Международной научной конференции, посвященной 190-летию со дня рождения П. П. Семенова-Тян-Шанского. – 2017. – С. 42-46.
2. Кусерова А.И., Сапожников Э.А. Туристские проекты в российских метрополитенах // Экономические исследования и разработки. – 2022. – № 7. – С. 6-15.
3. Гутников В. А. Развитие метрополитена в крупнейших агломерациях мира // Градостроительство. – 2016. – № 5 (45). – С. 57-72.

4. Амосов М.И., Сафина С.С. Развитие сети Санкт-Петербургского метрополитена за 60 лет и перспективы ее дальнейшего роста // Теория и практика сервиса: экономика, социальная сфера, технологии. – 2015. – № 3 (25). – С. 11-19.
5. Гольденберг Л.М. Трансформация городской среды в зоне влияния новых станций метрополитена в Санкт-Петербурге // Тихоокеанская география. – 2023. – № 4 (16). – С. 17-28.
6. Симоненко М.В. Реновация станций метро в Санкт-Петербурге // Тенденции развития науки и образования. – 2020. – № 61-7. – С. 66-72.
7. Лютая К. Э. Использование программы QGIS для создания географических карт в образовательном процессе // Проблемы развития социально-экономических систем: сб. науч. ст. по материалам VIII Международной научной конференции молодых учёных и студентов. – Донецк, 2024. – С. 156-158.
8. Максимов С.О. Влияние строительства станций метрополитена на ввод недвижимости на прилегающих территориях // Жилищное строительство. – 2020. – № 11. – С. 50-55.

Сведения об авторах

Варфоломеев Александр Федорович – кандидат географических наук, доцент кафедры геодезии картографии и геоинформатике Национального исследовательского Мордовского государственного университета имени Н.П. Огарева, e-mail: alex_varfol@mail.ru.

Виняев Дмитрий Алексеевич – магистрант кафедры физической и социально-экономической географии Национального исследовательского Мордовского государственного университета имени Н.П. Огарева, e-mail: vda1941@yandex.ru.

THE CURRENT STATE OF THE ST. PETERSBURG METRO

D.A. Vinyaev, A.F. Varfolomeev

Ogarev National Research Mordovian State University

This article examines the spatial arrangement of the stations of the St. Petersburg metro based on the compiled cartographic material. The created maps give an idea of the exact location of metro lines and stations in the city. The description of the research object is presented, patterns of placement of metro stations and areas with a complete absence of metro stations are revealed, and the availability of underground transport for city residents is determined. As a result of the work, shortcomings were identified in the distribution of metro stations across the city, and ways to eliminate them were proposed. Promising sites for the construction of new metro stations and lines in St. Petersburg have been identified.

Keywords: metro, underground transport, St. Petersburg, cartographic material, accessibility, line, residential areas.

References

1. Mikhailyuk M.A. The influence of the metro on the socio-economic development of the territories of St. Petersburg: the history and prospects of the development of the St. Petersburg metro system // VI Semenov readings: the legacy of P. P. Semenov-Tyan-Shan and modern science: collection of scientific articles based on the materials of the International Scientific Conference dedicated to the 190th anniversary of the birth of P. P. Semenov. P. Semenov-Tyan-Shansky, 2017, pp. 42-46.
2. Kuserova A.I., Sapozhnikov E.A. Tourist projects in Russian subways // Economic research and development. – 2022. – No. 7. – pp. 6-15.
3. Gutnikov V.A. The development of the subway in the largest agglomerations of the world // Urban planning. – 2016. – № 5 (45). – P. 57-72.

4. Amosov M.I., Safina S.S. Development of the St. Petersburg metro network over 60 years and prospects for its further growth // Theory and practice of the service: economics, social sphere, technology. – 2015. – № 3 (25). – P. 11-19.

5. Goldenberg L.M. Transformation of the urban environment in the zone of influence of new metro stations in St. Petersburg // Pacific Geography. – 2023. – № 4 (16). – Pp. 17-28.

6. Simonenko M.V. Renovation of metro stations in St. Petersburg // Trends in the development of science and education. – 2020. – No. 61-7. – P. 66-72.

7. Lyutaya K.E. The use of the QGIS program to create geographical maps in the educational process // Problems of the development of socio-economic systems: collection of scientific articles based on the materials of the VIII International Scientific Conference of Young Scientists and Students. – Donetsk, 2024. – P. 156-158.

8. Maksimov S.O. The impact of the construction of metro stations on the commissioning of real estate in adjacent territories // Housing construction. 2020. – No. 11. – P. 50-55.

About authors

Varfolomeev A.F. – Candidate of Geographical Sciences, Associate Professor of the Department of Geodesy, Cartography and Geoinformatics at the Ogarev National Research Mordovian State University, e-mail: alex_varfol@mail.ru.

Vinyaev D.A. – master's student at the Department of Physical and Socio-Economic Geography of the Ogarev National Research Mordovian State University, e-mail: vda1941@yandex.ru.

ПЕДАГОГИКА

УДК 372.891

**ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИИ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ
ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА
«ГЕОГРАФИЯ РОССИИ» В 9 КЛАССЕ****Б.В. Левшаков, Д.О. Тимохова, М.В. Долганова****ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»**

В статье рассматривается технология тестового контроля как инструмент педагогического контроля в школьном курсе географии. На основе анализа психолого-педагогической литературы и практического опыта проводится комплексное исследование дидактических возможностей, методических условий и ограничений применения тестовых форм проверки знаний и умений учащихся. Особое внимание уделяется специфике географического образования, включающей необходимость проверки картографической грамотности, пространственного мышления, умения работать с различными источниками информации и анализировать природно-хозяйственные взаимосвязи. В статье обосновывается эффективность комбинированного подхода, сочетающего традиционные и тестовые формы контроля, рассматривается классификация тестовых заданий по географии и анализируются результаты экспериментального применения тестовой технологии в практике школьного географического образования.

Ключевые слова: педагогическая технология, тестовый контроль, географическое образование, географические знания и умения, педагогическая диагностика, критерии оценивания, метапредметные и предметные результаты.

Современная система образования переживает период трансформации, связанный с переходом от знаниевой парадигмы к компетентностной. В этих условиях особую актуальность приобретает проблема объективной, надежной и эффективной оценки образовательных результатов. Традиционные формы контроля (устный опрос, письменные работы) зачастую не способны в полной мере отражать динамику формирования сложных умений и компетенций, а также страдают субъективизмом в оценивании. Технология тестового контроля, получившая широкое распространение в системе образования за последние десятилетия, предлагает альтернативный подход, основанный на стандартизации процедуры, математической обработке результатов и количественной интерпретации данных [2].

География как учебный предмет обладает специфическими характеристиками, которые должны учитываться при организации контроля. К ним относятся: необходимость проверки пространственного мышления и картографической грамотности; оценка умения анализировать причинно-следственные связи в системах «природа-население-хозяйство»; контроль навыков работы со статистическими материалами, графиками, диаграммами, космическими снимками; проверка знания географической номенклатуры. Все это делает вопрос выбора и разработки адекватных средств контроля особенно важным [8, 9].

Целью настоящей статьи является комплексный анализ эффективности использования тестовой технологии для контроля знаний и умений учащихся на уроках географии при изучении курса «География России», определение дидактических возможностей и ограничений данной технологии, а также разработка методических рекомендаций по ее оптимальному применению в школьной практике.

В педагогике тест определяется как стандартизированное задание, предназначенное для измерения уровня развития определенного психологического качества или оценки достижений в учебной деятельности. Ключевыми характеристиками педагогического теста

являются: стандартизация процедуры проведения, наличие нормативных данных для сравнения, определенные психометрические характеристики (надежность, валидность, дискриминативность) и количественный характер результатов.

С точки зрения психологии обучения, тестирование опирается на теорию деятельности (А.Н. Леонтьев) и теорию планомерно-поэтапного формирования умственных действий и понятий (П.Я. Гальперин). Тестовая задача представляет собой модель учебной ситуации, которая позволяет выявить степень сформированности определенных действий и операций. Согласно когнитивной психологии, тестирование позволяет оценить не только наличие знаний, но и структуру когнитивных схем, способы обработки информации, стратегии решения задач. Это особенно важно для географии, где формирование системного мышления является одной из ключевых целей обучения [4].

С дидактической точки зрения тестирование выполняет несколько функций: диагностическая – выявление уровня знаний, умений, пробелов в подготовке; обучающая – организация деятельности по применению знаний в новых ситуациях; развивающая – формирование навыков самоконтроля, логического мышления; воспитательная – развитие ответственности, организованности, объективной самооценки; прогностическая – определение возможностей дальнейшего обучения [2, 3].

Эффективность тестового контроля зависит от соблюдения ряда принципов: 1) принцип научности, требующий соответствия тестовых заданий современным научным представлениям, точности формулировок, корректности используемых данных; 2) принцип валидности, означающий, что тест измеряет именно те качества, для оценки которых он предназначен; 3) принцип надежности, характеризующийся устойчивостью результатов тестирования к случайным факторам, т.е. дает сопоставимые результаты при повторном проведении в аналогичных условиях; 4) принцип репрезентативности, предполагающий, что тест включает задания, адекватно отражающие все основные разделы учебной программы; 5) принцип дифференцирующей способности, означающий, что тест позволяет различать учащихся с разным уровнем подготовки и 6) принцип практической целесообразности, учитывающий временные затраты на проведение тестирования, простоту обработки результатов, доступность материалов [3].

Современное географическое образование ориентировано на формирование целостного географического образа мира, понимание основных закономерностей развития географической оболочки, взаимосвязей природы и общества. Контроль в географии должен оценивать не только знание фактов и понятий, но и сформированность ключевых компетенций: умение «читать» карты разного содержания, ориентироваться в пространстве, анализировать пространственные взаимосвязи; понимание закономерностей развития природных систем, оценка экологических ситуаций, прогнозирование последствий антропогенного воздействия; анализ территориальной организации общества, понимание географии мирового хозяйства, региональных различий в уровне развития [7].

Очень значимы информационные компетенции, а именно умение работать с различными источниками географической информации (картами, статистикой, текстами, космическими снимками), критически оценивать информацию, и практико-ориентированные компетенции – применение географических знаний для решения бытовых и профессиональных задач, ориентирования в повседневной жизни.

В школьной практике на уроках географии традиционно сложились и доминируют следующие формы контроля: устный опрос, позволяющий оценить глубину понимания материала, умение связно излагать мысли, вести дискуссию. Однако он отличается субъективностью, зависимостью от личных качеств ученика (коммуникативность, уверенность) и требует значительных временных затрат. Письменные работы (географические диктанты, описания, рефераты) развивают навыки письменной речи, систематизации материала, но проверка таких работ трудоемка, часто страдает необъективностью. Практические работы с картами, приборами, статистическими

материалами наиболее адекватны специфике географии, однако их организация сложна, а критерии оценивания часто размыты. Творческие проекты, позволяющие оценить умение применять знания в новых ситуациях, но слабо поддающиеся стандартизации.

В целом, основными ограничениями традиционных форм контроля являются: субъективизм оценки, неполный охват учебного материала, низкая оперативность получения результатов, трудности в сравнении достижений разных учащихся, высокая эмоциональная нагрузка на учащихся [1, 3].

Технология тестового контроля предлагает решения для многих проблем традиционного контроля. Объективность обеспечивается стандартизацией процедуры, однозначностью правильных ответов, возможностью машинной обработки. Полнота охвата достигается за счет включения заданий по всем разделам программы. Оперативность проявляется в быстрой проверке и возможности немедленного анализа результатов. Сравнимость результатов разных учащихся и разных образовательных учреждений. Дифференциация уровня подготовки за счет заданий различной сложности. И конечно, обеспечение психологического комфорта для учащихся, испытывающих страх перед устным ответом. Однако важно понимать, что тестирование не может полностью заменить традиционные формы контроля, а должно использоваться в комплексе с ними.

В классификация тестовых заданий по географии выделяют: по форме представления и типу ответа: задания закрытого типа (с выбором ответа), среди которых могут быть задания с единственным правильным ответом, с множественным выбором (несколько правильных вариантов), на установление соответствия и на установление правильной последовательности; задания открытого типа (со свободно конструируемым ответом), в том числе с кратким ответом (слово, число) или с развернутым ответом (объяснение, описание, решение задачи); задания на дополнение (с конструируемым ответом в заданной форме) с пропущенными словами в тексте и с незаконченными схемами, диаграммами. Так же могут использоваться комплексные задания на основе работы с разными источниками географической информации (анализ текста географического содержания, работа со статистическими таблицами, интерпретация графиков и диаграмм, анализ карт, планов местности, космических снимков) [7, 8, 9].

По проверяемым умениям и видам учебной деятельности тестовые задания дифференцируются на: задания на узнавание и воспроизведение (репродуктивный уровень) (узнавание географических объектов на карте, воспроизведение определений, фактов, номенклатуры); задания на понимание и применение (продуктивный уровень) (объяснение причинно-следственных связей, применение знаний в типовых ситуациях, анализ конкретных географических ситуаций); задания на анализ, синтез и оценку (творческий уровень) (сравнение географических объектов и явлений, прогнозирование развития ситуаций, оценка географических явлений с разных позиций, решение проблемных задач). Так же тестовые задания можно классифицировать по содержательному компоненту географического образования: задания по физической географии, социально-экономической географии, региональной географии.

Ряд авторов выделяют и специфические формы тестовых заданий по географии. Например, картографические тесты – задания, непосредственно связанные с работой с картой (определение объектов по координатам, определение направлений, расстояний, анализ картографических рисунков, сопоставление карт разного содержания), задания «географический диктант», направленных на проверку знания номенклатуры (например, подписи на контурной карте, определение объектов по описанию); географические задачи и кейс-задания на основе реальных географических ситуаций (анализ экологических проблем, планирование территориального развития, оценка экономических проектов) [2, 5].

Методика разработки и применения тестов по географии включает несколько этапов: 1) определение целей тестирования; 2) анализ содержания учебного материала; 3) конструирование тестовых заданий; 4) экспертиза и апробация, включающий

содержательную (соответствие программе, научная корректность) и методическую экспертизы (соответствие возрастным особенностям) и статистическую апробацию (определение трудности, дискриминативности); 5) стандартизация и оформление (определение временных нормативов, разработка бланков ответов и составление руководства по проведению) [2, 3].

Критериями качества тестовых заданий служат: содержательные критерии, включающие соответствие программе и целям обучения, научная достоверность информации, актуальность содержания и практическая значимость; методические критерии – однозначность формулировок, отсутствие двусмысленностей и подсказок, адекватность формы заданий проверяемому содержанию и соответствие возрастным возможностям учащихся; психометрические критерии – индекс трудности (оптимально 0,4-0,6 для большинства заданий), индекс дискриминации (способность дифференцировать сильных и слабых учащихся), надежность (стабильность результатов) и валидность (соответствие целям измерения); эргономические критерии – четкость оформления, удобство для восприятия и рациональное использование рабочего пространства бланка тестового листа.

Компьютерные технологии расширяют возможности тестового контроля. Они добавляют интерактивность, т.е. возможность имитации географических процессов, динамического изменения карт; мультимедийность – включение видеофрагментов, анимации, звуковых сопровождений и адаптивность – подбор заданий в зависимости от ответов ученика. Так же возможна непосредственная работа с картами – интерактивное выполнение заданий на цифровых картах. Преимуществом является автоматизация проверки и анализа результатов. Однако компьютерное тестирование требует специального оборудования, цифровых компетенций учителя и учеников, защиты от технических сбоев.

Для проверки гипотезы о эффективности технологии тестового контроля в географическом образовании было проведено экспериментальное исследование в 2026 году на базе 2-х общеобразовательных школ г. Брянска. В исследовании участвовали 150 учащихся 9 класса. Методы исследования: педагогический эксперимент (контрольные и экспериментальные группы), наблюдение за учебным процессом, опрос учителей и анкетирование учащихся, анализ учебной документации и статистическая обработка результатов.

В экспериментальных группах проводился текущий контроль – короткие (10 минут) тесты по следующим 10 темам уроков «Европейский Север России: географическое положение, особенности природно-ресурсного потенциала, населения и хозяйства», «Северо-Запад России: географическое положение, особенности природно-ресурсного потенциала, населения и хозяйства», «Центральная Россия: географическое положение, особенности природно-ресурсного потенциала, населения и хозяйства» и «Поволжье: географическое положение, особенности природно-ресурсного потенциала, населения и хозяйства». Тесты включали 10 заданий разного типа: 2 тестовых задания закрытого типа, 2 – на установление соответствия и на установление правильной последовательности; 2 – открытого типа, в том числе с кратким ответом и с развернутым ответом; 2 – на дополнение с пропущенными словами в тексте и с незаконченными схемами, диаграммами. Так же использовались 2 комплексных задания на основе работы с разными источниками географической информации (работа со статистическими таблицами, интерпретация графиков и диаграмм, анализ карт). Особенностью эксперимента было сочетание тестовых и традиционных форм. После каждого тестирования проводился анализ ошибок.

Результаты эксперимента показали, что в экспериментальных группах средний балл за итоговые работы вырос на 15% по сравнению с контрольными группами, качество знаний (доля учащихся с оценками «4» и «5») увеличилось с 45% до 65%. Наиболее значительный прогресс наблюдался в выполнении заданий на работу с картами и анализ статистических данных. Снизилась доля учащихся, не освоивших минимальный необходимый уровень (с 18% до 8%). 80% учащихся экспериментальных групп отметили, что тестовый контроль

вызывает меньше стресса, чем устный опрос, 65% считают, что тесты помогают лучше понять свои слабые стороны, 70% респондентов оценили тестовую систему как более объективную. Характерна положительная динамика сформированности умений: работа с географическими картами – рост на 30%, анализ статистических данных – рост на 22%, установление причинно-следственных связей – рост на 15%, умение решать географические задачи – рост на 25%.

Несмотря на положительные результаты, были выявлены методические проблемы: трудность разработки заданий высокого когнитивного уровня, ограниченность тестов в оценке творческих способностей и сложность проверки умения устно излагать географическую информацию. Среди психологических проблем можно назвать, то, что у части учащихся сформировалась стратегия угадывания ответов, снизилась практика публичных выступлений и у некоторых учеников проявилась «тестовая усталость».

На основе проведенного исследования были сформулированы следующие условия эффективного использования тестовой технологии: тестовый контроль должен сочетаться с традиционными формами, дополняя их, а не заменяя их полностью; нужно использовать задания разного уровня сложности в зависимости от целей контроля и подготовленности учащихся; обязателен анализ результатов тестирования, но совместно с учащимися, разбор типичных ошибок.

Очень важно соблюдать принцип систематичности, т.е. регулярное проведение тестирования для отслеживания динамики развития учащихся. Эффективность повышается через включение в тесты заданий, требующих не только воспроизведения, но и применения знаний в новых ситуациях.

Актуальна разработка и использование компетентностно-ориентированных тестов, которые проверяют сформированность ключевых компетенций, включают межпредметные задания и задания на основе реальных жизненных ситуаций.

Проведенное исследование подтверждает гипотезу об эффективности тестовой технологии для контроля знаний и умений на уроках географии при условии ее грамотного использования в комплексе с традиционными формами оценивания. Тестовый контроль позволяет объективно и оперативно оценивать учебные достижения, охватывать широкий спектр содержания, дифференцировать уровень подготовки учащихся.

Специфика географического образования требует особого внимания к разработке заданий, проверяющих картографическую грамотность, пространственное мышление, умение работать с различными источниками информации, анализировать природно-хозяйственные взаимосвязи. Наиболее эффективными являются комплексные тесты, сочетающие задания разных типов и уровней сложности.

Экспериментальное исследование показало, что систематическое использование тестового контроля способствует повышению качества географического образования, развивает навыки самоконтроля у учащихся, экономит время учителя на проверку работ. При этом важно избегать крайностей – нельзя сводить весь контроль исключительно к тестированию, необходимо сохранять устные формы работы, практические занятия, творческие проекты.

Перспективными направлениями развития тестового контроля в географическом образовании являются цифровизация, создание компетентностно-ориентированных заданий, развитие формирующего оценивания, учет особенностей разных категорий учащихся. Реализация этих направлений требует совершенствования подготовки учителей географии в области педагогических измерений, развития учебно-методической базы, создания единого банка качественных тестовых материалов.

Таким образом, тестовая технология представляет собой мощный инструмент повышения эффективности образовательного процесса по географии, который при разумном использовании способствует достижению современных образовательных результатов, соответствующих требованиям ФГОС и вызовам времени.

Список литературы

1. Бессонова Л.Н. Тестирование как метод педагогического контроля в технологии проблемно-модульного обучения // Гуманитарные науки и образование в Сибири. – 2015. – № 1(19). – С. 131-140. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23230284>.
2. Воробьева С.В. Оценивание результатов обучения в школе: учебник и практикум для вузов. – М.: Издательство Юрайт, 2026. – 577 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/589235>.
3. Воробьева С.В. Современные средства оценивания результатов обучения в общеобразовательной школе: учебник для вузов. – М.: Издательство Юрайт, 2025. – 770 с. – ISBN 978-5-534-09241-7. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/562538>.
4. Курбанова Р.Р. Тестирование в современной российской школе: достоинства и недостатки // Вестник Науки и Творчества. – 2021. – № 5(65). – С. 61-64. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46246338>.
5. Петрова Н.Н., Солодухина Н.Н. Научно-методические подходы к формированию географической грамотности школьников // Современное географическое образование: проблемы и перспективы развития: Материалы всероссийской научно-практической конференции, Москва, 25 ноября 2016 года. – М.: Общество с ограниченной ответственностью «Издательство «Экон-Информ», 2016. – С. 121-125. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=28763346>.
6. Самигуллина Г.С. Методика преподавания географии: учебное пособие для вузов. – М.: Издательство Юрайт, 2026. – 215 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/588531>.
7. Скворцов А.В., Богданов К.И. Применение тестового метода контроля качества обучения географии в школе // Современные проблемы науки и образования. – 2024. – № 5. – С. 67. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=74519605>.
8. Сухоруков В.Д., Суслов В.Г. Методика обучения географии: учебник и практикум для вузов. – М.: Издательство Юрайт, 2026. – 372 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/583610>.
9. Таможняя Е.А., Смирнова М.С., Душина И.В. Методика обучения географии: учебник и практикум для вузов / под общей редакцией Е.А. Таможней. – М.: Издательство Юрайт, 2026. – 321 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/583476>.

Сведения об авторах

Левшаков Богдан Валерьевич – студент кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: bogdan.07122003@icloud.com

Тимохова Дарья Олеговна – студентка кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: dashatimohov@gmail.com

Долганова Марина Владимировна – кандидат биологических наук, доцент кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: dolganova0801@yandex.ru

EFFECTIVENESS OF USING TEST CONTROL TECHNOLOGY TO ASSESS STUDENTS' KNOWLEDGE AND SKILLS IN THE "GEOGRAPHY OF RUSSIA" COURSE IN 9TH GRADE

B.V. Levshakov, D.O. Timokhova, M.V. Dolganova

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

The article discusses the technology of test control as a tool for pedagogical control in the school geography course. Based on the analysis of psychological and pedagogical literature and practical experience, a comprehensive study is conducted to examine the didactic possibilities, methodological conditions, and limitations of using test forms to assess students' knowledge and skills. Special attention is given to the specific features of geographical education, including the need to assess cartographic literacy, spatial thinking, and the ability to work with various sources of information and analyze natural and economic relationships. The article substantiates the effectiveness of a combined approach that combines traditional and test forms of control, examines the classification of test tasks in geography, and analyzes the results of the experimental application of test technology in the practice of school geography education.

Keywords: *pedagogical technology, test control, geographical education, geographical knowledge and skills, pedagogical diagnostics, evaluation criteria, metasubject and subject results.*

References

1. Bessonova L.N. Testirovanie kak metod pedagogicheskogo kontrolya v texnologii problemno-modul'nogo obucheniya // Gumanitarny'e nauki i obrazovanie v Sibiri. – 2015. – № 1(19). – S. 131-140. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23230284>.
2. Vorobeva S.V. Ocenivanie rezul'tatov obucheniya v shkole: uchebnik i praktikum dlya vuzov. – M.: Izdatel'stvo Yurajt, 2026. – 577 s. – Tekst: e'lektronny'j // Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. – URL: <https://urait.ru/bcode/589235>.
3. Vorobeva S.V. Sovremennyye sredstva ocenivaniya rezul'tatov obucheniya v obshheobrazovatel'noj shkole: uchebnik dlya vuzov. – M.: Izdatel'stvo Yurajt, 2025. – 770 s. – ISBN 978-5-534-09241-7. – Tekst: e'lektronny'j // Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. – URL: <https://urait.ru/bcode/562538>.
4. Kurbanova R.R. Testirovanie v sovremennoj rossijskoj shkole: dostoinstva i nedostatki // Vestnik Nauki i Tvorchestva. – 2021. – № 5(65). – S. 61-64. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46246338>.
5. Petrova N.N., Soloduxina N.N. Nauchno-metodicheskie podxody k formirovaniyu geograficheskoy gramotnosti shkol'nikov // Sovremennoe geograficheskoe obrazovanie: problemy i perspektivy razvitiya: Materialy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii, Moskva, 25 noyabrya 2016 goda. – Moskva: Obshchestvo s ogranichennoj otvetstvennost'yu «Izdatel'stvo «E'kon-Inform», 2016. – S. 121-125. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=28763346>.
6. Samigullina G.S. Metodika prepodavaniya geografii: uchebnoe posobie dlya vuzov. – M.: Izdatel'stvo Yurajt, 2026. – 215 s. – Tekst: e'lektronny'j // Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. – URL: <https://urait.ru/bcode/588531>.
7. Skvorczov A.V., Bogdanov K.I. Primenenie testovogo metoda kontrolya kachestva obucheniya geografii v shkole // Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya. – 2024. – № 5. – S. 67. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=74519605>.
8. Suxorukov V.D., Suslov V.G. Metodika obucheniya geografii: uchebnik i praktikum dlya vuzov. – M.: Izdatel'stvo Yurajt, 2026. – 372 s. – Tekst: e'lektronny'j // Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. – URL: <https://urait.ru/bcode/583610>.
9. Tamozhnyaya E.A., Smirnova M.S., Dushina I.V. Metodika obucheniya geografii: uchebnik i praktikum dlya vuzov / pod obshhej redakciej E. A. Tamozhnej. – M.: Izdatel'stvo Yurajt, 2026. – 321 s. – Tekst: e'lektronny'j // Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. – URL: <https://urait.ru/bcode/583476>.

About authors

Levshakov B.V. – student of the Department of Geography, Ecology and Land Management Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: *bogdan.07122003@icloud.com*;

Timokhova D.O. – student of the Department of Geography, Ecology and Land Management Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: *dashatimohov@gmail.com*;

Dolganova M.V. – Ph.D. of Biological Sciences, Associate Professor of the Department of Geography, Ecology and Land Management Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: *dolganova0801@yandex.ru*.

**ТРЕБОВАНИЯ
К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ ДЛЯ
ПУБЛИКАЦИИ В РЕЦЕНЗИРУЕМОМ ЭЛЕКТРОННОМ НАУЧНОМ ЖУРНАЛЕ
«УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»
(«УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ БГУ»)**

Требования к содержанию статей.

В журнале «Ученые записки БГУ» публикуются статьи теоретического и прикладного характера, содержащие оригинальный материал исследований автора (соавторов), ранее нигде не опубликованный и не переданный в редакции других журналов. Материал исследований должен содержать научную новизну и/или иметь практическую значимость. К публикации принимаются только открытые материалы на русском, английском или немецком языках. Статьи обзорного, биографического характера, рецензии на научные монографии и т.п. пишутся, как правило, по заказу редколлегии журнала.

Требования к объему статей.

Полный объем статьи, как правило, не должен превышать 1 Мб, включая иллюстрации и таблицы.

Общие требования к оформлению статей.

Статьи представляются в электронном виде, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (Word 97/2000, Word XP/2003) и разбитые на страницы размером А4. См. образец с настроенными стилями.

Все поля страницы – по 2 см, верхний и нижний колонтитулы – по 1,5 см. Текст набирается шрифтом Times New Roman, 12 pt, межстрочный интервал - одинарный, красная строка (абзац) - 1,25 см, выравнивание по ширине, включен режим принудительного переноса в словах. Страницы не нумеруются.

Если статья выполнена при поддержке гранта или на основе доклада, прочитанного на конференции, то необходимо сделать соответствующее упоминание в конце статьи.

К статье должна быть приложена авторская справка, содержащая следующую информацию по каждому автору: фамилию, имя, отчество (при наличии), научную степень, ученое звание, место работы, должность, точный почтовый адрес места работы (домашний адрес указывать недопустимо), контактный телефон – рабочий или сотовый (домашний телефон указывать недопустимо), e-mail, согласие на обработку указанных данных и размещение их в журнале. См. образец авторской справки.

В статье следует использовать только общепринятые сокращения.

Редакция не принимает к рассмотрению рукописи статей, оформленные не по установленным правилам.

Требования к структуре статей.

Статья формируется из отдельных структурных составляющих в следующей последовательности:

- 1) первая строка: номер УДК (стиль «УДК»);
- 2) вторая строка: название статьи (стиль «Название»);
- 3) пропустив одну строку: фамилии и инициалы авторов (стиль «Автор»);
- 4) наименование организации(й), которую представляют авторы (стиль «Организация»);
- 5) пропустив одну строку: аннотация на русском языке (стиль «Аннотация»);
- 6) ключевые слова (стиль «Ключевые слова»);
- 7) пропустив одну строку: основной текст статьи (стиль «Текст») с иллюстрациями (стиль «Подписуночная надпись») и таблицами (стили «Номер таблицы» и «Название таблицы»);
- 8) пропустив одну строку: список литературы (стили «Список литературы» и «Источники»);
- 9) пропустив одну строку: сведения об авторах (стили «Об авторах» и «Сведения»);

- 10) пропустив одну строку: название статьи на английском языке (стиль «Название»);
- 11) пропустив одну строку: фамилии и инициалы авторов на латинице (стиль «Автор»);
- 12) наименование организации(й), которую представляют авторы, на латинице (стиль «Организация»);
- 13) пропустив одну строку: аннотация на английском языке (стиль «Аннотация»);
- 14) ключевые слова на английском языке (стиль «Ключевые слова»);
- 15) пропустив одну строку: список литературы на английском языке (стиль «Список литературы» и «Источники»);
- 16) пропустив одну строку: сведения об авторах на английском языке (стили «Об авторах» и «Сведения»).

Указанные структурные составляющие статьи являются обязательными.

Требования к оформлению структурных составляющих статей.

Аннотация на русском языке, в которой отражается краткое содержание статьи, должна иметь объем, как правило, не более 8 строк. Аннотация на английском языке должна содержать не менее 100-250 слов, быть информативной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований) и оригинальной (не быть калькой аннотации на русском языке).

Количество ключевых слов на русском и английском языках не должно превышать 15 слов (для каждого языка).

Оптимальной считается следующая структура статьи: «Введение» с указанием актуальности и цели научной работы, «Постановка задачи», «Результаты», «Выводы или заключение», «Литература», «Приложение». В «Приложении» при необходимости могут приводиться математические выкладки, не вошедшие в основной текст статьи и иной вспомогательный материал). В тексте статьи допускается использование систем физических единиц СИ (предпочтительно) и/или СГСЭ. В обязательном порядке статья должна завершаться выводами или заключением.

Все иллюстрации и таблицы – не редактируемые файлы в формате jpg, которые должны быть вставлены в текст. Дополнительно иллюстрации прилагаются отдельными файлами в формате jpg. Рисунки встраиваются в текст через опцию «Вставка-Рисунок-Из файла» с обтеканием «В тексте» с выравниванием по центру страницы без абзацного отступа. Иные технологии вставки и обтекания не допускаются. Все рисунки и чертежи выполняются четко, в формате, обеспечивающем ясность понимания всех деталей; это особенно относится к фотокопиям и полутонным рисункам. Рисунки, выполненные карандашом, не принимаются. Рисунки, выполненные в MS Word, недопустимы. Язык надписей на рисунках (включая единицы измерения) должен соответствовать языку самой статьи. Поясняющие надписи следует по возможности заменять цифрами и буквенными обозначениями, разъясняемыми в подписи к рисунку или в тексте. Авторов, использующих при подготовке рисунков компьютерную графику, просим придерживаться следующих рекомендаций: графики делать в рамке; штрихи на осях направлять внутрь; по возможности использовать шрифт Times New Roman; высота цифр и строчных букв должна соответствовать высоте букв в тексте статьи.

Формулы должны быть набраны только в редакторе формул (Microsoft Equation). Высота шрифта 12 pt, крупных индексов – 8 pt, мелких индексов – 5 pt, крупных символов – 18 pt, мелких символов – 12 pt. Формулы, внедренные как изображение, не допускаются! Статья должна содержать лишь самые необходимые формулы, от промежуточных выкладок желательно отказаться. Векторные величины выделяются прямым полужирным шрифтом. Все сколько-нибудь громоздкие формулы выносятся на отдельные строки. Формулы должны быть вставлены по центру в таблицу с невидимыми контурами, состоящей из двух колонок. Левая широкая колонка используется для размещения самой формулы, а правая узкая колонка – для номера формулы. Номер формулы ставится в скобках и располагается по

центру ячейки таблицы. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте статьи.

В список литературы включаются только те источники, на которые в тексте статьи имеются ссылки. Желательно шире использовать иностранные источники. Список формируется либо в порядке цитирования, либо в алфавитном порядке (вначале источники на русском языке, затем на иностранных языках). Ссылки на литературу по тексту статьи необходимо давать в квадратных скобках. Библиографические описания цитируемых источников в списке литературы оформляются в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008 «Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Ссылки на работы, находящиеся в печати, не допускаются. Список литературы должен быть продублирован на латинице (см. Написание русских символов латиницей). Рекомендации по представлению ссылок в списке литературы на латинице, удовлетворяющего требованиям поисковых систем международных баз данных, – см. Представление источников на латинице.

Сведения об авторах должны включать следующую информацию (на русском и английском языках): фамилию и инициалы автора, ученую степень и ученое звание (при их наличии), должность с указанием места работы (полное название организации, без сокращения), адрес электронной почты. В англоязычном варианте желательно (но не обязательно) также привести дополнительную информацию, в частности, указать дату рождения, назвать законченные учебные заведения и полученные в них научные степени или квалификацию, указать область научных интересов и др.

Требования к составу присылаемого в редакцию комплекта документов.

В комплект документов, присылаемых в редакцию журнала, должны входить:

1) файл с расширением .doc, содержащий полностью подготовленную к публикации согласно вышеперечисленным требованиям журнала статью (включая размещенные в ее тексте рисунки), название которого складывается из фамилий всех авторов (например, «Иванов И.И., Петров П.П.doc»);

2) файлы с расширением .jpg, содержащие по одному рисунку статьи, название которых соответствует номерам рисунков (например, «Рисунок 01.jpg»);

3) файлы с расширением .pdf, содержащие по одной авторской справке с подписью автора, название которых соответствует фамилии автора (например, «Иванов И.И.doc»).

К статьям, выполненными аспирантами или соискателями научной степени кандидата наук, необходимо приложить рекомендацию, подписанную научным руководителем (если научный руководитель не входит в число соавторов данной статьи).

Каждая статья в обязательном порядке проходит процедуру закрытого рецензирования. Порядок рецензирования установлен документом «Порядок рецензирования рукописей». По результатам рецензирования редколлегия оставляет за собой право либо вернуть автору статью на доработку, либо отклонить ее публикацию в журнале.

Редакция журнала оставляет за собой право на редактирование статей с сохранением авторского варианта научного содержания.

В опубликованной статье указывается дата поступления рукописи статьи в редакцию. В случае существенной переработки рукописи статьи указывается дата получения редакцией окончательного текста статьи.

Статьи публикуются бесплатно.

Все материалы отправлять по адресу:

241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д.20, каб. 101

Телефон: +7(4832)58-91-71, доб. 1083

E-mail: uz_bgu@mail.ru

Изменения и дополнения к правилам оформления статей можно посмотреть на официальном сайте журнала: <http://www.scim-brgu.ru>

СЕТЕВОЕ ИЗДАНИЕ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ / ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ
/ НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

Свидетельство о регистрации средства массовой информации выдано
Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Эл № ФС77-62799 от 18.08.2015

Адрес учредителя:

ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»
241036, г. Брянск, Бежицкая, 14

Адрес редакции и издателя:

РИСО ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»
241036, г. Брянск, Бежицкая, 20

Дата размещения сетевого издания в сети Интернет на официальном сайте <http://scim-brgu.ru> – 15.05.2026