Ученые записки
Брянского
государственного
университета

№ 4
2016

Физико-математические науки
/ Биологические науки / Ветеринарные науки

ББК 74.58Бр
У 91

Ученые записки Брянского государственного университета:
физико-математические науки / биологические науки / ветеринарные науки
2016. №4 (4)
Точка доступа: http://scim-brgu.ru. Размещено на официальном сайте журнала: 27.12.2016

Свидетельство о регистрации средства массовой информации Эл № ФС77-62799 от 18.08.2015
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

SCIENTIFIC NOTES
of the Bryansk State University

N 4
2016

Physics and Mathematics / Biology / Veterinary

Scientific notes of the Bryansk State University. Physics and Mathematics / Biology / Veterinary
2016. N 4 (4)
http://scim-brgu.ru. Published on the official site of the journal: 27.12.2016

СОДЕРЖАНИЕ

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ БИОЛОГИЯ

CONTENT

FUNDAMENTAL AND APPLIED MATHEMATICS

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL PHYSICS

FUNDAMENTAL AND APPLIED BIOLOGY

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ВОПРОСОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ТЕОРИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Беднаж, А.Н. Ковзикова
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

В статье приводятся некоторые результаты, полученные в теории мероморфных функций, исходя из вопросов интерполяции.
Ключевые слова: *аналитические функции, мероморфные функции, главные части в разложении Лорана*.

Теория мероморфных функций имеет обширные приложения как в теории функций, так и в других областях математики. Ряд важных проблем в теории классов мероморфных функций сводится к решению интерполяционных задач на множестве простых и кратных узлов в соответствующих классах голоморфных функций.

Основополагающей работой в вопросах интерполяции выступает работа Л. Карлесона об интерполяции в классе ограниченных аналитических в круге функций (1958 г.), после которой появилось достаточно много работ в этом направлении.

Интересно, что решение интерполяционных задач имеют приложения в другом не менее важном вопросе: из курса комплексного анализа хорошо известна классическая теорема Миттаг – Леффлера о построении мероморфной функции с заданными главными частями $\{g_k\}_1^\infty$ в разложении Лорана в окрестности особых точек. Однако, теорема не даёт ответ на вопрос, при каких условиях на эту последовательность существует мероморфная в единичном круге функция, имеющая определенные ограничения на характеристику Р. Неванлинны, главные части которой совпадают с $\{g_k\}_1^\infty$.

Оказывается, исходя из результатов о кратной интерполяции в единичном круге, возможно получить полную характеристику главных частей мероморфных функций при условии, что особые точки мероморфных функций удовлетворяют условию Л. Карлесона. Впервые задача о характеризации главных частей мероморфных в D функций ограниченного вида была рассмотрена в работе А.Г. Нафталевича в 1956 г. (см.[6]) без явного построения функции.

Остановимся подробнее на полученных в этой области результатах.

Пусть C- комплексная плоскость, $D=\{z:|z|<1\}$- единичный круг на C, $M(D)$- множество всех мероморфных в D функций, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D. Обозначим N_α $(\alpha>-1)$ - класс мероморфных в D функций f, для которых

$$\int_0^1 \left(1-r^2\right)^\alpha \cdot T\left(r,f\right)dr<+\infty,$$

$T(r,f)$ - характеристика Р.Неванлинны функции f.

В работе .[2] получен следующий результат:

Теорема. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию Л. Карлесона. Тогда для того, чтобы существовала функция* $g(z)\in N_\alpha$, $z\in D$, *с главными частями*

$$H\left(z,z_k,a_k\right)=\frac{a_{k,n}}{\left(z-z_k\right)^n}+\frac{a_{k,n-1}}{\left(z-z_k\right)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{k,1}}{\left(z-z_k\right)},\quad k=1,2,\ldots,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left|z_k\right|\right)^{\alpha+2}\ln^+\frac{\left|a_{k,i}\right|\cdot\left|b_k\left(z_k\right)\right|^n}{\left(1-\left|z_k\right|^2\right)^n}<+\infty,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Рассматривая класс мероморфных в единичном круге функций, имеющих вблизи единичной окружности конечный порядок и нормальный тип, N_α^∞, $\alpha>0$,

$$N_\alpha^\infty=\left\{f\in \mathrm{M}\left(D\right):T\left(r,f\right)\le\frac{c_f}{\left(1-r\right)^\alpha};\ 0\le r\le1\right\},$$

и используя параметрическое представление, полученное в [10], в работе [5] получен следующий результат, играющий существенную роль при характеризации главных частей функций рассматриваемого класса.

Теорема. *Класс N_α^∞ при любых $\alpha>0$ инвариантен относительно оператора дифференцирования.*

Следуя М.М. Джрбашяну, введем бесконечное произведение

$$\Pi_\beta\left(z,\gamma_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\gamma_k}\right)\exp\left\{-\frac{2\left(\beta+1\right)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^\beta}{\left(1-\rho e^{-i\theta}\gamma_k\right)^{\beta+2}}\cdot\ln\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\gamma_k}\right|\rho d\rho d\theta\right\},$$

которое равномерно сходится внутри D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1-\left|\gamma_k\right|\right)^{\beta+2}<+\infty.$$

Справедлива следующая теорема**.**

Теорема. *Пусть последовательность $\left\{z_k\right\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Л. Карлесона. Тогда для того, чтобы существовала функция $g\in N_\alpha^\infty$ с главными частями*

$$H\left(z,z_k,a_k\right)=\frac{a_{k,n}}{\left(z-z_k\right)^n}+\frac{a_{k,n-1}}{\left(z-z_k\right)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{k,1}}{\left(z-z_k\right)},\ k=1,2,\ldots,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left|z_k\right|\right)^{\alpha+1}\ln^+\left(\left|a_{k,i}\right|\cdot\left|\Pi_{\beta,k}{}^n\left(z_k,z_j\right)\right|\right)<+\infty,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Пусть С – комплексная плоскость, $M\left(C\right)$ – множество всех мероморфных функций на С, $f\in M\left(C\right)$, $T\left(r,f\right)$ – характеристика Р. Неванлинны.

Напомним, что функция $f\in M\left(C\right)$ имеет конечный порядок ρ и нормальный тип, если существует $c_f\in R_+$ такая, что

$$T\left(r,f\right)\le c_f r^\rho,\quad r\ge1,\quad \rho>0.$$

Множество таких функций обозначим через $M\left(\rho;+\infty\right)$, а класс целых функций конечного порядка ρ и нормального типа – $H\left(\rho;+\infty\right)$.

Характеристика главных частей в классе $M\left(\rho;+\infty\right)$ сводится к решению интерполяционной задачи в классе $H\left(\rho;+\infty\right)$. Работы А.Ф. Леонтьева, А.В. Братищева, Ю.Ф. Коробейника (см.[6], [4]) посвящены вопросу характеризации интерполяционных множеств в этом классе

Справедлива следующая теорема (см.[8]).

Теорема. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^{+\infty}$ *- интерполяционная в классе* $H(\rho;+\infty)$. *Тогда для того, чтобы существовала функция* $g \in M(\rho;+\infty)$ *с главными частями*

$$\frac{a_{k,1}}{(z-z_k)}+\frac{a_{k,2}}{(z-z_k)^2}+\ldots+\frac{a_{k,p_k}}{(z-z_k)^{p_k}},$$

в окрестности точки z_k, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{\ln|a_{k,i}|}{|z_k|^{\rho}}<+\infty,\ i=\overline{1,p_k}.$$

Для любого $\alpha>0$ определим класс S_α^∞:

$$S_\alpha^\infty:=\left\{f\in M(D):T(r,f)<\frac{C_f}{(1-r)^\alpha}\right\},$$

где C_f - положительная константа, значения которой зависят разве что от функции f, $r\in[0,1)$, $T(r,f)$ - характеристика Р.Неванлинны функции f.

Аналитическую часть класса S_α^∞ обозначим $S_{\alpha,a}^\infty$.

Хорошо известно, если $f\in S_\alpha^\infty$, то

$$M(r,f)=\max_{|z|\le r}|f(z)|\le\exp\left\{\frac{c_f}{(1-r)^{\alpha+1}}\right\},$$

при всех $\alpha>0,\ c_f>0$.

Последовательность комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$, удовлетворяющих условиям

$$n(r)=\mathrm{card}\{\alpha_k:|\alpha_k|<r\}\le\frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}},$$

$$\left|\pi_{p,n}(\alpha_n,\alpha_j)\right|\ge\exp\frac{-c_0}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}},\ c_0>0,$$

$$\sup_{k\ge1}\{q_k\}=q,$$

отнесем к классу $\tilde{\Delta}$.

Теорема (см.[9])**.** *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\}$ *находится в конечном числе углов Штольца. Если* $\{z_k\}_1^\infty\in\tilde{\Delta}$, *то для того, чтобы существовала функция* $F\in S_\alpha^\infty$ *с главными частями*

$$H(z,z_k,a_k)=\frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n}+\frac{a_{k,n-1}}{(z-z_k)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{k,1}}{(z-z_k)},k=1,2,\ldots.$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$|a_{k,i}|\le\exp\frac{c}{(1-|z_k|)^{\alpha+1}},i=1,\ldots,n,\ \text{где } c\ne c(i).$$

Список литературы

1. Беднаж В.А. Описание следов, характеризация главных частей в разложении Лорана классов мероморфных функций с ограничениями на рост характеристики Р. Неванлинны// диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. Брянск, 2007.

2. Беднаж В.А., Шамоян Ф.А. Описание главных частей в разложении Лорана некоторых классов мероморфных в круге функций // Вестник Брянского государственного университета. № 4(2004): Естественные и точные науки. Брянск: Изд-во БГУ. С. 84-92.

3. Беднаж В.А., Родикова Е.Г., Шамоян Ф.А. Факторизационное представление и вопросы кратной интерполяции в весовых пространствах аналитических функций//Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 377-381.

4. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. Кратная интерполяционная задача в пространствах целых функций заданного уточнённого порядка // Изв. АН СССР. Серия математика. 1976. Т.40. № 5. С. 1102-1127.

5. Шамоян Ф.А., Беднаж В.А. Об инвариантности класса N_α^∞ относительно оператора дифференцирования // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. С. 106-111.

6. Леонтьев А.Ф. Разрешимость интерполяционной задачи в классе целых функций // ДАН СССР. 1949. Т. 66. С. 33-34.

7. Нафталевич А.Г. Об интерполировании функций ограниченного вида // Ученые записки Вильнюсского университета. 1956. С. 5-27.

8. Bednazh V. A. Characterization of principal parts of meromorphic functions of finite order and normal type near singular points // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Т. 148. № 6. С. 810-812.

9. Bednazh V. A., Rodikova E. G., Shamoyan F. A. Multiple Interpolation and Principal Parts of a Laurent Series for Meromorphic Functions in the Unit Disk with Power Growth of the Nevanlinna Characteristic //Complex Analysis and Operator Theory. 2016. С. 1-19. DOI: 10.1007/s11785-016-0592-x

10. Shamoyan F.A., Shubabko E.N. Parametrical Representations of Some Classes of Holomorphic Function in the Disk // Operator Theory: Advances and Applications. 2000. V. 113. P. 331-338.

Сведения об авторах

Беднаж В.А. – к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа, Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, e-mail: vera.bednazh@mail.ru.

Ковзикова А.Н. – магистрант, Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, e-mail: a.kovzikova@mail.ru.

ABOUT SOME APPLICATIONS ISSUES INTERPOLATION THEORY OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

V.A. Bednazh, A. N. Kovzikova
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

The article presents some of the results obtained in the theory of meromorphic functions on the basis of the questions interpolation.
Keywords: *analytic functions, meromorphic functions, Principal Parts of a Laurent Series.*

References

1. Bednazh V.A. Description of traces, characterization of the main parts in the Laurent expansion of classes of meromorphic functions with restrictions on growth characteristics of Nevanlinna // thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences / Russian State Pedagogical University. AI Herzen. Bryansk 2007

2. Bednazh V.A., Shamoyan F.A. Description of the main parts in the Laurent expansion of certain classes of functions meromorphic in the circle // Vestnik Bryanskogo universiteta. № 4 (2004): Natural and exact sciences. 84-92.

3. Bednazh V.A., Rodikova E.G., Shamoyan F.A. Factorization and issues of multiple interpolation in weighted spaces of analytic functions // Vestnik Bryanskogo universiteta. 2015. № 2. 377-381.

4. Bratiscev A.V., Corobeynic J.F. The multiple interpolation problem in spaces of entire functions of given the refined order // Math. USSR Academy of Sciences. Mathematics Series. 1976. v.40. № 5. 1102-1127.

5. Shamoyan F.A., V.A. Bednazh The invariance of the class with respect to the differentiation operator // Vestnik Bryanskogo universiteta. 2009. № 4. 106-111.

6. Leontiev A.F. Razreshimost interpolation problem in the class of entire functions // DAN SSSR - 1949. V. 66. P. 33-34.

7. Naftalevich A.G. On the interpolation of functions of bounded type // Scientific notes of Vilnius University. 1956. P. 5-27.

8.Bednazh V. A. Characterization of principal parts of meromorphic functions of finite order and normal type near singular points//Journal of Mathematical Sciences. 2008. T. 148. № 6. C. 810-812.

9.Bednazh V. A., Rodikova E. G., Shamoyan F. A. Multiple Interpolation and Principal Parts of a Laurent Series for Meromorphic Functions in the Unit Disk with Power Growth of the Nevanlinna Characteristic //Complex Analysis and Operator Theory. 2016. C. 1-19. DOI: 10.1007/s11785-016-0592-x

10.Shamoyan F.A., Shubabko E.N. Parametrical Representations of Some Classes of Holomorphic Function in the Disk // Operator Theory: Advances and Applications. 2000. V. 113. P. 331-338.

About authors

Bednazh V.A – PhD, assistant professor, Department of Mathematical Analysis, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: vera.bednazh@mail.ru.

Kovzikova A.N. - graduate student, Department of mathematical analysis, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: a.kovzikova@mail.ru.

УДК 004.9

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАПРОСОВ СЕМАНТИЧЕСКИХ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ SPARQL

О.Г. Верхова, Н.А. Иванова
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

С развитием семантического веб многие исследования стали направлены на изучение технологий, связанных с веб-онтологиями, а также хранением и обработкой данных на основе реляционных моделей. Данная статья посвящена сравнению языка запросов SPARQL и SQL. Сопоставляются модели данных, для которых они предназначены.
Ключевые слова: *Семантическая паутина, Семантический Веб, SQL, SPARQL, RDF, W3C.*

С ростом объемов информации в сети Интернет достижение точных результатов поисковых запросов пользователей постоянно усложняется. Поэтому в настоящее время множество исследований ориентированы на разработки в области семантической паутины, в особенности управлением и поиском в веб-онтологиях, а также технологии хранения и использования информации в реляционных базах данных [3].

В семантическом вебе используется представление знаний с помощью языка RDF (Resource Description Framework, формат данных в виде ориентированного маркированного графа для представления информации во всемирной паутине). Язык запросов и протокол передачи данных SPARQL (SPARQL Protocol and RDF Query Language) был разработан специально для RDF-данных и рекомендован Консорциумом Всемирной паутины [5].

Языки запросов применяются в соответствии с моделью представления данных. Так язык запросов SQL (Structured Query Language) используется для поиска, создания, изменения и удаления информации, представленной в реляционной модели данных. Сравнивая языки SPARQL и SQL, необходимо помнить о том, что их преимущества напрямую связаны с моделями данных, с которыми они работают [4].

Архитектура RDF-модели данных более гибкая, нежели реляционной модели, поэтому вносить изменения в RDF-модель проще. Кроме того, запросы к RDF-хранилищам проходят по протоколу HTTP, что обеспечивает легкость внедрения их в сервисные архитектуры [2].

Реляционная модель данных представляется в виде таблиц, каждая строка которых имеет одинаковое количество столбцов, а столбцы соответствуют определенному типу данных. RDF- данные представляются в виде триплетов «сущность – атрибут – значение» с использованием языка OWL (Web Ontology Language) [1].

Кроме того, язык SPARQL позволяет работать с формальными представлениями данных, в том числе XML (eXtensible Markup Language) и тематическими картами (Topic Maps), представленными в виде деревьев и ориентированных графов с вершинами типа «тема» и ребрами «ассоциация».

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется адресная книга, состоящая из двух таблиц «Имена» и «Адреса», схема данных которых приведена на рисунке 1.

В реляционных базах данных и, следовательно, в SQL, отношения между объектами из разных таблиц устанавливаются с помощью ключевых полей. SQL-запрос отражает специфическую структуру базы данных, а также способ хранения информации, без понимания семантических связей между объектами. Как видно из рисунка 1, связь между таблицами осуществляется по Идентификатору адреса.

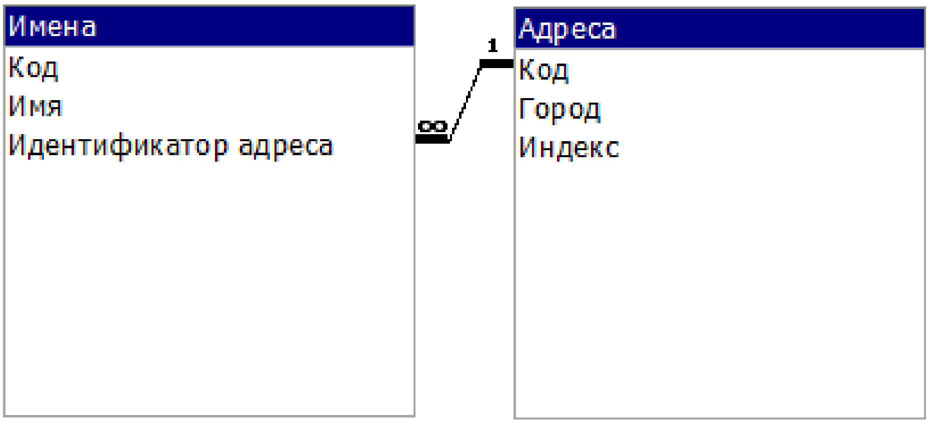


Рис. 1. Схема данных

Задать те же самые данные в виде триплетов можно по следующему графовому шаблону: <Имя> <Живет> <Город> и <Город> <Идентифицируется> <Индекс>. Причем связь между записями в хранилище подобных триплетов куда более наглядна, нежели связь по ключевым полям. На рисунке 2 представлен RDF-граф, иллюстрирующий шаблон.

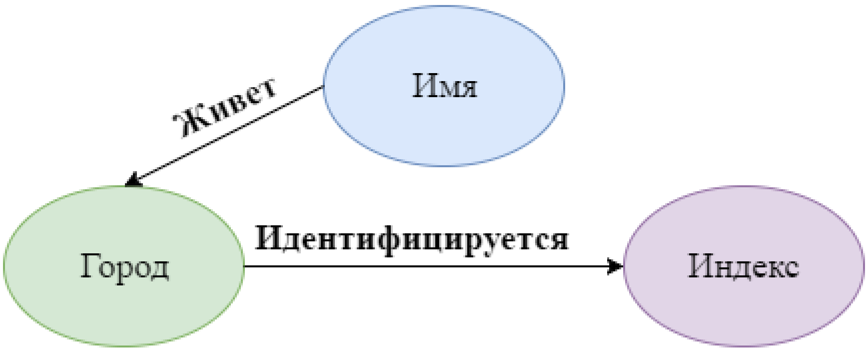


Рис 2. RDF-граф

Представление данных в виде ориентированного RDF-графа оказывается более наглядно для пользователей, так как непосредственно иллюстрирует все связи между сущностями и их значениями.

Следовательно, первым ключевым отличием RDF-данных и SPARQL является то, что отношения между объектами описываются подробно, и эти описания находятся в свободном доступе. В результате такого представления SPARQL-запросы оказываются более понятными пользователям.

Еще одной важная особенность SPARQL – способность обрабатывать данные их различных источников, а также использовать IRI в качестве параметров. При использовании SPARQL пользователю не нужно дополнительно сопоставлять термины из различных баз данных, чтобы избежать совпадения имен столбцов и ключей, в отличие от SQL.

Составим запросы к схеме данных и RDF-графу, чтобы найти имена людей и их индексы.

На языке SQL запрос будет выглядеть следующим образом:

```
SELECT Имя, Индекс
FROM Имена, Адреса
WHERE Имена.Идентификатор_адреса=Адреса.Код
AND Адреса.Город=”Город1”
```

В данном случае мы извлекаем список атрибутов из списка набора данных, удовлетворяющих заданным условиям.

На языке SPARQL аналогичный запрос будет выглядеть:

```
SELECT ?Имя, ?Индекс
WHERE {
?Кто <Имеет_имя> ?Имя;
<Живет> ?Адрес.
?Адрес <Идентифицируется> ?Индекс;
<Город> “Город1”
}
```

В случае запроса на языке SPARQL мы соотносим запрашиваемые переменные с графовым шаблоном, т. е. тремя взаимосвязанными утверждениями. Графовый шаблон выглядит как утверждение, но любая его часть может быть заменена на переменную (переменные в языке SPARQL начинаются с ?).

В результатах запросов заголовками столбцов в случае SPARQL запросов будут имена переменных, а в случае с SQL – заголовки столбцов.

Язык SPARQL использует часть служебных слов языка SQL: SELECT, FROM, WHERE, UNION, GROUP BY, HAVING, а также большинство имен функций, однако имеющееся сходство носит лишь внешний характер. SPARQL и SQL имеют очень близкие операторы UNION и MINUS, которые соответственно добавляют и удаляют части результатов запроса.

В случае если данные не доступны в БД, SQL вернет значение NULL. Для соединения результатов в SQL используется оператор JOIN, эквивалентом которого в языке SPARQL является оператор OPTIONAL. Однако, несмотря на сходство, между этими операторами существует важное различие в отношении обработки недостающих данных. Отсутствующие данные просто никак не выражаются в RDF. Вследствие этого сам SPARQL-граф не будет строиться, если в триплете будет не хватать атрибутов [6].

Пожалуй, главная особенность SPARQL – создание федеративных запросов к разным хранилищам, которая заложена в самом формате представления данных RDF. В SQL нет подобного стандартизированного механизма для федеративных запросов, в то время как Консорциум Всемирной паутины подробно стандартизовал и RDF, и SPARQL.

Реляционную модель данных сложно использовать для решения задач, в основе которых лежат графы, а также весь класс NoSQL-задач. RDF-хранилища можно использовать практически в любой предметной области, особенно в сферах, в которых присутствует множество сущностей с самыми разными связями между ними, и практически любую реляционную модель данных можно представить в виде ориентированного графа [2].

Тем не менее, было бы ошибочно утверждать, что RDF-хранилища и SPARQL могут легко заменить реляционную модель и SQL на данном этапе, так как последние все еще занимают лидирующее положение. Сравнительно с языком SQL, SPARQL достаточно молод, и для использования его возможностей с максимальной эффективностью требуется большая интеграция технологий семантического веб в Интернет.

Список литературы

1. Антониу Г., Грос П., Хармелен ван Ф., Хоекстра Р. Семантический веб– М.: ДМК Пресс, 2016. 240 с.
2. RDF — инструмент для неструктурированных данных (RDF - engine for unstructured data) [Электронный ресурс]. URL: http://www.osp.ru/os/2012/09/13032513 (дата обращения: 5.11.2016).
3. A Comprehensive Comparative study of SPARQL and SQL [Электронный ресурс]. URL: http://www.ijcsit.com/docs/Volume%202/vol2issue4/ ijcsit2011020467.pdf (дата обращения: 6.11.2016).
4. Comparing SPARQL with SQL [Электронный ресурс]. URL: http://www.topquadrant.com/2014/05/05/comparing-sparql-with-sql/ (дата обращения: 4.11.2016).

5. SPARQL 1.1 [Электронный ресурс]. URL: Overview https://www.w3.org/TR/sparql11-overview/ (дата обращения: 1.11.2016).

6. SPARQL vs. SQL – Intro [Электронный ресурс]. URL: http://www.cambridgesemantics.com/semantic-university/sparql-vs-sql-intro (дата обращения: 2.11.2016).

Сведения об авторах

Верхова О.Г. – магистрант направления подготовки «Прикладная математика и информатика», направленность «Прикладные Интернет-технологии», Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского.

Иванова Н. А. – к.т.н., доцент кафедры информатики и прикладной математики, Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, e-mail: ivanova_natala@mail.ru.

NEW FEATURES OF QUERYING SEMANTIC DATA WITH SPARQL

O.G. Verkhova, N.A. Ivanova

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

With development of Semantic Web, much research focuses on various technologies about Web ontology and various storages based on RDB.

This article provides comparing query languages SPARQL with SQL. Data models which they are intended are compared.

***Keywords**: Semantic Web, SQL, SPARQL, RDF, W3C.*

References

1. Antoniou G., Groth P., Harmelen F., Hoekstra R. A Semantic Web Primer - M .: DMK Press, 2016. 240 p .

2. RDF - a tool for unstructured data (RDF - engine for unstructured data) [electronic resource]. URL: http://www.osp.ru/os/2012/09/13032513 (reference date: 11/05/2016)

3. A Comprehensive Comparative study of SPARQL and SQL [electronic resource]. URL: http://www.ijcsit.com/docs/Volume%202/vol2issue4/ ijcsit2011020467.pdf (reference date: 11/06/2016)

4. Comparing SPARQL with SQL [electronic resource]. URL: http://www.topquadrant.com/2014/05/05/comparing-sparql-with-sql/ (reference date: 11/04/2016)

5. SPARQL 1.1 [electronic resource]. URL: Overview https://www.w3.org/TR/sparql11-overview/ (reference date: 01/11/2016)

6. SPARQL vs. SQL - Intro [electronic resource]. URL: http://www.cambridgesemantics.com/semantic-university/sparql-vs-sql-intro (reference date: 11/02/2016)

About authors

Verkhova O.G. - graduate student, Department of computer science and applied mathematics, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Ivanova N.A. – PhD in Technical Sciences, assistant professor, Department of computer science and applied mathematics, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: ivanova_natala@mail.ru.

УДК 371.24+371.212

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Д. Сенченко, В.И. Горбачев
Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского

В геометрическом пространстве рассматриваются закономерности становления трехмерного евклидова пространства, векторного метода исследования геометрических фигур.
Ключевые слова: *методика обучения математике, учебная геометрическая деятельность, евклидово пространство, векторный метод.*

В методике обучения геометрии [10], в общеобразовательных учебниках геометрии [2] векторный метод исследования геометрических фигур не предполагает формирование пространственных представлений в спектре разделенных геометрического, векторного, евклидова, арифметического пространств и по этой причине оказывается «искусственным», противопоставленным деятельности в геометрическом пространстве.

В работе векторный метод рассматривается в содержании теоретических, методических закономерностей учебной геометрической деятельности:

- понятийного разделения представлений геометрического, векторного, евклидова, арифметического пространств в системе их характеристических признаков и в их взаимной связи;

- формирования в каждом из пространств деятельности представливания и теоретико-пространственной деятельности с описанием и обоснованием векторного, координатного, аналитического методов в соответствующих пространствах;

- выделения в содержании каждого из методов обобщенной алгоритмической схемы и ее конкретных проявлений в процедурах доказательства теорем, решения задач.

1. Понятийное представление геометрической деятельности в геометрическом и евклидовом пространствах.

Геометрическая фигура – математическая модель объектов реального физического пространства, спроектированная в системе условных геометрических построений в процессе обобщения и абстрагирования, подчиненных целям геометрической деятельности. Главные характеристики геометрической фигуры:

1) является моделью пространственных свойств объектов физического пространства;

2) выступает основным средством геометрической деятельности учащихся;

3) реализует задачу создания геометрических образов, оперирования образами во внутреннем плане учащихся [7, 15, 16].

Под геометрической деятельностью будем понимать учебную математическую деятельность в системе геометрических фигур в наглядной, графической, знаковой формах, направленную на формирование пространственного геометрического мышления учащегося, его логической культуры. Главные задачи, исследуемые в геометрической деятельности посредством геометрических фигур:

1) создание внутренних образов геометрических фигур в схеме «реальный физический объект → геометрическая модель физического объекта → различные условные изображения геометрической модели → знаковое представление геометрической фигуры в мышлении»;

2) выделение пространственных, топологических, конструктивных, метрических свойств геометрических фигур, их представление на условных геометрических изображениях, использование в процессе доказательства, в мышлении;

3) определение геометрических фигур в дедуктивном (аксиоматическом) построении геометрии, использование их абстрактных геометрических свойств в формировании логического мышления учащихся;

4) формирование общей математической культуры учащихся исследованием фундаментальных понятий равенства, подобия геометрических фигур, их преобразований.

Пространство геометрических фигур (геометрическое пространство) в процедуре геометрического отражения свойств реального физического пространства является:

- пространством с фиксированной либо подвижной системами отсчета, позволяющими устанавливать взаимное расположение геометрических фигур;

- трехмерным с множеством фигур, расположенных на прямой, в плоскости, в пространстве;

- евклидовым с метрическими свойствами длины, величины угла, площади, объема геометрических фигур в их взаимной связи;

- топологическим с геометрическими фигурами, очерченными границей, разделяющей внешнюю и внутреннюю области;

– инвариантным относительно преобразований движения, подобия, проектирования, позволяющих строить условные (плоские) изображения геометрических фигур, их образы как результаты преобразований различными конструктивными средствами;

- структурированным классами геометрических фигур с общими пространственными, метрическими, конструктивными свойствами в понятийно-именных процедурах выделения, классификации, систематизации [5, 9, 10].

Абстрактная аксиоматическая теория геометрического пространства (Евклидова геометрия) характеризуется следующими этапами построения:

- выделение первичных терминов теории с заданными на них отношениями;

- задание перечня аксиом с описанием фундаментальных свойств геометрического пространства;

- введение аксиом теории меры на классах геометрических фигур, определяющих метрические свойства геометрического пространства;

- аналитическое, логико-символическое, знаковое определения базовых понятий, представление геометрического пространства в процедуре систематизации понятий;

- логико-содержательный анализ теорем о свойствах, взаимной связи понятий, их конкретизация в соответствующих классах фигур геометрического пространства;

- анализ доказательства теорем в аксиоматическом построении с использованием основных правил логического вывода [4, 7, 9].

Методология евклидовой геометрии как абстрактной теории геометрического пространства осуществляется в следующих действиях:

- построение евклидовой геометрии в различных системах первичных понятий, аксиом с целью анализа различного теоретического описания свойств геометрического пространства, эквивалентности теорий;

- знакомство с аксиоматическим построением неевклидовой геометрии (Н.И. Лобачевского) с позиции сохранения и изменения свойств классов объектов геометрического пространства;

- исследование понятий «определение в теории», «аксиома и теорема в теории», «доказательство в теории», «модель теории» евклидовой геометрии как математической теории геометрического пространства [2, 12, 14].

Математическое понятие «вектор» характеризуется свойствами:

- величиной, описываемой длиной отрезка на геометрической модели системы действительных чисел;

- направлением, совпадающим с направлением положительного отсчета, либо противоположным на геометрической модели системы действительных чисел;

- представлением класса эквивалентности, позволяющим откладывать вектор из любой точки геометрического пространства;

- действием умножения на действительное число, определяемым величиной и направлением на геометрической модели системы действительных чисел;

- операцией сложения, определяемой величиной и направлением по «правилу параллелограмма»;

- совокупность всех линейных комбинаций векторов образует векторное пространство с базисом из трех некомпланарных векторов [1, 2, 3].

Евклидово пространство в учебной математической деятельности, развиваемое средствами деятельности представливания и векторно-геометрической деятельности, оказывается сложно структурируемым, многокомпонентным:

- выступает трехмерным векторным пространством с векторно-координатным методом исследования пространственных свойств геометрических фигур в общей системе координат;

- является евклидовым пространством с векторно-координатным методом исследования пространственных, метрических свойств геометрических фигур в ортонормированной системе координат;

- имеет арифметическую модель с аналитическим методом исследования геометрических фигур;

- в абстрактной аксиоматической теории векторного, евклидова пространств свойства пространства являются первичными, свойства геометрических фигур обосновываются аксиомами векторного, евклидова пространств аналитическими средствами;

- свойства геометрического пространства в евклидовой геометрии доказываются аналитико-синтетическим методом в понятийной логико-содержательной форме, в теории евклидова пространства базовыми выступают векторный, координатный, аналитический методы исследования [6, 11, 13].

Деятельность представливания в построении трехмерного евклидова пространства структурируется следующей системой действий:

- введение понятия вектора на интуитивном, мировоззренческом уровнях в отражении понятий физики (перемещение, сила, напряжение), в процедуре математического абстрагирования и идеализации;

- развитие аппарата векторной алгебры в геометрическом пространстве, выделение векторных характеристик базовых геометрических фигур (прямые, плоскости, многогранники), их свойств;

- введение базиса геометрического пространства, его представление как трехмерного векторного пространства с общей (аффинной) системой координат;

- введение ортонормированного базиса векторного пространства на базе понятия скалярного произведения векторов с расширением возможностей исследования пространственных, метрических свойств геометрических фигур;

- построение в содержании координатного метода арифметической модели трехмерного евклидова пространства с аналитическим методом исследования прямых, окружностей, плоскостей, их представителей в геометрических фигурах.

Деятельность представливания, как ведущая в учебной геометрической деятельности, в целевом, методологическом, содержательном планах характеризуется:

- направленностью на развитие пространственного мышления средствами аналитической геометрии;

- схемой формирования «геометрическое пространство – трехмерное векторное пространство – трехмерное евклидово пространство – арифметическое трехмерное пространство – аналитический метод исследования геометрических фигур в евклидовом пространстве»;

- становлением логико-содержательных представлений каждого из пространств методологической схемы вместе с адекватным пространству методом исследования (векторным, координатным, аналитическим) геометрических фигур [6, 7, 14].

Абстрактная математическая теория евклидова пространства структурируется действиями, отражающими фундаментальные свойства пространства как трехмерного евклидова:

- понятие вектора выступает первичным термином теории;
- операции над векторами задаются системой аксиом векторного пространства;
- в аксиоматическом определении базиса фиксируется размерность векторного пространства;
- аксиомы скалярного произведения дополняют структуру векторного пространства в форме евклидова пространства [6, 15].

Теоретико-геометрическая деятельность в евклидовом пространстве, направленная на теоретическое обоснование аналитико-геометрической деятельности, синтезирование целостных пространственно-геометрических представлений, осуществляется в системе действий:

- в процедуре аксиоматизации аппарата векторной алгебры, размерности векторного пространства, свойств скалярного произведения;
- в определении базовых геометрических фигур на основе первичных понятий вектора, операций над векторами, исследовании справедливости аксиом евклидовой геометрии;
- в развитии аналитического метода исследования геометрических фигур;
- в теоретическом описании геометрического пространства как евклидова, интегрированном с евклидовой геометрией.

Понятие базиса, системы координат в плоскости и в пространстве [2, 4, 11, 15]. В системе фундаментальных свойств пространства одно из ведущих – свойство размерности пространства. Формирование понятия размерности осуществляется посредством представления базиса и системы координат в плоскости и в пространстве. Аналитические представления линейной зависимости и линейной независимости векторов плоскости и пространства оказываются сложными, трудными для восприятия учащимися, по этой причине в методике формирования понятия базиса используются наглядные свойства коллинеарности и комплонарности, точнее – их отрицания. В основу формирования понятия базиса положены наглядные и доказуемые факты.

Теорема. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то в плоскости векторов любой вектор $\vec{c}$ разлагается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и притом единственным способом

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

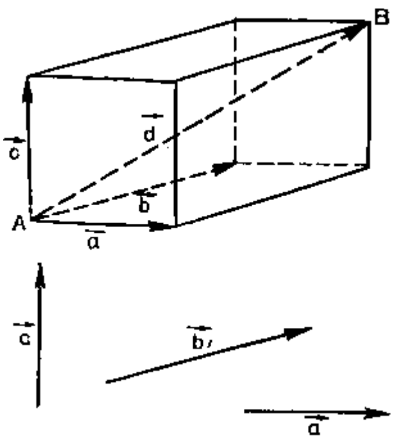
Теорема. Если три вектора $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны, то любой вектор $\vec{d}$ пространства разлагается по векторам $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$ и притом единственным способом

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Неколлинеарность векторов и разложение по ним векторов плоскости являются характеристическими свойствами понятия базиса плоскости, при этом становится очевидным факт наличия множества базисов плоскости и произвольность его выбора. Исследование свойств многоугольника посредством выбора векторов, определенных смежными сторонами, в качестве базисных, позволяет увидеть как значимость в геометрии понятия базиса, так и увидеть закономерности векторного метода.

Аналогично, некомплонарность трех векторов и разложение по ним любого вектора пространства – характеристические свойства базиса в пространстве, наличие в пространстве базисов и произвольность их выбора становятся очевидными фактами. Последующее изучение пространственных свойств многогранников выбором базисных векторов из ребер с общим началом позволяет установить эффективность векторного метода.

В условиях произвольности выбора базисных векторов в плоскости и в пространстве возникает задача фиксации выбранного базиса. Задачи с выбором базисных векторов в многоугольниках и в многогранниках позволяют процедуру фиксации базиса осуществить с помощью точки – вершины многогранника, многоугольника.



Определение. Общей (аффинной) системой координат в плоскости называется упорядоченная тройка из фиксированной точки и двух неколлинеарных векторов с началом в выделенной точке. Основное свойство системы координат на плоскости – разложение любого вектора плоскости по ее базисным векторам

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Определение. Общей (аффинной) системой координат в пространстве называется упорядоченная четверка из фиксированной точки и трех некомпланарных векторов с началом в выделенной точке. Основное свойство системы координат в пространстве – разложение любого вектора пространства по ее базисным векторам

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Существенным недостатком векторного пространства выступает возможность исследования лишь пространственных свойств геометрических фигур в содержании векторного метода. Для того, чтобы изучать и метрические свойства геометрических фигур, необходимо, чтобы в пространстве было введено скалярное произведение векторов – чтобы пространство стало евклидовым.

В евклидовом пространстве скалярное произведение позволяет вычислять длину векторов и величину угла между векторами. Это означает что в произвольном выборе базиса в плоскости можно потребовать, чтобы неколлинеарные векторы базиса были единичными и ортогональными – выбрать ортонормированный базис из двух векторов на плоскости и соответствующую ему прямоугольную (декартову) систему координат, ортонормированный базис из трех векторов в пространстве и соответствующую прямоугольную систему координат.

Ключевым фактором выбора ортонормированного базиса и соответствующей ему декартовой системы координат выступает понятие координат вектора и точки.

Определение. Координатами вектора в декартовой системе координат $(O, \vec{a}, \vec{b})$ на плоскости называются коэффициенты в разложении вектора по векторам ортонормированного базиса $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Определение. Координатами вектора в декартовой системе координат $\left(O, \vec{a}, \overrightarrow{b, \vec{c}}\right)$ на плоскости называются коэффициенты в разложении вектора по векторам ортонормированного базиса $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Координатное представление векторов, точек в ортонормированном базисе выступает основанием:

- развития координатного метода исследования геометрических фигур;

- исследования метрических свойств геометрических фигур с использованием координатных формул вычисления длины вектора и угла между векторами

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,, \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

2. Представления геометрического, векторного, евклидова, арифметического пространств и соответствующих методов.

Теоретической основой векторного, координатного, аналитического методов исследования геометрических фигур выступает комплексный анализ задач по исследованию пространственных, метрических свойств геометрических фигур, обоснованный схемой «геометрическое пространство – трехмерное векторное пространство – трехмерное евклидово пространство – арифметическое трехмерное пространство» [6, 11, 14]:

- как понятие геометрической фигуры, так и понятия геометрического, векторного, евклидова, арифметического пространств являются мысленными конструкциями, что выступает основой мысленного переноса геометрической фигуры в любое из пространств;

- в условиях мысленного переноса геометрической фигуры в каждое из пространств оказывается возможной переформулировка задачи исследования свойств геометрической фигуры в форме векторной, координатной (в векторном, евклидовом пространствах), аналитической (в арифметическом пространстве) моделей с соответствующими методами исследования;

- в теории трехмерного векторного пространства разработаны векторный и координатный методы исследования пространственных свойств геометрических фигур в аффинном базисе, в теории трехмерного евклидова пространства обоснованы векторный и координатный методы исследования пространственных и метрических свойств геометрических фигур в ортонормированном базисе, в арифметическом пространстве получил обоснование аналитический (комплексный) метод исследования свойств геометрических фигур;

- аналитический метод исследования геометрических фигур базируется на закономерностях векторного, координатного методов теории трехмерного евклидова пространства и в содержании аналитической модели задачи исследования использует аппарат теории алгебраических уравнений, неравенств, систем для ее исследования с последующей интерпретацией результатов аналитической деятельности.

Синтезирование процесса переформулировки задачи исследования геометрической фигуры в спектре векторного и евклидова пространств, анализа применения векторного, координатного методов, выделение этапа построения аналитической модели задачи и ее исследование с помощью аппарата алгебры составляет основное содержание теоретико-геометрической деятельности. В соответствии пространств, моделей задачи исследования геометрической фигуры и адекватных им методов решения, интерпретации создаются векторно-геометрические представления (Таблица 1).

Таблица 1

	Теория геометрического пространства	Теория векторного пространства	Теория евклидова пространства	Теория арифметического пространства
Характеристика пространства	Аксиоматизируемое пространство геометрических фигур в системе пространственных, метрических, конструктивных свойств	Аксиоматизируемое трехмерное пространство векторов, комбинаций с аффинным базисом, со знаковыми (векторными, координатными) моделями геометрических фигур в системе пространственных свойств	Аксиоматизируемое трехмерное пространство векторов, комбинаций с ортонормированным базисом, со знаковыми (векторными, координатными) моделями геометрических фигур в системе пространственных и	Арифметическая модель трехмерного евклидова пространства с ортонормированным базисом, со знаковыми (аналитическими) моделями геометрических фигур в системе пространственных, метрических, конструктивных

			метрических свойств	свойств
Базовые методы исследования	Аналитико-синтетический метод исследования геометрических фигур на базе аксиом, теорем геометрического пространства, определений и конструктивных образов фигур	Векторный, координатный методы исследования пространственных свойств геометрических фигур на базе аксиом, теорем векторного пространства, представлений фигур в аффинном базисе	Векторный, координатный методы исследования пространственных, метрических свойств геометрических фигур на базе аксиом, теорем евклидова пространства, представлений фигур в ортонормированном базисе	Аналитический метод исследования пространственных, метрических, конструктивных свойств геометрических фигур на базе алгебраического метода исследования уравнений, неравенств, систем, выступающих знаковыми моделями компонентов фигур
Представления классов задач	Задача исследования пространственных, метрических, конструктивных свойств геометрической фигуры в системе свойств геометрического пространства	Векторная, координатная модели задачи исследования геометрической фигуры, представленной в аффинном базисе векторного пространства.	Векторная, координатная модели задачи исследования геометрической фигуры, представленной в ортонормированном базисе векторного пространства.	Аналитическая модель задачи исследования геометрической фигуры на базе координатной модели в евклидовом пространстве

Доказательство теорем, решение задач векторным методом предполагает:

- сформированность деятельности в геометрическом пространстве на уровне определений понятий геометрических фигур, представления их свойств в форме основных теорем;
- уровень пространственных представлений, позволяющих проводить преобразования геометрических фигур, проводить дополнительные построения;
- владение аппаратом векторной алгебры как на абстрактных векторах, так и на векторах, определенных сторонами, ребрами геометрических фигур;
- знание векторных условий коллинеарности, комплонарности, ортогональности векторов.

3. Представление векторного метода в векторном и евклидовом пространствах.

Векторный метод исследования свойств геометрических фигур выступает основным результатом деятельности представливания в трехмерном евклидовом пространстве и в то же время существенно зависит от уровня ее становления. Это означает совместное развитие векторных представлений геометрического пространства и векторного метода доказательства теорем, решения задач. В каждом из значимых видов векторно-геометрической деятельности выделим базовые действия для последующего формирования [6, 11, 16].

3.1.Векторное представление геометрического пространства:

- введение понятий вектора, операций над векторами в геометрическом пространстве в точечно-векторной форме;
- представление вектора как класса эквивалентности в форме его откладывания из любой точки геометрического пространства;
- введение понятий базиса прямой, плоскости, геометрического пространства;
- разложение векторов пространства по базисным векторам, введение координат вектора, точки в базисе;

- представление геометрического пространства как трехмерного с общей системой координат, с базисом из трех произвольных некомпланарных векторов;

- представление произвольной плоскости геометрического пространства как двумерного подпространства с общей системой координат. с базисом из двух неколлинеарных векторов (координатной плоскости);

- представление произвольной прямой геометрического пространства как одномерного подпространства с общей системой координат, с базисом из одного ненулевого вектора (координатной прямой).

- представление трехмерного векторного пространства как отдельной математической абстракции с собственной системой понятий, теорем, методом исследования.

3.2. **Становление векторного метода исследования пространственных свойств геометрических фигур:**

- представление указанной в исходной практической задаче геометрической фигуры как объекта подпространства конкретной размерности (прямая, плоскость, пространство) векторного пространства;

- построение изображения геометрической фигуры в условном изображении соответствующего подпространства по свойствам параллельного проектирования;

- выбор базиса соответствующего подпространства, в котором удобно представить в векторной форме компоненты геометрической фигуры (стороны, вершины, изображенные и достраиваемые отрезки), описать пространственные свойства фигуры;

- актуализация определения, признаков геометрической фигуры как объекта геометрического пространства;

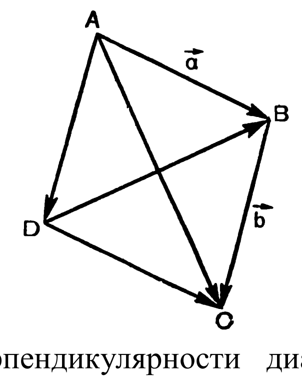
- разложение по векторам выбранного базиса векторов, характеризующих компоненты геометрической фигуры;

- построение векторной модели исходной практической задачи посредством перевода ее содержания и требования на язык векторной алгебры;

- исследование векторной модели средствами аппарата векторной алгебры (условиями равенства, коллинеарности, комплонарности векторов);

- интерпретация результатов исследования векторной модели с позиции содержания задачи.

Теорема. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.



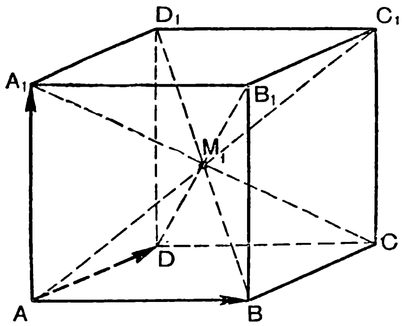
Требование взаимной перпендикулярности диагоналей ромба предполагает его исследование в двумерном евклидовом пространстве – с использованием свойств скалярного произведения векторов.

Для базисных векторов, определенных смежными сторонами ромба, их модули равны. Векторы, определенные диагоналями ромба, равны сумме и разности базисных векторов. Их скалярное произведение раскрывается по свойствам дистрибутивности и равно разности скалярных квадратов базисных векторов и, с учетом равенства модулей, обращается в нуль.

Теорема. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся пополам.

В прямоугольном параллелепипеде ребра, выходящие из одной вершины, определяют базис пространства, вершина становится центром общей системы координат в пространстве.

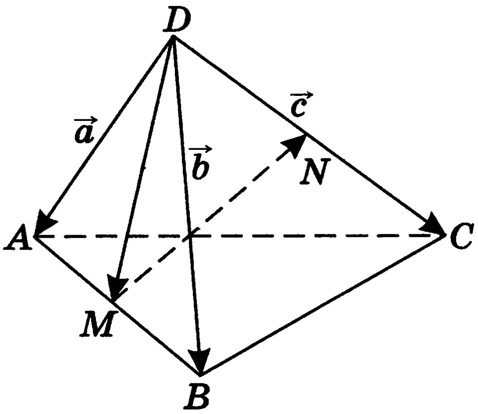
По векторам выбранного базиса можно разложить всякий вектор, определенный диагоналями параллелепипеда.



Если центр системы координат соединять с серединой каждой из диагоналей параллелепипеда, то векторы, определенные каждым из выделенных отрезков, также можно разложить по базисным векторам.

Из определения параллелепипеда противоположные ребра параллелепипеда равны и параллельны, т.е. определяют один из базисных векторов. Выделенный факт позволяет установить, что все разложения векторов, определенных отрезками, соединяющими центр системы координат и середину диагонали параллелепипеда, равны. Из равенства векторов с общим началом вытекает совпадение концов – середин диагоналей.

Задача. Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных ребер правильного тетраэдра, есть общий перпендикуляр этих ребер.



Задача исследует пространственную геометрическую фигуру – правильный тетраэдр, т.е. предполагает введение базиса из трех некомпланарных векторов, определенных ребрами тетраэдра, выходящими из вершины.

В задаче исследуемой геометрической фигурой является правильный тетраэдр, его грани являются правильными треугольниками, т. е. базисные векторы имеют равные модули и углы между векторами равны 60°.

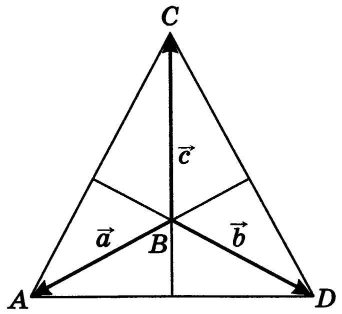
В выделенном базисе находится разложение вектора, определенного отрезком, соединяющим середины противоположных ребер тетраэдра, а также векторов, определенных ребрами основания.

Наличие в задаче условия перпендикулярности отрезков предполагает использование условия ортогональности векторов, т. е. нахождение тетраэдра не в векторном, а в трехмерном евклидовом пространстве.

В евклидовом пространстве возможно вычисление скалярного произведения вектора, определенного отрезком, соединяющим середины противоположных ребер тетраэдра и векторов, определенных соответствующими ребрами тетраэдра.

В условиях равенства нулю скалярных произведений со ссылкой на условие ортогональности векторов делается вывод о перпендикулярности отрезков.

Задача. Доказать, что если точки A, B, C, D таковы, что $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$, то $AD \perp BC$.



Пересекающиеся, точнее перпендикулярные прямые определяют плоскую геометрическую фигуру – треугольник.

Условия перпендикулярности прямых означают, что треугольник расположен в двумерном евклидовом пространстве – в плоскости с ортогональной системой координат, в которой справедливо условие ортогональности векторов.

Для построения векторной модели задачи необходимо выбрать базисные векторы так, чтобы через них было удобно выражать все необходимые векторы в треугольнике. Однако, если ограничиться только двумя векторами базиса, то разложение по ним векторов, определенных сторонами треугольника, будет затруднено. В условиях введения третьего вектора выражение векторов $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$ оказывается более простым.

Условие перпендикулярности прямых в треугольнике в терминах евклидова пространства имеют форму равенства нулю скалярных произведений соответствующих векторов. Из системы скалярных равенств легко следует равенство нулю скалярного произведения $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$, что означает перпендикулярность прямых.

Вывод. Доказательство теорем, решение задач векторным методом предполагает:

- сформированность деятельности в геометрическом пространстве на уровне определений понятий геометрических фигур, представления их свойств в форме основных теорем;

- уровень пространственных представлений, позволяющих проводить преобразования геометрических фигур, проводить дополнительные построения;

- владение аппаратом векторной алгебры как на абстрактных векторах, так и на векторах, определенных сторонами, ребрами геометрических фигур;

- знание векторных условий коллинеарности, комплонарности, ортогональности векторов.

Список литературы

1. Александров А.Д. Что такое вектор // Математика в школе. 1984. № 5. С. 39-46.
2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: Учебное пособие для учащихся 10-11 кл. с углуб. изуч. математики.- М.: Просвещение,1992.-464 с.
3. Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Векторное изложение геометрии (в 9 классе средней школы). Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982. 143 с.
4. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Векторное обоснование геометрии // В кн.: Новое в школьной математике. М.: Знание, 1972. С. 64-92.
5. Глейзер Г.Д. Психолого-математические основы развития пространственных представлений при обучении геометрии // В кн.: Преподавание геометрии в 9-10 классах. М.: Просвещение, 1980. С.253-269.
6. Горбачев В.И. Теория трехмерного евклидова пространства в методологии теоретического типа мышления // Ученые записки Орловского государственного университета. 2016. №1(70). С. 151-158.

7. Горбачев В.И. Теория геометрических фигур геометрического пространства в методологии теоретического типа мышления // Наука и школа. 2016. № 4. С. 132-144.
8. Гусев В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Векторы в школьном курсе геометрии. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. 48 с.
9. Колмогоров А.Н., Яглом И.М. О содержании школьного курса математики // Математика в школе. 1965. № 4. С.53-61.
10. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др.; Под ред. В.А. Гусева. М.: Издательский центр «Академия». 368 с.
11. Потоскуев Е.В. Векторно-координатный метод при решении стереометрических задач // Математика в школе. 1995. №1. С. 23-25.
12. Розенфельд Б.А. История развития содержания современного школьного курса геометрии // В кн.: Преподавание геометрии в 9-10 классах. М.: Просвещение, 1980. С.111-131.
13. Скопец З.А. Векторное решение стереометрических задач // В кн.: Преподавание геометрии в 9-10 классах. М.: Просвещение, 1980. С.184-230.
14. Яглом И.М. Аксиоматические обоснования геометрии // В кн.: Новое в школьной математике. М.: Знание, 1972. С. 40-63.
15. Яглом И.М. О школьном курсе геометрии // Математика в школе. 1963. № 2. С.53-57.
16. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. Научн. исслед. ин-т общей и пед. психологии Акад. пед. наук СССР. М.: Педагогика, 1980. 240 с.

Сведения об авторах

Сенченко Е.Д. – магистрант направления подготовки «Педагогическое образование», направленность «Математическое образование», Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского.

Горбачев В.И. – к.ф.-м.н., д.п.н., профессор, директор Естественно-научного института Брянского государственного университета имени акад. И.Г. Петровского, e-mail: enibgu@mail.ru.

LAWS OF THE STUDY OF GEOMETRIC FIGURES IN EUCLIDEAN SPACE

E.D. Senchenko, V.I. Gorbachev
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

Laws of formation of three-dimensional Euclidean space, vector method of study of geometric shapes are considered in the geometric space.

Keywords: *methods of teaching mathematics, geometry curriculum activities, Euclidean space, vector method.*

References

1. Aleksandrov A.D. Chto takoe vektor // Matematika v shkole. 1984. № 5. S. 39-46.
2. Aleksandrov A.D., Verner A.L., Ryzhik V.I. Geometrija: Uchebnoe posobie dlja uchashhihsja 10-11 kl. s uglub. izuch. matematiki. M.: Prosveshhenie, 1992.-464 s.
3. Boltjanskij V.G., Volovich M.B., Semushin A.D. Vektornoe izlozhenie geometrii (v 9 klasse srednej shkoly). Posobie dlja uchitelej. M.: Prosveshhenie, 1982. 143 s.
4. Boltjanskij V.G., Jaglom I.M. Vektornoe obosnovanie geometrii // V kn.: Novoe v shkol'noj matematike. M.: Znanie, 1972. S. 64-92.
5. Glejzer G.D. Psihologo-matematicheskie osnovy razvitija prostranstvennyh predstavlenij pri obuchenii geometrii // V kn.: Prepodavanie geometrii v 9-10 klassah. M.: Prosveshhenie, 1980. S.253-269.

6. Gorbachev V.I. Teorija trehmernogo evklidova prostranstva v metodologii teoreticheskogo tipa myshlenija // Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. 2016. №1(70). S. 151-158.

7. Gorbachev V.I. Teorija geometricheskih figur geometricheskogo prostranstva v metodologii teoreticheskogo tipa myshlenija // Nauka i shkola. 2016. № 4. S. 132-144.

8. Gusev V.A., Koljagin Ju.M., Lukankin G.L. Vektory v shkol'nom kurse geometrii. Posobie dlja uchitelej. M.: Prosveshhenie, 1976. 48 s.

9. Kolmogorov A.N., Jaglom I.M. O soderzhanii shkol'nogo kursa matematiki // Matematika v shkole. 1965. № 4. S.53-61.

10. Metodika obuchenija geometrii: Ucheb.posobie dlja stud. vyssh. ucheb. zavedenij / V.A. Gusev, V.V. Orlov, V.A. Panchishhina i dr.; Pod red. V.A. Guseva. M.: Izdatel'skij centr «Akademija». 368 s.

11. Potoskuev E.V. Vektorno-koordinatnyj metod pri reshenii stereometricheskih zadach // Matematika v shkole. 1995. №1. S. 23-25.

12. Rozenfel'd B.A. Istorija razvitija soderzhanija sovremennogo shkol'nogo kursa geometrii // V kn.: Prepodavanie geometrii v 9-10 klassah. M.: Prosveshhenie, 1980. S.111-131.

13. Skopec Z.A. Vektornoe reshenie stereometricheskih zadach // V kn.: Prepodavanie geometrii v 9-10 klassah. M.: Prosveshhenie, 1980. S.184-230.

14. Jaglom I.M. Aksiomaticheskie obosnovanija geometrii // V kn.: Novoe v shkol'noj matematike. M.: Znanie, 1972. S. 40-63.

15. Jaglom I.M. O shkol'nom kurse geometrii // Matematika v shkole. 1963. № 2. S.53-57.

16. Jakimanskaja I.S. Razvitie prostranstvennogo myshlenija shkol'nikov. Nauchn. issled. in-t obshhej i ped. psihologii Akad. ped. nauk SSSR. M.: Pedagogika, 1980. 240 s.

About authors

Senchenko E.D. – graduate student, Department of Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Gorbachev V.I. – Doctor of Education, professor, Director of Institute of Natural Sciences, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky. e-mail: enibgu@mail.ru

УДК 371.24+371.212

СТАНОВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ И ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Г.А. Титарева, В.И. Горбачев
Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского

В работе исследуются модели теории функций на объектах геометрического и векторного пространств. Функциональная модель пространства геометрических фигур определена классами функций меры, проектирования, преобразований движения и подобия. Классами функций трехмерного евклидова пространства выступают сложение векторов, умножение действительного числа на вектор, скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, аналитическое соответствие.
Ключевые слова: *методика обучения математике, функции в общеобразовательном курсе математики, модельный подход в изучении теории функций.*

В общеобразовательных курсах геометрии, алгебры и начал анализа на базе общих понятий теории функций в системе математических теорий числовых систем, геометрических фигур, векторного пространства, булевой алгебры, вероятностей выделяются важные классы функций (предметные модели общей теории функций): теория отображений, теория преобразований, теория операторов, теория меры, теория булевых функций, теория числовых дискретных функций, теория числовых непрерывных функций [5, 6, 7]. Лишь теория числовых непрерывных функций в курсе алгебры и начал анализа связана с фундаментальным понятием функции, что обедняет как представления целостного функционального пространства, так и способы описания геометрического, векторного, предикатного, вероятностного пространств [10,12, 20]. .

Предметом модельно-теоретического развития теории функций выступает исследование закономерностей функционального пространства в спектре предметных функциональных моделей [15,18]:

- анализ, доказательство общефункциональных и специфических свойств классов функций определенной функциональной модели, опосредованных свойствами соответствующего пространства;
- описание свойств пространства в содержании классов функций соответствующей предметной функциональной модели;
- структурное представление функциональной модели в системе определений, теорем общей теории функций и в системе специфических свойств, обоснованных закономерностями предметного пространства;
- интегральное представление функционального пространства в спектре функциональных моделей, их свойств, приложений.

Содержанием модельно-теоретического представления функций выступает системное структурирование функционального пространства [11,16, 21]:

- выделением классов функций, их «имен» на объектах ранее представленных теорий с фиксацией функциональных свойств;
- анализом функциональных характеристик классов функций (арности, областей определения, значений, характера функциональных зависимостей);
- установлением свойств классов функций, обоснованных спецификой объектов теории;
- анализом роли функций в исследовании свойств классов объектов, свойств теории;
- представления операций композиции, комбинирования, обращения в качестве общефункциональных;

- фиксацией форм и способов записи функциональных зависимостей в рамках представленной теории.

В предметной математической теории построение, исследование конкретной функциональной модели характеризуются обобщенными действиями закономерного плана [5,6]:

- анализа базовых классов объектов предметной теории в единстве с операциями, отношениями и их свойствами;
- выделения именованных понятиями предметной теории основных классов функций на основе характеристических свойств определенности и функциональности, обоснованных свойствами операций на классах объектов;
- формализации специфических для функциональной модели свойств каждого из выделенных классов функций на основе операций, отношений предметной теории;
- конструирования операций композиции, произведения, суммы, обращения на выделенных классах функций предметной теории;
- исследования фундаментальных свойств конечности-бесконечности, дискретности-непрерывности классов функций предметной теории;
- функциональной трактовки и обоснования основных результатов предметной теории для анализа роли функциональных зависимостей в ее построении;
- целостного представления классов функций предметной теории, их свойств, значимости в развитии теории – функциональной модели предметной теории.

Анализ пространственно-векторной, пространственно-точечной, пространственно-метрической, векторно-координатной, вероятностной, логической функциональных моделей на абстрактных классах объектов конкретных математических теорий позволяет установить целостную модельно-теоретическую структуру функций, выделить как общую для всех теорий систему понятий-категорий, так и обоснованную классами объектов специфическую систему свойств (рис. 1).

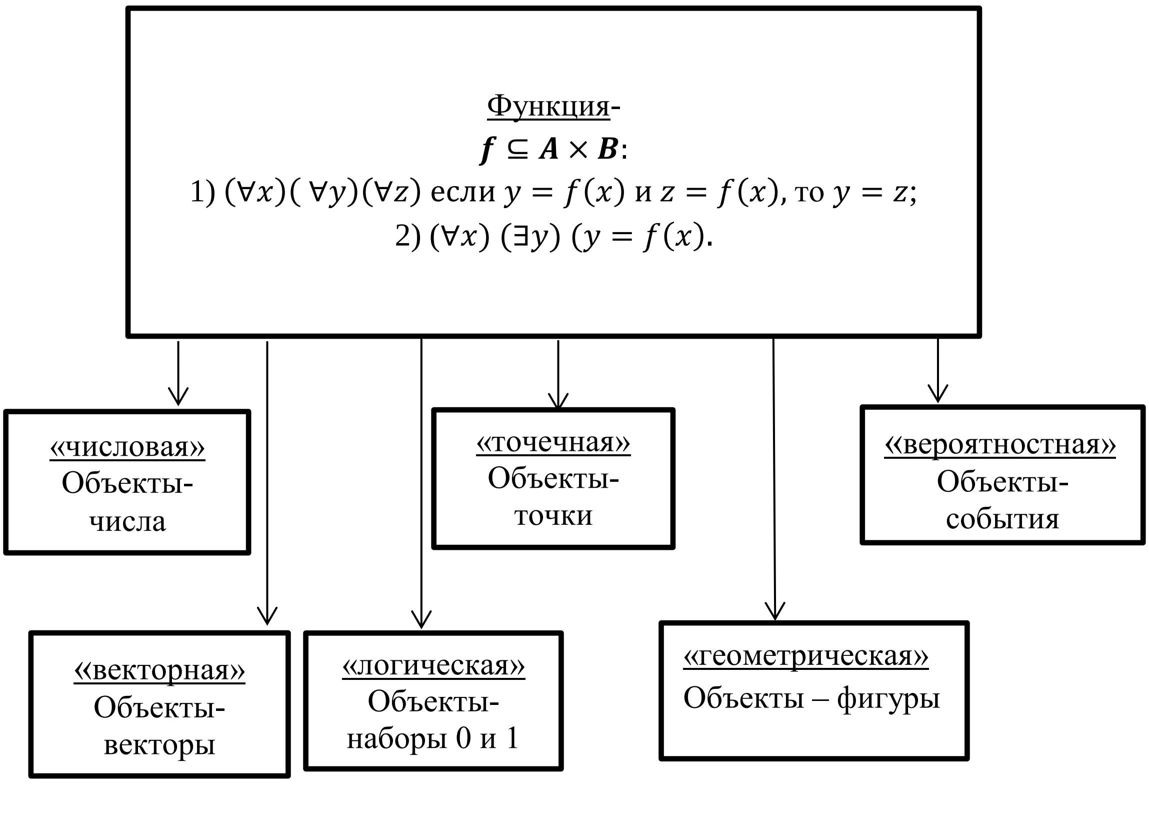


Рис. 1. Структура «имен» понятия функции

Пространственно-точечная модель теории функций – класс $F = \{\varphi | \varphi: \pi \to \pi\}$ всех преобразований $\varphi: \pi \to \pi$ фиксированной плоскости π точечного геометрического пространства V с фундаментальными свойством биективности, операциями композиции, обращения.

В качестве примеров преобразований плоскости А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик [1, 2] приводят преобразование симметрии относительно точки O, преобразование симметрии относительно прямой g, гомотетии относительно центра O. Обобщением преобразований симметрии выступает фундаментальное в геометрической деятельности понятие движения – такого преобразования $\varphi_1: \pi \to \pi$, для которого из условий $\varphi_1(X_1) = Y_1$, $\varphi_1(X_2) = Y_2$ следует, что $|Y_1Y_2| = |X_1X_2|$. В конструктивном плане на множестве движений вводится операция композиции – последовательного выполнения движений, фиксируется факт сохранения расстояний: «два движения, выполненные последовательно, дают снова движение» [2,с.119]. Для преобразования плоскости $\varphi: \pi \to \pi$, такого, что из условий $\varphi(X_1) = Y_1, \varphi(X_2) = Y_2, X_1 \neq X_2$ следует, что $Y_1 \neq Y_2$, вводится понятие обратного преобразования, при этом преобразование, обратное движению, является также движением.

Новым важным классом преобразований плоскости выступают преобразования подобия: «Преобразование фигуры F в фигуру F' называется преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз» [2, с. 120]. Преобразование гомотетии является примером подобия, пример композиции гомотетии и движения показывает, что класс преобразований подобия существенно шире.

Значимость выделенных классов преобразований плоскости определяется введением фундаментальных понятий геометрического пространства – равенства и подобия на множестве геометрических фигур:

- две фигуры называются равными, если они движением переводятся одна в другую;
- две фигуры называются подобными, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Введенные понятия выступают основой признаков равенства и подобия геометрических фигур, их доказательство осуществляется методом преобразований – использования в доказательстве процедур преобразований плоскости, при которых сравниваемые фигуры совпадают. Метод преобразований оказывается важным средством решения задач исследования, конструирования геометрических фигур, направлен на формирование пространственного мышления субъекта [8,13, 19].

Не только категории геометрического равенства и подобия определяют математическую значимость преобразований плоскости и пространства. Преобразование плоскости $\varphi: \pi \to \pi$ – функция на множестве всех точек плоскости, причем, обладающая свойством биективности и, в рамках общефункциональных представлений, обратимости. Преобразования равенства и подобия составляют важные классы функций со своей, специфической системой свойств, их подклассы (симметрий, параллельных переносов, поворотов, гомотетий) с операцией композиции формируют представления о спектре классов функций, заданных на множествах точек геометрического пространства.

Пространственно-точечная модель теории функций выделена для представления геометрического пространства точечным с целью введения, обоснования фундаментальных понятий равенства, подобия на множестве геометрических фигур, существенного расширения представлений геометрического пространства [3,4, 17,23]:

- геометрические фигуры – определенные множества точек, допускающие конструктивные, аналитические преобразования симметрии, параллельного переноса, вращения, гомотетии, их композиции, обращения;
- в содержании общего класса функций движения в геометрическом пространстве выделяются функциональные подклассы преобразований осевой симметрии, параллельного переноса, вращения, скользящей симметрии;

- фундаментальное понятие равенства геометрических фигур вводится существованием движения, переводящего одну фигуру в другую, при этом биективность, обратимость функции движения позволяет рассматривать геометрическую фигуру как класс эквивалентности, сохраняя представление геометрической фигуры в геометрическом пространстве;

- доказательство важных в изучении пространственных, конструктивных, метрических свойств признаков равенства геометрических фигур основано на использовании преобразований, свойств симметричности, транзитивности движения;

- в содержании функционального понятия подобия в геометрическом пространстве выделяются базовые подклассы функций преобразований гомотетии, центрально-подобного вращения, центрально-подобной симметрии, исследуются их пространственные, конструктивные свойства;

- фундаментальное понятие подобия на множестве геометрических фигур вводится существованием преобразования подобия, переводящего одну геометрическую фигуру в другую, именно такое представление подобия выступает основой признаков подобия, конструктивных и аналитических преобразований геометрических фигур;

- функциональная основа представления преобразований движения, подобия позволяет выразить всякое преобразование подобия в виде композиции движения и гомотетии, провести классификацию преобразований движения, подобия;

- классы функций движения, подобия приводят к становлению метода преобразований в исследовании пространственных, метрических, конструктивных свойств геометрических фигур.

Пространственно-метрическая модель теории функций – теория функций меры (длины, угловой величины, площади, объема) на множестве геометрических фигур геометрического пространства в содержании аксиоматического метода, метода предельного перехода [2, 13,22, 23]. Содержание функциональной модели составляют:

Функция длины $l{:}\,L \to R$ на множестве L отрезков, ее расширение $l{:}\,L^{*} \to R$ на множестве $L*$ линий. В деятельности представливания функция длины задается в форме приписывания отрезку его длины (неотрицательного действительного числа), в теории геометрического пространства функция вводится в системе аксиом неотрицательности, аддитивности, наличия единицы измерения. Понятие длины отрезка расширяется в понятии длины плоской линии $l(ABC) = \lim\limits_{n\to\infty} l(P_n)$ как предела суммы длин отрезков ломаной при условии, что число отрезков неограниченно увеличивается. Этот факт позволяет определить длину окружности как предел периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность.

Функция угловой величины $\varphi{:}\,F \to R$ на множестве F углов между прямыми, ее расширение $\varphi{:}\,F^{*} \to R$ на множестве $F*$ углов между линиями, задаются аналогично функциям длины и в деятельности представливания, и в теории геометрического пространства. Различие в областях определения, радианные значения функций угловых величин не устраняют задачи поиска их взаимных связей. Теоремы синусов, косинусов устанавливают связь линейных и угловых величин в треугольниках и их конструкциях.

Аксиоматизируемая функция площади $s{:}\,S \to R$ на множествах многоугольников, функция $s{:}\,S^{*} \to R$ предельного перехода на множестве плоских фигур задают все способы вычисления площадей плоских фигур – как многоугольников, так и круглых тел. Общий подход к введению метрических понятий выступает основой вывода площадей плоских фигур, зависящих от функций длины и угловой величины.

Функция объема $v{:}\,W \to R$**,** заданная в теории геометрического пространства на множестве многогранников аксиоматически, и ее предельное расширение в форме $v{:}\,W^{*} \to R$ функции объема тел позволяют вычислить объемы призм, пирамид, конусов, цилиндров, шаров, их комбинаций. Формула вычисления объема пирамиды показывает аналитическую зависимость функции объема от линейной, угловой величин, площади основания, демонстрирует закономерности поиска всех метрических характеристик фигуры по части известных в содержании метрического компонента пространственного мышления.

Пространственно-метрическая модель теории функций направлена на представление геометрического пространства метрическим, с фундаментальными понятиями длины, величины угла, площади, объема в их взаимных связях:

- в представлении геометрической фигуры как класса абстрактных объектов геометрического пространства ее метрические характеристики отсутствуют, однако в отражении метрических характеристик объектов реального пространства соответствие геометрической фигуры и численных значений функций длины, угловой величины, площади, объема, устанавливается в процедуре приписывания;

- введению функций меры в геометрическом пространстве предшествует его разбиение на классы плоских линий, углов между ними, плоских фигур, пространственных тел для целей задания функций с разными областями определения;

- в представлении геометрического пространства функции меры вводятся в форме приписывания: классу линий ставится в соответствие множество длин, классу углов – угловых величин, классу плоских фигур – площадей, классу тел – объемов;

- в теоретическом обосновании закономерностей геометрического пространства функции меры вводятся в процедуре аксиоматизации свойств неотрицательности, аддитивности, задания единицы меры на множествах отрезков, углов между прямыми, многоугольников, многогранников и, затем, в содержании предельного перехода на соответствующих множествах линий, углов между линиями, плоских фигур, пространственных тел;

- пространственное представление функции длины в системе конструктивных, пространственных свойств на множестве геометрических фигур развивается в ее аксиоматическом определении на множестве отрезков, последующем расширении введением понятия длины линии в предельном переходе системы действительных чисел, вычислении длины окружности;

- пространственное представление функции величины угла между прямыми свое продолжение имеет в аксиоматическом введении понятия величины плоского угла, изучении классических фактов евклидовой геометрии о конструктивных, пространственных свойствах угловой меры на множестве геометрических фигур, в предельном переходе приводит к понятию угла между линиями;

- анализ теорем евклидовой геометрии позволяет сделать вывод о взаимной связи функций длины и величины угла в классах геометрических фигур;

- пространственное представление площади на множестве многоугольников, круглых тел в теоретическом плане обосновывается аксиоматическим введением понятия площади многоугольника, расширением функции площади введением понятия площади плоской фигуры в предельном переходе, вычисление площади круга, площади поверхности сферы;

- в теоремах, задачах исследования метрических характеристик геометрических фигур на плоскости фиксируется факт взаимной связи функций площади, длины и величины угла, метрических и пространственных свойств геометрических фигур;

- пространственное представление функции объема на множестве пространственных фигур развивается в аксиоматическом введении понятия объема многогранника, расширении функции объема введением понятия объема тела в предельном переходе, вычислении объемов круглых тел;

- в теоремах евклидовой геометрии устанавливается взаимная связь введенных независимо всех метрических характеристик геометрических фигур, их конструктивных, пространственных и метрических свойств в представлении геометрического пространства;

-в содержании пространственно-метрической модели теории функций достигается задача формирования метрического компонента пространственного мышления.

Пространственно-векторная модель в функциональном пространстве представлена [4,9,23]:

- функциями двух переменных – операциями сложения векторов, умножения числа на вектор, скалярного и векторного произведений векторов;

- функциями одной переменной – длины вектора, откладывания вектора, соответствия (изоморфизма) векторного и арифметического пространств;

- композициями функций – линейной комбинации векторов, вычисления суммы векторов, смешанного произведения векторов.3

Базовыми в общеобразовательном курсе геометрии выступают функции сложения векторов, умножения вектора на число, скалярного произведения векторов, в планет углубленного изучения геометрии – векторного и смешанного произведений. А.Д. Александров [2, с.218] сначала определяет процесс откладывания вектора от точки: «построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор», после чего вводит операцию сложения векторов через правило треугольника. На функциональном языке операция будет задавать функцию $f_1: V \times V \to V, f_1(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} + \overline{b}$, обладающую свойствами коммутативности и ассоциативности.

Функция умножения вектора на число представляет собой целый класс $f_2: \mathbb{R} \times V \to V, f_2(k, \overline{a}) = k\overline{a}$. Функции сложения векторов и умножения вектора на число позволяют решить вопрос разложения векторов пространства по векторам базиса. Кроме того, они составляют основу векторной алгебры и позволяют решать задачи исследования геометрических фигур векторным методом.

Следующий важный класс функций векторного пространства – это класс функций скалярного умножения векторов. А.Д. Александров [2, с.231] скалярным произведением двух ненулевых векторов называет «произведение их длин на косинус угла между ними». В функциональном плане скалярное произведение задает функцию $f_3: V \times V \to \mathbb{R}, f_3(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b}$. Эта функция в трехмерном евклидовом пространстве позволяет находить углы между ненулевыми векторами, их длины, исследовать метрические свойства геометрических фигур.

Л.С. Атанасян [3, с.163-170] рассматривает векторное и смешанное произведение векторов, определяющие новые классы функций: $f_4: V \times V \to V, f_4(\overline{a}, \overline{b}) = [\overline{a}\overline{b}]$ – класс функций векторного произведения и $f_5: V \times V \times V \to \mathbb{R}$, $f_5(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$ – класс функций смешанного произведения, который представляет собой композицию функций скалярного и векторного произведений. Они позволяют исследовать метрические характеристики фигур.

Для установления соответствия трехмерного евклидова пространства и арифметического пространства важную роль играет функция аналитического соответствия $\boldsymbol{g_3}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{R^3}$, такая, что $g_3(\overline{a}) = (x_1, y_1, z_1)$.

Пространственно-векторная функциональная модель реализует фундаментальную задачу формирования представлений трехмерного векторного, евклидова пространств с векторным, координатным методами исследования геометрических фигур:

- на базе определения функций двух переменных (сложения векторов и произведения числа на вектор), их конструктивных и аналитических свойств устанавливается справедливость аксиом трехмерного векторного пространства с фундаментальным понятием базиса;

- функция скалярного произведения векторов позволяет наделить векторное пространство структурой евклидова пространства с возможностью измерения длины, величины угла на множестве векторов;

- функции откладывания вектора и аналитического соответствия позволяют ввести понятия аффинной и ортонормированной систем координат с возможностью разложения векторов пространств по базисным, характеризации векторов, точек пространств их координатами;

- базовые свойства коллинеарности, комплонарности, ортогональности векторов евклидова пространства приобретают функциональную форму представленности, становятся свойствами соответствующих векторных функций;

- в системе векторных функций евклидова пространства осуществляется аналитическое описание базовых фигур геометрического пространства (прямых, окружностей, плоскостей), исследование их взаимного расположения в конструктивной, векторной формах, на их основе – исследование пространственных свойств геометрических фигур;

- средствами функций скалярного, векторного произведений векторов, их композиции (смешанного произведения векторов) в пространственно-векторной модели проводится исследование всех метрических понятий геометрического пространства – длины отрезка, величины угла, площади многоугольника, объема многогранника.

Векторно-координатная (аналитическая) модель в функциональном пространстве устанавливает соответствие трехмерного евклидова пространства и арифметического пространства R^3, позволяет построить векторную модель геометрической фигуры, и, в условиях выбора аффинной или прямоугольной систем координат, по векторной модели геометрической фигуры переходом к координатной форме построить ее аналитическую модель с последующим исследованием аналитическим методом:

- функция векторного соответствия позволяет на сторонах многоугольника, ребрах многогранника целесообразно выбрать базис, разложить по базисным векторам все векторы геометрической фигуры, построить ее векторную модель;

- функция векторно-координатного соответствия по векторной модели геометрической фигуры позволяет построить ее координатную модель, в координатных условиях коллинеарности, ортогональности, комплонарности провести исследование пространственных, метрических свойств геометрической фигуры;

- композиции функций аналитического соответствия направлены на построение, исследование аналитических моделей базовых классов геометрических фигур (прямых, плоскостей, линий, поверхностей) в арифметическом пространстве, средствами аналитических моделей базовых фигур провести исследование плоских, пространственных фигур.

Пространственно-векторная и векторно-координатная (аналитическая) функциональные модели обосновывают методологическую схему «геометрическое пространство – векторное пространство – евклидово пространство – арифметическое пространство» последовательного исследования пространственных, конструктивных, метрических свойств геометрических фигур. В условиях такого системного исследования геометрической фигуры средствами функциональных моделей в каждом из пространств к ней применяются аналитико-синтетический (геометрическое пространство), векторный (векторное пространство), координатный (евклидово пространство), аналитический (арифметическое пространство) методы, чем достигается целостный спектр ее свойств.

Для целей развития представлений функционального пространства опыт выделения функциональных моделей предметных теорий алгебры, геометрии впоследствии обобщается на этапе модельно-теоретических представлений в сочетании абстрактных алгебраических определений категорий функции, композиции, обращения, дискретности, непрерывности и их модельных конкретизаций. В результате становится технологичным отмеченное Г.В. Дорофеевым преимущество модельно-абстрактного подхода к понятию функции: «возможность рассматривать не только числовые функции числового аргумента, но и функции, определенные на множествах объектов произвольной природы и принимающих значения, являющиеся объектами также произвольной природы» [10, с. 12].

С позиций содержательно-теоретического подхода к изучению функционально-графической линии важными выступают не только числовая функциональная модель, но и все функциональные модели геометрического, векторного, числового, вероятностного пространств, интегрируемые в содержании представлений общей теории функций. Выделенные же закономерности модельно-геометрической функциональной деятельности определяет процесс ее формирования в системе учебных задач:

1. Представление пространственно-векторной функциональной модели с векторным методом исследования объектов геометрического пространства:

2. - выделение базовых классов функций оперирования над векторами, их свойств в условиях отождествления геометрического пространства с трехмерным евклидовым пространством;

- описание свойств трехмерного евклидова пространства в системе базовых функций пространственно-векторной функциональной модели, их композиций;

- исследование пространственных, метрических свойств геометрических фигур средствами базовых функций пространственно-векторной функциональной модели в содержании векторного метода;

3. Представление пространственно-точечной функциональной модели, исследование геометрических фигур методом преобразований геометрического пространства:

- выделение базовых классов биективных функций преобразований геометрического пространства в его представлении точечным, преобразований движения, подобия;

- классификация преобразований движения, подобия в функциональных операциях композиции, обращения;

- функциональный способ введения понятий равенства, подобия на множестве геометрических фигур, исследование признаков равенства, подобия в классах геометрических фигур;

- конструирование, исследование геометрических фигур методом преобразований геометрического пространства;

- представление пространственно-точечной функциональной модели с позиции общего понятия функции в функциональном пространстве.

4. Представление пространственно-метрической функциональной модели, исследование метрических свойств фигур геометрического пространства:

- абстрагирование процедур измерения величин реального пространства в понятиях функций длины отрезка, величины угла, площади многоугольника, объема тела геометрического пространства, аксиоматизация функциональных метрических понятий в теории геометрического пространства;

- расширение функциональных метрических понятий в содержании предельного перехода во множестве действительных чисел;

- исследование взаимной связи метрических функций в различных классах геометрических фигур, связи метрических функций с функциями пространственно-точечной модели;

- сравнение метрических функций геометрического пространства и их определения, методов вычисления в пространственно-векторной модели, в содержании векторно-координатного метода исследования геометрических фигур.

5. Представление векторно-координатной функциональной модели с векторно-координатным (аналитическим) методом исследования объектов геометрического пространства:

- выделение классов функций аналитического соответствия в условиях отождествления геометрического пространства с евклидовым введением прямоугольной декартовой системы координат;

- описание классов прямых, линий, плоскостей, поверхностей функциями аналитического соответствия в форме аналитических моделей, исследование моделей алгебраическими средствами, интерпретация результатов исследования в системе пространственных, метрических свойств геометрического пространства;

- исследование геометрических фигур векторно-координатным методом – средствами аналитических моделей составляющих фигуры прямых, линий, плоскостей, поверхностей в интегрированном (геометрическом, евклидовом, арифметическом) пространстве;

- интегральное представление пространственно-векторной, пространственно-точечной, пространственно-метрической и векторно-координатной функциональных моделей с соответствующими методами исследования геометрических фигур в целостном представлении геометрического пространства.

Список литературы

1. Александров А.Д. О геометрии // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56-62.
2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: Учебное пособие для учащихся 10-11 кл. с углуб. изуч. математики. М.: Просвещение,1992. 464 с.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч.I. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов.- М.: Просвещение, 1986. 336с.
4. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Векторное обоснование геометрии // В кн.: Новое в школьной математике. М.: Знание, 1972. С. 64-92.
5. Горбачев В. И. Теория функций в методологии теоретического типа мышления: теоретико-модельные представления уровня общего образования // Вестник Брянского государственного университета: Исторические науки и археология /литературоведение/ языкознание/ педагогические науки. Брянск: РИО БГУ. 2016. № 1 (27). С. 336-343.
6. Горбачев В.И. Теория функций в методологии теоретического типа мышления: содержание учебной деятельности уровня общего образования// Вестник Брянского государственного университета: Исторические науки и археология /литературоведение/ языкознание/ педагогические науки. Брянск: РИО БГУ. 2016. № 3 (29). С. 204.
7. Горбачев В.И. Теория трехмерного евклидова пространства в методологии теоретического типа мышления // Ученые записки Орловского государственного университета. 2016. №1(70). С. 151-158.
8. Горбачев В.И. Теория геометрических фигур геометрического пространства в методологии теоретического типа мышления // Наука и школа. 2016. № 4. С. 132-144.
9. Гусев В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Векторы в школьном курсе геометрии. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. 48 с.
10. Дорофеев Г.В. Понятие функции в математике и в школе // Математика в школе. 1978. № 2. С. 10-27. О принципах отбора содержания школьного математического содержания // Математика в школе. 1990. № 6. – С. 2-5. Ъ
11. Гуманитарно-ориентированный курс – основа учебного предмета математика в общеобразовательной школе // Математика в школе. 1997. № 4. С. 59-66.
12. Колмогоров А.Н. Что такое функция // Математика в школе. 1978. № 2. – С. 27-29.
13. Колмогоров А.Н., Яглом И.М. О содержании школьного курса математики // Математика в школе. 1965. № 4. С.53-61.
14. Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия. Учебное пособие для 6-8 классов средней школы. М.: Просвещение,1980. 382 с.
15. Мордкович А.Г. Новая концепция школьного курса алгебры // Математика в школе. 1996. № 6. С. 28-33.
16. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения элементов анализа в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. № 9. С. 2-12.
17. Новоселов С.И. Учение о функциях в средней школе // Математика в школе. 1947. № 5-6. С. 22-38.
18. О дискуссионных вопросах, связанных с учением о функциях в школьном курсе // Математика в школе. 1954. № 4. С. 43-46.
19. Глейзер Г.Д. Стандарт математического образования: сущность и проблемы к обсуждению // Математика в школе. 1994. № 2. С. 2-4.
20. Маркушевич А.И. Понятие функции // Математика в школе. 1947. № 4. С. 1-16.

21. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др.; Под ред. В.А. Гусева. М.: Издательский центр «Академия». 368 с.
22. Концепция математического образования (в 12-летней школе) // Математика в школе. 2000. № 2. С. 13-18.
23. Виленкин Н.Я., Блох А.Я. Элементарные функции в школьном курсе математики // Математика в школе. 1978. № 3. С. 53-57.
24. Яглом И.М. Аксиоматические обоснования геометрии // В кн.: Новое в школьной математике. М.: Знание, 1972. С. 40-63.
25. Яглом И.М. О школьном курсе геометрии // Математика в школе. 1963. № 2. С.53-57.

Сведения об авторах

Титарева Г.А. – магистрант направления «Педагогическое образование», направленность «Математическое образование», Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского.

Горбачев В.И. – к.ф.-м.н., д.п.н., профессор, директор Естественно-научного института Брянского государственного университета имени акад. И.Г. Петровского, enibgu@mail.ru.

THE DEVELOPMENT OF MODELS OF THE THEORY OF FUNCTIONS IN GEOMETRIC AND VECTOR SPACES

G.A. Titareva, V.I. Gorbachev
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

The article presents models of the theory of functions on objects of geometric and vector spaces. Functional model of the space of geometric shapes is defined by classes of functions measure, design, motion conversion and similarity. Classes of functions of three-dimensional Euclidean space are the addition of vectors, multiplication of a real number by a vector, scalar, vector, mixed multiplication of vectors, analytical line.
Keywords: *methods of teaching mathematics, functions in the general education mathematics course, the model approach in the study of the theory of functions.*

References

1. Aleksandrov A.D. O geometrii // Matematika v shkole. 1980. № 3. S. 56-62.
2. Aleksandrov A.D., Verner A.L., Ryzhik V.I. Geometrija: Uchebnoe posobie dlja uchashhihsja 10-11 kl. s uglub. izuch. matematiki. M.: Prosveshhenie,1992. 464 s.
3. Atanasjan L.S., Bazylev V.T. Geometrija. V 2-h ch. Ch.I. Ucheb.posobie dlja studentov fiz.-mat. fak. Ped. in-tov. M.: Prosveshhenie, 1986. 336s.
4. Boltjanskij V.G., Jaglom I.M. Vektornoe obosnovanie geometrii // V kn.: Novoe v shkol'noj matematike. M.: Znanie, 1972. S. 64-92.
5. Gorbachev V. I. Teorija funkcij v metodologii teoreticheskogo tipa myshlenija: teoretiko-model'nye predstavlenija urovnja obshhego obrazovanija // Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta: Istoricheskie nauki i arheologija /literaturovedenie/ jazykoznanie/ pedagogicheskie nauki. – Brjansk: RIO BGU. 2016. №1 (27). S. 336-343.
6. Gorbachev V.I. Teorija funkcij v metodologii teoreticheskogo tipa myshlenija: soderzhanie uchebnoj dejatel'nosti urovnja obshhego obrazovanija// Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta: Istoricheskie nauki i arheologija /literaturovedenie/ jazykoznanie/ pedagogicheskie nauki. Brjansk: RIO BGU. 2016. № 3 (29). S. 204 – 2011.

7. Gorbachev V.I. Teorija trehmernogo evklidova prostranstva v metodologii teoreticheskogo tipa myshlenija // Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. 2016. №1(70). S. 151-158.

8. Gorbachev V.I. Teorija geometricheskih figur geometricheskogo prostranstva v metodologii teoreticheskogo tipa myshlenija // Nauka i shkola. 2016. № 4. S. 132 – 144.

9. Gusev V.A., Koljagin Ju.M., Lukankin G.L. Vektory v shkol'nom kurse geometrii. Posobie dlja uchitelej. M.: Prosveshhenie, 1976. 48 s.

10. Dorofeev G.V. Ponjatie funkcii v matematike i v shkole // Matematika v shkole. 1978. № 2. S. 10-27. O principah otbora soderzhanija shkol'nogo matematicheskogo soderzhanija // Matematika v shkole. – 1990. – №6. S. 2-5.

11. Gumanitarno-orientirovannyj kurs – osnova uchebnogo predmeta matematika v obshheobrazovatel'noj shkole // Matematika v shkole. 1997. №4. S. 59-66.

12. Kolmogorov A.N. Chto takoe funkcija // Matematika v shkole.1978. № 2. S. 27-29.

13. Kolmogorov A.N., Jaglom I.M. O soderzhanii shkol'nogo kursa matematiki // Matematika v shkole. 1965. № 4. S.53-61.

14. Kolmogorov A.N., Semenovich A.F., Cherkasov R.S. Geometrija. Uchebnoe posobie dlja 6-8 klassov srednej shkoly. M.: Prosveshhenie,1980. 382 s.

15. Mordkovich A.G. Novaja koncepcija shkol'nogo kursa algebry // Matematika v shkole. 1996. №6. S. 28-33.

16. Mordkovich A.G. Metodicheskie problemy izuchenija jelementov analiza v obshheobrazovatel'noj shkole // Matematika v shkole. 2002. № 9. S. 2-12.

17. Novoselov S.I. Uchenie o funkcijah v srednej shkole // Matematika v shkole.1947. № 5-6. S. 22-38.

18. O diskussionnyh voprosah, svjazannyh s ucheniem o funkcijah v shkol'nom kurse //Matematika v shkole. 1954. № 4. S. 43-46.

19. Glejzer G.D. Standart matematicheskogo obrazovanija: sushhnost' i problemy k obsuzhdeniju //Matematika v shkole. 1994. № 2. S. 2-4.

20. Markushevich A.I. Ponjatie funkcii // Matematika v shkole. 1947. № 4. S. 1-16.

21. Metodika obuchenija geometrii: Ucheb.posobie dlja stud. vyssh. ucheb. zavedenij / V.A. Gusev, V.V. Orlov, V.A. Panchishhina i dr.; Pod red. V.A. Guseva. M.: Izdatel'skij centr «Akademija». 368 s.

22. Koncepcija matematicheskogo obrazovanija (v 12-letnej shkole) // Matematika v shkole. – 2000. №2. S. 13-18.

23. Vilenkin N.Ja., Bloh A.Ja. Jelementarnye funkcii v shkol'nom kurse matematiki //Matematika v shkole. 1978. № 3. S. 53-57.

24. Jaglom I.M. Aksiomaticheskie obosnovanija geometrii // V kn.: Novoe v shkol'noj matematike. M.: Znanie, 1972. S. 40-63.

25. Jaglom I.M. O shkol'nom kurse geometrii // Matematika v shkole. 1963. № 2. S.53-57.

About authors

Titareva G.A. – graduate student, Department of Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Gorbachev V.I. – Doctor of Education, professor, Director of Institute of Natural Sciences, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e- mail: enibgu@mail.ru.

УДК 519.6

ОПИСАНИЕ НОВЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИТЕРАЦИОННОЙ ОБРАБОТКОЙ

С.В. Трубников
Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского

Описан новый класс численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: *численные методы; краевые задачи; обыкновенные дифференциальные уравнения*

В 2006 году был предложен новый подход к построению численных методов решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на аппроксимации приближенного решения с помощью кусочно-полиномиальной интерполяции многочленами Эрмита 5 порядка, а также на принципе обнуления невязки. С помощью этого подхода, в качестве примера, построен новый численный метод для решения одномерной задачи Коши, названный исправленным методом Эйлера с итерационным уточнением [5]. С 2006 по 2016 годы этот подход был неоднократно обобщён и применён к построению новых численных методов для решения задач Коши и граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [6-10].

Если в исправленном методе Эйлера с итерационным уточнением заменить многочлен Эйлера 5 порядка многочленами других нечётных порядков (3, 7, 9 и т. д.), то можно получить несколько аналогичных новых вычислительных схем с итерационной обработкой.

Для получения начальных приближений в исправленном методе Эйлера с итерационным уточнением использована формула Тейлора. Но вместо неё можно воспользоваться вычислительными схемами любых известных численных методов решения задач Коши [1], [3], [4]. Таким путём можно получить соответствующие новые вычислительные методы с итерационной обработкой.

В данной работе описаны некоторые из упомянутых новых численных методов.

Опишем вначале численные методы решения задач Коши, полученные с помощью формулы Тейлора с добавлением итерационной обработки на основе эрмитовой интерполяции и принципе обнуления невязки.

Рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ x \in [a,b], \tag{1}$$

$$y(a) = \bar{y}, \tag{2}$$

где a, b ($a<b$), $\bar{y}$ - заданные постоянные, $f(x,y)$ - заданная функция такая, что существуют ее непрерывные частные производные до необходимого по ходу изложения порядка, а задача Коши (1), (2) имеет единственное решение, которое мы в дальнейшем будем называть точным решением этой задачи и будем обозначать $y(x)$.

Сделаем в задаче (1), (2) замену переменных. Пусть m - заданное натуральное число. Величину $h = \frac{b-a}{m}$ будем называть шагом. Введем новую переменную t, связанную с переменной x биективным отношением:

$$x = a + h \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{x-a}{h}. \tag{3}$$

Введём функцию $u(t)$, связанную с функцией $y(x)$ отношением:

$$u(t)=y(a+h\cdot t)\Leftrightarrow y(x)=u\left(\frac{x-a}{h}\right). \qquad (4)$$

Преобразуем задачу Коши (1), (2), используя новые переменные t и u и получим следующую задачу Коши:

$$\frac{du}{dt}=\tilde{f}(t,u),\ t\in[0,m], \qquad (5)$$

$$u(0)=\bar{y}, \qquad (6)$$

где

$$\tilde{f}(t,u)=h\cdot f(a+h\cdot t,u). \qquad (7)$$

Решив задачу Коши (5), (6), по формуле (4) мы получим решение $y(x)$ задачи Коши (1), (2). Поэтому мы в дальнейшем будем заниматься построением приближённого решения для задачи (5), (6). Для этого мы введем на $[0,m]$ равномерную сетку точек $t_i=i$ $(i=0,1,\ldots,m)$. Ей соответствует равномерная сетка точек $x_i=a+h\cdot i$ $(i=0,1,\ldots,m)$ на $[a,b]$. Шаги этих сеток равны 1 и h, соответственно.

Зафиксируем натуральное p и будем искать приближенное решение $u_m(t)$ задачи Коши (5), (6) в виде результата кусочно-многочленной интерполяции многочленами Эрмита $(2p-1)$-го порядка:

$$u_m(t)=\sum_{j=0}^{p-1}T_j^{2p-1}(t-i+1)\cdot Q_{j\ i-1}+\sum_{j=p}^{2p-1}T_j^{2p-1}(t-i+1)\cdot Q_{2p-1-j\ i}$$

$$\text{при } t\in[i-1,i],\ i=1,2,\ldots,m. \qquad (8)$$

Здесь $T_j^{2p-1}(x)$ - интерполяционные многочлены Эрмита, построенные на $[0,1]$ с условиями интерполяции:

$$\frac{d^l T_j^{2p-1}(0)}{dx^l}=\begin{cases}0, & j\neq l,\\ 1, & j=l,\end{cases}$$

$$j=0,1,\ldots,p-1,\ l=0,1,\ldots,s-1. \qquad (9)$$

$$\frac{d^l T_{2p-1-j}^{2p-1}(1)}{dx^l}=\begin{cases}0, & j\neq l,\\ 1, & j=l,\end{cases}$$

$$j=0,1,\ldots,p-1,\ l=0,1,\ldots,s-1. \qquad (10)$$

Приведём их при нескольких значениях p.

При $p=1$

$$T_0^1(x)=1-x,\ T_1^1(x)=x. \qquad (11)$$

При $p=2$

$$T_0^3(x)=(x-1)^2+2x(x-1)^2=1-3x^2+2x^3,\ T_1^3(x)=x(x-1)^2=x-2x^2+x^3,$$

$$T_2^3(x)=x^2(x-1)=-x^2+x^3,\ T_3^3(x)=x^2-2x^2(x-1)=3x^2-2x^3. \qquad (12)$$

При $p=3$

$$T_0^5(x)=(x-1)^3-3x(x-1)^3-6x^2(x-1)^3=1-10x^3+15x^4-6x^5,$$

$$T_1^5(x)=-x(x-1)^3-3x^2(x-1)^3=x-6x^3+8x^4-3x^5,\ T_2^5(x)=-\frac{1}{2}x^2(x-1)^3=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^4-\frac{1}{2}x^5,$$

$$T_3^5(x)=-\frac{1}{2}x^3(x-1)^2=\frac{1}{2}x^3-x^4+\frac{1}{2}x^5,\ T_4^5(x)=x^3(x-1)-3x^3(x-1)^2=-4x^3+7x^4-3x^5,$$

$$T_5^5(x)=x^3-3x^3(x-1)+6x^3(x-1)^2=10x^3-15x^4+6x^5. \qquad (13)$$

При $p=4$

$$T_0^7(x)=(x-1)^4+4x(x-1)^4+10x^2(x-1)^4+20x^3(x-1)^4==1-35x^4+84x^5-70x^6+20x^7,$$

$$T_1^7(x)=x(x-1)^4+4x^2(x-1)^4+10x^3(x-1)^4=x-20x^4+45x^5-36x^6+10x^7,$$

$$T_2^7(x)=\frac{1}{2}x^2(x-1)^4+2x^3(x-1)^4=\frac{1}{2}x^2-5x^4+10x^5-\frac{15}{2}x^6+2x^7,$$

$$T_3^7(t)=\frac{1}{6}x^3(x-1)^4=\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{3}x^4+x^5-\frac{2}{3}x^6+\frac{1}{6}x^7,\ T_4^7(x)=\frac{1}{6}x^4(x-1)^3=-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{6}x^7,$$

$$T_5^7(t)=\frac{1}{2}x^4(x-1)^2-2x^4(x-1)^3=\frac{5}{2}x^4-7x^5+\frac{13}{2}x^6-2x^7,$$

$$T_6^7(x)=x^4(x-1)-4x^4(x-1)^2+10x^4(x-1)^3=-15x^4+39x^5-34x^6+10x^7,$$

$$T_7^7(x)=x^4-4x^4(x-1)+10x^4(x-1)^2-20x^4(x-1)^3=35x^4-84x^5+70x^6-20x^7. \quad (14)$$

При $p=5$

$$T_0^9(x)=-(x-1)^5-5x(x-1)^5--15x^2(x-1)^5-35x^3(x-1)^5-70x^4(x-1)^5=$$
$$=1-126x^5+420x^6-540x^7+315x^8-70x^9,$$

$$T_1^9(x)=-x(x-1)^5-5x^2(x-1)^5-15x^3(x-1)^5-35x^4(x-1)^5=$$
$$=x-70x^5+224x^6-280x^7+160x^8-35x^9,$$

$$T_2^9(x)=-\frac{1}{2}x^2(x-1)^5-\frac{5}{2}x^3(x-1)^5-\frac{15}{2}x^4(x-1)^5=\frac{1}{2}x^2-\frac{35}{2}x^5+\frac{105}{2}x^6-63x^7+35x^8-\frac{15}{2}x^9,$$

$$T_3^9(x)=-\frac{1}{6}x^3(x-1)^5-\frac{5}{6}x^4(x-1)^5=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^5+\frac{20}{3}x^6-\frac{15}{2}x^7+4x^8-\frac{5}{6}x^9,$$

$$T_4^9(x)=-\frac{1}{24}x^4(x-1)^5=\frac{1}{24}x^4-\frac{5}{24}x^5+\frac{5}{12}x^6-\frac{5}{12}x^7+\frac{5}{24}x^8-\frac{1}{24}x^9,$$

$$T_5^9(x)=\frac{1}{24}x^5(x-1)^4=\frac{1}{24}x^5-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^7-\frac{1}{6}x^8+\frac{1}{24}x^9,$$

$$T_6^9(x)=\frac{1}{6}x^5(x-1)^3-\frac{5}{6}x^5(x-1)^4=-x^5+\frac{23}{6}x^6-\frac{11}{2}x^7+\frac{7}{2}x^8-\frac{5}{6}x^9,$$

$$T_7^9(x)=\frac{1}{2}x^5(x-1)^2-\frac{5}{2}x^5(x-1)^3+\frac{15}{2}x^5(x-1)^4=\frac{21}{2}x^5-\frac{77}{2}x^6+53x^7-\frac{65}{2}x^8+\frac{15}{2}x^9,$$

$$T_8^9(x)=x^5(x-1)-5x^5(x-1)^2+15x^5(x-1)^3-35x^5(x-1)^4=$$
$$=-56x^5+196x^6-260x^7+155x^8-35x^9,$$

$$T_9^9(x)=x^5-5x^5(x-1)+15x^5(x-1)^2-35x^5(x-1)^3+70x^5(x-1)^4=$$
$$=126x^5-420x^6+540x^7-315x^8+70x^9. \quad (15)$$

Постоянные $Q_{j\ i}$ ($j=0,1,...,p-1,\quad i=0,1,\dots,m$) полностью определяют приближенное решение $u_m(t)$ задачи (5), (6). Из условий интерполяции следует, что

$$Q_{0\,i}=u_m(i),\ \ Q_{1\,i}=\frac{du_m(i)}{dt},\ \dots,\ Q_{s-1\ i}=\frac{d^{\,p-1}u_m(i)}{dt^{p-1}}\quad i=0,1,2,\dots,m. \quad (16)$$

Соответствующее приближенное решение задачи Коши (1), (2) получим с помощью отношения (4):

$$y_m(x)=u_m\left(\frac{x-a}{h}\right). \quad (17)$$

Для определения неизвестных постоянных $Q_{j\ i}$ ($j=0,1,...,p-1,\quad i=0,1,\dots,m$) сформулируем систему требований, при выполнении которых последовательность приближенных решений $u_m(t)$ сходилась бы к точному решению $u(t)$ задачи Коши (5), (6) при $m \to \infty$ $\left(h = \dfrac{b-a}{m} \to 0\right)$. Для этого мы введем невязку уравнения (5) на приближенном решении $u_m(t)$:

$$R_m(t) = \frac{du_m(t)}{dt} - h \cdot f(a + h \cdot t, u_m(t)). \tag{18}$$

При формулировке условий, из которых будут определяться неизвестные постоянные $Q_{j\,i}$, мы будем стремиться обнулять значения невязки на $[0, m]$.

Потребуем, чтобы невязка $R_m(t)$ и все её производные до $(p-1)$-го порядка обращалась в ноль во всех узлах сетки $t_i = i$ ($i = 0,1,\ldots,m$):

$$R_m(i) = 0\,,\quad \frac{dR_m(i)}{dt} = 0\,,\ldots,\quad \frac{d^{\,p-1}R_m(i)}{dt^{\,p-1}} = 0 \quad i = 0,1,\ldots,m. \tag{19}$$

Учитывая равенства (18) и (16), из условий (19) получим:

$$Q_{1\,i} = \frac{du_m(i)}{dt} = h \cdot f(a + h \cdot i,\ u_m(i)) = h \cdot f\left(a + h \cdot i,\ Q_{0\,i}\right),\quad i = 0,1,2,\ldots,m. \tag{20}$$

$$\begin{aligned} Q_{2\,i} &= \frac{d^2u_m(i)}{dt^2} = \frac{\partial\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial u}\frac{du_m(i)}{dt} = \\ &= h^2\frac{\partial f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial x} + h\frac{\partial f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial y}Q_{1i},\quad i = 0,1,2,\ldots,m. \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} Q_{3\,i} &= \frac{d^3u_m(i)}{dt^3} = \frac{\partial^2\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial t\partial u}\frac{du_m(i)}{dt} + \frac{\partial^2\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial u^2}\left(\frac{du_m(i)}{dt}\right)^2 + \\ &+ \frac{\partial\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial u}\frac{d^2u_m(i)}{dt^2} = \\ &= h^3\frac{\partial^2 f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial x^2} + 2h^2\frac{\partial^2 f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial x\partial y}Q_{1i} + h\frac{\partial^2 f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial y^2}\left(Q_{1i}\right)^2 + h\frac{\partial f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial y}Q_{2i}, \\ &\quad i = 0,1,2,\ldots,m. \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} Q_{4\,i} &= \frac{d^4u_m(i)}{dt^4} = \frac{\partial^3\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial t^3} + 3\frac{\partial^3\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial t^2\partial u}\frac{du_m(i)}{dt} + 3\frac{\partial^3\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial t\partial u^2}\left(\frac{du_m(i)}{dt}\right)^2 + \\ &+ \frac{\partial^3\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial u^3}\left(\frac{du_m(i)}{dt}\right)^3 + 3\frac{\partial^2\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial t\partial u}\frac{d^2u_m(i)}{dt^2} + \\ &+ 3\frac{\partial^2\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial u^2}\cdot\frac{du_m(i)}{dt}\cdot\frac{d^2u_m(i)}{dt^2} + \frac{\partial\tilde{f}(i, u_m(i))}{\partial u}\cdot\frac{d^3u_m(i)}{dt^3} = \\ &= h^4\frac{\partial^3 f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial x^3} + 3h^3\frac{\partial^3 f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial x^2\partial y}Q_{1i} + 3h^2\frac{\partial^3 f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial x\partial y^2}\left(Q_{1i}\right)^2 + \\ &+ h\frac{\partial^3 f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial y^3}\left(Q_{1i}\right)^3 + 3h^2\frac{\partial f^2\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial x\partial y}Q_{2i} + 3h\frac{\partial^2 f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial y^2}Q_{1i}\cdot Q_{2i} + h\frac{\partial f\left(a + ih,\ Q_{0i}\right)}{\partial y}Q_{3i}, \\ &\quad i = 0,1,2,\ldots,m. \end{aligned} \tag{23}$$

Далее аналогично вычисляются $Q_{5\,i}$, $Q_{6\,i}$, … , $Q_{p-1\,i}$. Заметим, что величины $Q_{1\,i}$ выражаются через $Q_{0\,i}$, величины $Q_{2\,i}$ выражаются через $Q_{0\,i}$, $Q_{1\,i}$, величины $Q_{3\,i}$ выражаются через $Q_{0\,i}$, $Q_{1\,i}$, $Q_{2\,i}$, и т. д. В конечном итоге условия (19) и следующие из них условия (20), (21), (22), (23), и т. д. позволяют величины $Q_{1\,i}$, $Q_{2\,i}$, … , $Q_{p-1\,i}$ выразить через $Q_{0\,i}$.

Для определения оставшихся неизвестных $Q_{0\,i}$ $(i=0,1,2,\ldots,m)$ мы воспользуемся начальным условием (6) и условиями (16):

$$Q_{0\,0}=u_m(0)=u(0)=\bar{y}\,. \tag{24}$$

Для определения значений остальных величин $Q_{0\,i}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ мы будем минимизировать $R_m^2\left(i-\frac{1}{2}\right)$ как функцию $Q_{0\,i}$ для всех $i=1,2,...,m$. Подставив представление (8) в выражение для невязки, получим:

$$R_m\left(i-\frac{1}{2}\right)=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{dT_j^{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{dt}\cdot Q_{j\;i-1}+\sum_{j=p}^{2p-1}\frac{dT_j^{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{dt}\cdot Q_{2p-1-j\;i}-$$

$$-h\cdot f\left(a+h\cdot i-\frac{h}{2},\;\;\sum_{j=0}^{p-1}T_j^{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot Q_{j\;i-1}+\sum_{j=p}^{2p-1}T_j^{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot Q_{2p-1-j\;i}\right),\;\; i=1,2,\ldots,m. \tag{25}$$

Вычислив предварительно значения $T_j^{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{dT_j^{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{dt}$, можно записать формулы для вычисления невязки $R_m\left(i-\frac{1}{2}\right)$ как функции $\mu=Q_{0\,i}=u_m(i)$.

При $p=2$

$$R_m\left(i-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}Q_{0\,i-1}-\frac{1}{4}Q_{1\,i-1}-\frac{1}{4}h\cdot f(a+h\cdot i,\;\mu)+\frac{3}{2}\cdot\mu-$$

$$-h\cdot f\left(a+hi-\frac{h}{2},\;\;\frac{1}{2}Q_{0\,i-1}+\frac{1}{8}Q_{1\,i-1}-\frac{1}{8}h\cdot f(a+h\cdot i,\;\mu)+\frac{1}{2}\cdot\mu\right). \tag{26}$$

При $p=3$

$$R_m\left(i-\frac{1}{2}\right)=-\frac{60}{32}Q_{0\,i-1}-\frac{14}{32}Q_{1\,i-1}-\frac{1}{32}Q_{2\,i-1}+$$

$$+\frac{1}{32}h^2\cdot\left(\frac{\partial f(a+h\cdot i,\;\mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+h\cdot i,\;\mu)}{\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\;\mu)\right)-\frac{14}{32}h\cdot f(a+h\cdot i,\;\mu)+\frac{60}{32}\cdot\mu-$$

$$-h\cdot f\left(a+h\cdot i-\frac{h}{2},\;\;\frac{32}{64}Q_{0\,i-1}+\frac{10}{64}Q_{1\,i-1}+\frac{1}{64}Q_{2\,i-1}+\right.$$

$$+\frac{1}{64}h^2\cdot\left(\frac{\partial f(a+h\cdot i,\;\mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+h\cdot i,\;\mu)}{\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\;\mu)\right)-$$

$$\left.-\frac{10}{64}h\cdot f(a+h\cdot i,\;\mu)+\frac{32}{64}\cdot\mu\right). \tag{27}$$

При $p=4$

$$R_m\left(i-\frac{1}{2}\right)=-\frac{35}{16}Q_{0\,i-1}-\frac{19}{32}Q_{1\,i-1}-\frac{1}{16}Q_{2\,i-1}-\frac{1}{384}Q_{3\,i-1}-$$

$$-\frac{h^3}{384}\left(\frac{\partial^2 f(a+ih,\;\mu)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(a+ih,\;\mu)}{\partial x\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\;\mu)+\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f(a+ih,\;\mu)}{\partial y^2}\cdot f^2(a+h\cdot i,\;\mu)+$$

$$+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \ \mu)\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{h^2}{16}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \ \mu)\right)-\frac{19}{32}h\cdot f(a+hi,\ \ \mu)+\frac{35}{16}\mu-$$

$$-h\cdot f\Bigg(\ \ a+hi-\frac{h}{2},\ \ \frac{1}{2}Q_{0\ i-1}+\frac{11}{64}Q_{1\ i-1}+\frac{3}{128}Q_{2\ i-1}+\frac{1}{768}Q_{3\ i-1}-$$

$$-\frac{h^3}{768}\Bigg(\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\ \ \mu)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^2}\cdot f^2(a+h\cdot i,\ \ \mu)+$$

$$+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \ \mu)\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{3h^2}{128}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \ \mu)\right)-\frac{11}{64}h\cdot f(a+hi,\ \ \mu)+\frac{1}{2}\mu\ \ \Bigg). \qquad (28)$$

При $p=5$

$$R_m\left(i-\frac{1}{2}\right)=-\frac{315}{128}Q_{0\ i-1}-\frac{187}{256}Q_{1\ i-1}-\frac{47}{512}Q_{2\ i-1}-\frac{3}{512}Q_{3\ i-1}-\frac{1}{6144}Q_{4\ i-1}+$$

$$+\frac{h^4}{6144}\Bigg(\ \ \frac{\partial^3 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^2\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\ \ \mu)+$$

$$+3\frac{\partial^3 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y^2}\cdot f^2(a+h\cdot i,\ \ \mu)+\frac{\partial^3 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^3}\cdot f^3(a+h\cdot i,\ \ \mu)+$$

$$+3\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y}\cdot\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \ \mu)\right)+$$

$$+3\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^2}\cdot f(a+ih,\ \mu)\cdot\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \ \mu)\right)+$$

$$+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot\Bigg(\ \ \frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\ \ \mu)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^2}\cdot f^2(a+h\cdot i,\ \ \mu)+$$

$$+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \ \mu)\right)\ \Bigg)\ \Bigg)-$$

$$-\frac{3h^3}{512}\Bigg(\ \ \frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\ \ \mu)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^2}\cdot f^2(a+h\cdot i,\ \ \mu)+$$

$$+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \mu)\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{47h^2}{512}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \mu)\right)-\frac{187}{512}h\cdot f(a+hi,\ \mu)+\frac{315}{128}\mu-$$

$$-h\cdot f\Bigg(a+hi-\frac{h}{2},\ \frac{1}{2}Q_{0\,i-1}+\frac{93}{512}Q_{1\,i-1}+\frac{29}{1024}Q_{2\,i-1}+\frac{7}{3072}Q_{3\,i-1}+\frac{1}{12288}Q_{4\,i-1}+$$

$$+\frac{h^4}{12288}\Bigg(\frac{\partial^3 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^2\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\ \mu)+$$

$$+3\frac{\partial^3 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y^2}\cdot f^2(a+h\cdot i,\ \mu)+\frac{\partial^3 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^3}\cdot f^3(a+h\cdot i,\ \mu)+$$

$$+3\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y}\cdot\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \mu)\right)+$$

$$+3\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^2}\cdot f(a+ih,\ \mu)\cdot\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \mu)\right)+$$

$$+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot\Bigg(\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\ \mu)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^2}\cdot f^2(a+h\cdot i,\ \mu)+$$

$$+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \mu)\right)\Bigg)\Bigg)-$$

$$-\frac{7h^3}{3072}\Bigg(\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial x\partial y}\cdot f(a+h\cdot i,\ \mu)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(a+ih,\ \mu)}{\partial y^2}\cdot f^2(a+h\cdot i,\ \mu)+$$

$$+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \mu)\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{29h^2}{1024}\left(\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial x}+\frac{\partial f(a+ih,\ \mu)}{\partial y}\cdot f(a+hi,\ \mu)\right)-\frac{93}{512}h\cdot f(a+hi,\ \mu)+\frac{1}{2}\mu\Bigg). \tag{29}$$

Введем функции $\psi_{i\,m}(\mu)$, которые представляют собой квадраты невязки:

$$\psi_{i\,m}(\mu)=R_m^2\left(i-\frac{1}{2}\right). \tag{30}$$

Для определения очередного значения $Q_{0\,i}$ необходимо найти точку минимума функций $\psi_{i\,m}(\mu)$.

$$\psi_{i\,m}(\mu) \to \min. \tag{31}$$

После этого значение $Q_{0\,i}$ полагается равным координате этой точки.

Для решения этой задачи будем использовать разностный метод парабол [2]. Важно подобрать начальное приближение $\mu_{0\,i}$ искомой точки минимума функции $\psi_{i\,m}(\mu)$, достаточно близкое к этой точке, чтобы обеспечивалась сходимость используемой последовательности итераций. Для этого в работе [5] использовались многочлены Тейлора:

$$u_m(i) \approx u_m(i-1) + \frac{1}{1!}\frac{du_m(i-1)}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2u_m(i-1)}{dt^2} + \ldots + \frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{\,p-1}u_m(i-1)}{dt^{\,p-1}}. \tag{32}$$

Учитывая формулу (16), формулу (32) можно записать в виде:

$$\mu_{0\,i} = Q_{0\,i-1} + \frac{1}{1!}Q_{1\,i-1} + \frac{1}{2!}Q_{2\,i-1} + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}Q_{p-1\,i-1}. \tag{33}$$

Последовательность приближений $\mu_{s\,i}$ к точке минимума функции $\psi_{i\,m}(\mu)$ строится с помощью рекуррентной формулы разностного метода парабол:

$$\mu_{s+1\,i} = \mu_{s\,i} - \frac{\Delta}{2}\cdot\frac{\psi_{i\,m}(\mu_{s\,i}+\Delta) - \psi_{i\,m}(\mu_{s\,i}-\Delta)}{\psi_{i\,m}(\mu_{s\,i}+\Delta) - 2\psi_{i\,m}(\mu_{s\,i}) + \psi_{i\,m}(\mu_{s\,i}-\Delta)},\ s = 0,1,\ldots \tag{34}$$

Здесь Δ - заданное фиксированное маленькое положительное число. Перед каждым вычислением очередного члена последовательности приближений по формуле (34) необходимо проверять условие

$$\psi_{i\,m}(\mu_{si}+\Delta) - 2\psi_{i\,m}(\mu_{si}) + \psi_{i\,m}(\mu_{si}-\Delta) \geq \delta > 0, \tag{35}$$

где δ - заданное фиксированное маленькое положительное число. Если это условие не выполняется, то это означает, что начальное приближение слишком грубое и следует прекратить вычисления. В этом случае надо начать вычисления заново, выбрав большее значение величины m (меньшее значение величины шага $h = \dfrac{b-a}{m}$), что позволит получить более точные начальные приближения $\mu_{0\,i}$.

Если в качестве окончательных приближений для точек минимума выбирать $\mu_{0\,i}$, не проводя дальнейших итераций ($Q_{u\,0\,i}$ положить равным $\mu_{0\,i}$), то в результате мы получим приближенное сеточное решение задачи Коши $\mu_{0i} = Q_{y\,0\,i} = u_m(i) = y_m(x_i)$. При фиксированном значении s формула (33), в совокупности с формулой (16), соответствующими формулами (20)-(23) (при $s \leq 5$) и формулой (24) порождает вычислительную схему, позволяющую получить приближенное сеточное решение задачи Коши $\mu_{0\,i}$.

При $p = 2$ эта схема совпадает со схемой Эйлера:

$$\mu_{00} = \bar{y}, \tag{36}$$

$$\mu_{0i} = \mu_{0\,i-1} + h\cdot f(x_{i-1}, \mu_{0\,i-1}),\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{37}$$

При $p = 3$ эта схема совпадает со схемой исправленного метода Эйлера:

$$\mu_{00} = \bar{y}, \tag{38}$$

$$\mu_{0i} = \mu_{0\,i-1} + h\cdot f(x_{i-1}, \mu_{0\,i-1}) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(x_{i-1}, \mu_{0\,i-1})}{\partial x} + \frac{\partial f(x_{i-1}, \mu_{0\,i-1})}{\partial y}\cdot f(x_{i-1}, \mu_{0\,i-1})\right),\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{39}$$

При $p > 3$ получаются аналогичные вычислительные схемы. При $p = 4$:

$$\mu_{00} = \bar{y}, \tag{40}$$

$$\mu_{0i} = \mu_{0\,i-1} + h\cdot f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) + \frac{h^2}{2}\cdot\left(\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x} + \frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y} f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})\right) +$$
$$+\frac{h^3}{6}\cdot\left(\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x\partial y} f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) + \right.$$
$$\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y^2} f^2(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) +$$
$$\left.+\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x} + \frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y} f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})\right)\right),\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{41}$$

При $p = 5$:

$$\mu_{00} = \bar{y}, \tag{42}$$

$$\mu_{0i} = \mu_{0\,i-1} + h\cdot f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) + \frac{h^2}{2}\cdot\left(\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x} + \frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y} f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})\right) +$$
$$+\frac{h^3}{6}\cdot\left(\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x\partial y} f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) + \right.$$
$$\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y^2} f^2(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) +$$
$$\left.+\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x} + \frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y} f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})\right)\right)$$
$$+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^3 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x^2\partial y}\cdot f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) + \right.$$
$$+3\frac{\partial^3 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x\partial y^2}\cdot f^2(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) + \frac{\partial^3 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y^3}\cdot f^3(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) +$$
$$+3\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x\partial y}\cdot\left(\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x} + \frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y}\cdot f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})\right) +$$
$$+3\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y^2}\cdot f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})\cdot\left(\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x} + \frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y}\cdot f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})\right) +$$
$$+\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x\partial y}\cdot f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) + \right.$$
$$+\frac{\partial^2 f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y^2}\cdot f^2(x_{i-1},\mu_{0\,i-1}) +$$
$$\left.\left.+\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial x} + \frac{\partial f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})}{\partial y}\cdot f(x_{i-1},\mu_{0\,i-1})\right)\right)\right),\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{43}$$

Шаговые погрешности этих методов составляют величины $O(h^p)$ при $h \to 0$, а на $[a,b]$ эти методы имеют порядок точности равный $(p-1)$ относительно h, если точное решение задачи Коши, $y(x)$, существует, единственно и p раз непрерывно дифференцируемо на $[a,b]$, а функция $f(x,y)$ и ее частные производные $(p-1)$-го порядка непрерывны и ограничены. При выполнении этих условий компоненты приближенного сеточного решения $\mu_{0\,i}$ сходятся к компонентам точного сеточного решения, $y(x_i)$, при $m \to \infty$ (при $h = \dfrac{b-a}{m} \to 0$) с $(p-1)$ порядком относительно h.

Сходимость начальных приближений $\mu_{0\,i}$ к точному сеточному решению при $m \to \infty$ (при $h \to 0$) позволяет добиваться высокого качества начальных приближений за счет увеличения m (уменьшения h). Итерации, проводимые при выполнении условия (33), уменьшают невязку и, следовательно, уточняют значения $Q_{0\,i}$. В пределе при $m \to \infty$ значения $Q_{0\,i}$ также сходятся к компонентам точного сеточного решения, $y(x_i)$. Поэтому невязка должна сходиться к нулю при $m \to \infty$ (при $h \to 0$) и в качестве условия окончания итераций можно использовать неравенство:

$$\psi_{i\,m}(\mu_{s+1\,i}) \le \lambda\,, \tag{44}$$

где λ - заданное фиксированное маленькое положительное число.

В любом случае количество итераций следует ограничить. Иначе количество вычислительных операций для получения результата может стать неоправданно большим. Поэтому мы введем величину S максимального количества итераций. Даже если условие (44) не будет выполнено, вычисления по формуле (34) прекратятся при $s > S$. Заметим, что если выбрать отрицательное значение λ, то условие (44) никогда не будет выполнено и количество итераций будет фиксированным и равным S, если не возникнет ситуация, когда будет нарушено условие (35).

Приведём алгоритмы описанных численных методов при некоторых значениях величины p.

Запишем соответствующий алгоритм при $p = 2$ (метод Эйлера с итерационным уточнением). Исходными данными являются функции и величины: $f(x,y)$, $T_j^3(t)$ ($j = 0,1,\ldots,5$), a, b, $\bar{y}$, m, Δ, δ, λ, S. Результатами являются приближенные значения величин: x_i, $Q_{0\,i}$, $Q_{1\,i}$ ($i = 0,1,\ldots,m$), которые, в свою очередь, позволяют найти приближенное решение $y_m(x)$ по формулам (8), (17). Введем дополнительные результаты e_i ($i = 1,2,\ldots,m$). Величина e_i полагается равной 0, если на $[x_{i-1}, x_i]$ итерации завершаются при выполнении условия (36). Если итерации завершаются при $s = S$, то $e_i = 1$. А если итерации завершаются при нарушении условия (35) или если $S < 1$, то $e_i = 2$. На основе исходных данных производятся следующие вычисления:

$h := \dfrac{b-a}{m}$; $x_0 := a$; $Q_{0\,0} := \bar{y}$; $Q_{1\,0} := h \cdot f(x_0\,, Q_{0\,0})$

для i **от** 1 **до** m **с шагом** 1

начало цикла по i

* $\mu := Q_{0\,i-1} + Q_{1\,i-1}$

$x_i := a + ih$

если $S < 1$

то $Q_{0\,i} := \mu$; $Q_{1\,i} := h \cdot f(x_i, \mu)$; $e_i := 2$

все

для s **от** 1 **до** S **с шагом** 1
начало цикла по s

$K_{11} := h \cdot f(x_i, \mu)$

$\nu_1 := 0.5 \cdot Q_{0\,i-1} + 0.125 \cdot Q_{1\,i-1}$; $\nu_2 := -1.5 \cdot Q_{0\,i-1} - 0.25 \cdot Q_{1\,i-1}$

$K_{13} := h \cdot f\left(x_i - \dfrac{h}{2}, \nu_1 - 0.125 \cdot K_{11} + 0.5 \cdot \mu \right)$

$L_1 := \nu_2 - 0.25 \cdot K_{11} + 1.5\mu - K_{13}$; $L_1 := L_1 \cdot L_1$

если $L_1 \le \lambda$

то $Q_{0\,i} := \mu$; $Q_{1\,i} := K_{11}$; $e_i := 0$ **конец цикла по** s

все

$K_{21} := h \cdot f(x_i, \mu - \Delta)$; $K_{23} := h \cdot f\left(x_i - \dfrac{h}{2}, \nu_1 - 0.125 \cdot K_{21} + 0.5 \cdot (\mu - \Delta) \right)$

$L_2 := \nu_2 - 0.25 \cdot K_{21} + 1.5 \cdot (\mu - \Delta) - K_{23}$; $L_2 := L_2 \cdot L_2$

$K_{31} := h \cdot f(x_i, \mu + \Delta)$; $K_{33} := h \cdot f\left(x_i - \dfrac{h}{2}, \nu_1 - 0.125 \cdot K_{31} + 0.5 \cdot (\mu + \Delta) \right)$

$L_3 := \nu_2 - 0.25 \cdot K_{31} + 1.5 \cdot (\mu + \Delta) - K_{33}$; $L_3 := L_3 \cdot L_3$

$L_4 := L_3 - 2 \cdot L_1 + L_2$; $L_5 := L_3 - L_2$;

если $L_4 < \delta$

то $Q_{0\,i} := \mu$; $Q_{1\,i} := K_{11}$; $e_i = 2$ **конец цикла по** s

все

$\mu := \mu - \dfrac{\Delta}{2} \cdot \dfrac{L_5}{L_4}$

если $s = S$

то $Q_{0\,i} := \mu$; $Q_{1\,i} := h \cdot f(x_i, \mu)$; $e_i := 1$

все

конец цикла по s

конец цикла по i

Запишем соответствующий алгоритм при $p = 3$ (исправленный метод Эйлера с итерационным уточнением). Исходными данными являются функции и величины: $f(x, y)$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, $T_j^5(t)$ ($j = 0, 1, \ldots, 5$), a, b, $\bar{y}$, m, Δ, δ, λ, S. Результатами являются приближенные значения величин: x_i, $Q_{u0\,i}$, $Q_{u1\,i}$, $Q_{u2\,i}$ ($i = 0, 1, \ldots, m$), которые, в свою очередь, позволяют найти приближенное решение $y_m(x)$ по формулам (8), (17). Введем дополнительные результаты e_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Величина e_i полагается равной 0, если на $[x_{i-1}, x_i]$ итерации завершаются при выполнении условия (44). Если итерации завершаются при $s = S$, то $e_i = 1$. А если итерации завершаются при нарушении условия (41) или если $S < 1$, то $e_i = 2$. На основе исходных данных производятся следующие вычисления:

$h := \dfrac{b - a}{m}$; $x_0 := a$; $Q_{0\,0} := \bar{y}$; $Q_{1\,0} := h \cdot f(x_0, Q_{0\,0})$; $Q_{2\,0} := h^2 \cdot \dfrac{\partial f(x_0, Q_{0\,0})}{\partial x} +$
$+ h \cdot \dfrac{\partial f(x_0, Q_{0\,0})}{\partial y} \cdot Q_{1\,0}$;

для i **от** 1 **до** m **с шагом** 1

начало цикла по i

* $\mu := Q_{0\,i-1} + Q_{1\,i-1} + \frac{1}{2} Q_{2\,i-1}$

$x_i := a + i \cdot h;$

если $S < 1$

то $Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := h \cdot f(x_i, \mu);\ Q_{2\,i} := h^2 \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial y} \cdot Q_{1\,i}$

$e_i := 2$

все

для s **от** 1 **до** S **с шагом** 1

начало цикла по s

$K_{11} := h \cdot f(x_i, \mu);\ K_{12} := h^2 \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial y} \cdot K_{11};$

$\nu_1 := 32 Q_{u\,0\,i-1} + 10 Q_{u1\,i-1} + Q_{u\,2\,i-1};\ \nu_2 := -60 Q_{u\,0\,i-1} - 14 Q_{u1\,i-1} - Q_{u\,2\,i-1};$

$K_{13} := h \cdot f\left(x_i - \frac{h}{2},\ (\nu_1 + K_{12} - 10K_{11} + 32\mu)/64 \right);$

$L_1 := (\nu_2 + K_{12} - 14K_{11} + 60\mu)/32 - K_{13};\ L_1 := L_1 \cdot L_1;$

если $L_1 \le \lambda$

то $Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := K_{11};\ Q_{2\,i} := K_{12};\ e_i := 0$; **конец цикла по** s

все

$K_{21} := h \cdot f(x_i, \mu - \Delta);\ K_{22} := h^2 \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial y} \cdot K_{21};$

$K_{23} := h \cdot f\left(x_i - \frac{h}{2},\ (\nu_1 + K_{22} - 10K_{21} + 32(\mu - \Delta))/64 \right);$

$L_2 := (\nu_2 + K_{22} - 14K_{21} + 60(\mu - \Delta))/32 - K_{23};\ L_2 := L_2 \cdot L_2;$

$K_{31} := h \cdot f(x_i, \mu + \Delta);\ K_{32} := h^2 \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial y} \cdot K_{31};$

$K_{33} := h \cdot f\left(x_i - \frac{h}{2},\ (\nu_1 + K_{32} - 10K_{31} + 32(\mu + \Delta))/64 \right);$

$L_3 := (\nu_2 + K_{32} - 14K_{31} + 60(\mu + \Delta))/32 - K_{33};\ L_3 := L_3 \cdot L_3;$

$L_4 := L_3 - 2 \cdot L_1 + L_2;\ L_5 := L_3 - L_2;$

если $L_4 < \delta$

то $Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := K_{11};\ Q_{2\,i} = K_{12}$; **конец цикла по** s

$e_i = 2$

все

$\mu := \mu - \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{L_5}{L_4}$

если $s = S$

то $Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := h \cdot f(x_i, \mu);\ Q_{2\,i} = h^2 \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial y} \cdot Q_{1\,i}$

$e_i := 1$

все

конец цикла по s

конец цикла по i

Запишем соответствующий алгоритм при $p=4$. Исходными данными являются функции и величины: $f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, $T_j^7(t)$ ($j=0,1,\ldots,5$), a, b, $\bar{y}$, m, Δ, δ, λ, S. Результатами являются приближенные значения величин: x_i, $Q_{y\,0\,i}$, $Q_{y\,1\,i}$, $Q_{y\,2\,i}$, $Q_{y\,3\,i}$ ($i=0,1,\ldots,m$), которые, в свою очередь, позволяют найти приближенное решение $y_m(x)$ по формулам (8), (17). Введем дополнительные результаты e_i ($i=1,2,\ldots,m$). Величина e_i полагается равной 0, если на $[x_{i-1},x_i]$ итерации завершаются при выполнении условия (36). Если итерации завершаются при $s=S$, то $e_i=1$. А если итерации завершаются при нарушении условия (35) или если $S<1$, то $e_i=2$. На основе исходных данных производятся следующие вычисления:

$$h := \frac{b-a}{m};\ x_0 := a;\ Q_{0\,0} := \bar{y};\ Q_{1\,0} := h\cdot f(x_0\,,Q_{0\,0});\ Q_{2\,0} = h^2\frac{\partial f(x_0\,,Q_{0\,0})}{\partial x} + h\frac{\partial f(x_0\,,Q_{0\,0})}{\partial y}Q_{10}$$

$$Q_{3\,0} = h^3\frac{\partial^2 f(x_0,Q_{00})}{\partial x^2} + 2h^2\frac{\partial^2 f(x_0,Q_{00})}{\partial x\partial y}Q_{10} + h\frac{\partial^2 f(x_0,Q_{00})}{\partial y^2}(Q_{10})^2 + h\frac{\partial f(x_0,Q_{00})}{\partial y}Q_{20}$$

для i **от** 1 **до** m **с шагом** 1
начало цикла по i

* $\mu := Q_{0\,i-1} + Q_{1\,i-1} + \frac{1}{2}Q_{2\,i-1} + \frac{1}{6}Q_{3\,i-1}$

$x_i := a + ih$

если $S<1$

то $Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := h\cdot f(x_i,\mu);\ Q_{2\,i} = h^2\frac{\partial f(x_i\,,\mu)}{\partial x} + h\frac{\partial f(x_i\,,\mu)}{\partial y}Q_{1i}$

$$Q_{3\,i} = h^3\frac{\partial^2 f(x_i,\mu)}{\partial x^2} + 2h^2\frac{\partial^2 f(x_i,\mu)}{\partial x\partial y}Q_{1i} + h\frac{\partial^2 f(x_i,\mu)}{\partial y^2}(Q_{1i})^2 + h\frac{\partial f(x_i,\mu)}{\partial y}Q_{2i}$$

$e_i := 2$

все
для s **от** 1 **до** S **с шагом** 1
начало цикла по s

$$K_{11} := h\cdot f(x_i,\mu);\ Dfy := \frac{\partial f(x_i,\mu)}{\partial y};\ K_{12} := h^2\cdot\frac{\partial f(x_i,\mu)}{\partial x} + h\cdot Dfy\cdot K_{11}$$

$$K_{13} := h^3\cdot\frac{\partial^2 f(x_i,\mu)}{\partial x^2} + 2h^2\frac{\partial^2 f(x_i,\mu)}{\partial x\partial y}K_{11} + h\cdot\frac{\partial^2 f(x_i,\mu)}{\partial y^2}(K_{11})^2 + h\cdot Dfy\cdot K_{12}$$

$$\nu_1 := \frac{1}{2}\cdot Q_{0\,i-1} + \frac{11}{64}\cdot Q_{1\,i-1} + \frac{3}{128}\cdot Q_{2\,i-1} + \frac{1}{768}\cdot Q_{3\,i-1} \qquad \nu_2 := -\frac{35}{16}\cdot Q_{0\,i-1} - \frac{19}{32}\cdot Q_{1\,i-1} - \frac{1}{16}\cdot Q_{2\,i-1} - \frac{1}{384}\cdot Q_{3\,i-1}$$

$$K_{14} := h\cdot f\left(x_i - \frac{h}{2},\ \nu_1 - \frac{1}{768}K_{13} + \frac{3}{128}K_{12} - \frac{11}{64}\cdot K_{11} + \frac{1}{2}\cdot\mu\right)$$

$$L_1 := \nu_2 - \frac{1}{384}\cdot K_{13} + \frac{1}{16}\cdot K_{12} - \frac{19}{32}\cdot K_{11} + \frac{35}{16}\mu - K_{14};\ L_1 := L_1\cdot L_1$$

если $L_1 \le \lambda$

то $Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := K_{11};\ Q_{2\,i} := K_{12};\ Q_{3\,i} := K_{13};\ e_i := 0$ **конец цикла по** s

все

$K_{21} := h \cdot f(x_i, \mu - \Delta)$; $Dfym := \dfrac{\partial f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial y}$; $K_{22} := h^2 \cdot \dfrac{\partial f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x} + h \cdot Dfym \cdot K_{21}$

$K_{23} := h^3 \cdot \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x^2} + 2h^2 \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x \partial y} K_{21} + h \cdot \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial y^2} (K_{21})^2 + h \cdot Dfym \cdot K_{22}$

$K_{24} := h \cdot f\left(x_i - \dfrac{h}{2}, \nu_1 - \dfrac{1}{768} K_{23} + \dfrac{3}{128} K_{22} - \dfrac{11}{64} \cdot K_{21} + \dfrac{1}{2} \cdot (\mu - \Delta) \right)$

$L_2 := \nu_2 - \dfrac{1}{384} \cdot K_{23} + \dfrac{1}{16} \cdot K_{22} - \dfrac{19}{32} \cdot K_{21} + \dfrac{35}{16}(\mu - \Delta) - K_{24}$; $L_2 := L_2 \cdot L_2$

$K_{31} := h \cdot f(x_i, \mu + \Delta)$; $Dfyp := \dfrac{\partial f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial y}$; $K_{32} := h^2 \cdot \dfrac{\partial f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x} + h \cdot Dfyp \cdot K_{31}$

$K_{33} := h^3 \cdot \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x^2} + 2h^2 \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x \partial y} K_{31} + h \cdot \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial y^2} (K_{31})^2 + h \cdot Dfyp \cdot K_{32}$

$K_{34} := h \cdot f\left(x_i - \dfrac{h}{2}, \nu_1 - \dfrac{1}{768} K_{33} + \dfrac{3}{128} K_{32} - \dfrac{11}{64} \cdot K_{31} + \dfrac{1}{2} \cdot (\mu + \Delta) \right)$

$L_3 := \nu_2 - \dfrac{1}{384} \cdot K_{33} + \dfrac{1}{16} \cdot K_{32} - \dfrac{19}{32} \cdot K_{31} + \dfrac{35}{16}(\mu + \Delta) - K_{34}$; $L_3 := L_3 \cdot L_3$

$L_4 := L_3 - 2 \cdot L_1 + L_2$; $L_5 := L_3 - L_2$

если $L_4 < \delta$

то $Q_{0\,i} := \mu$; $Q_{1\,i} := K_{11}$; $Q_{2\,i} := K_{12}$; $Q_{3\,i} := K_{13}$; $e_i = 2$; **конец цикла по** s

все

$\mu := \mu - \dfrac{\Delta}{2} \cdot \dfrac{L_5}{L_4}$

если $s = S$

то $Q_{0\,i} := \mu$; $Q_{1\,i} := h \cdot f(x_i, \mu)$; $Q_{2\,i} = h^2 \dfrac{\partial f(x_i\,, \mu)}{\partial x} + h \dfrac{\partial f(x_i\,, \mu)}{\partial y} Q_{1i}$

$Q_{3\,i} = h^3 \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial x^2} + 2h^2 \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial x \partial y} Q_{1i} + h \dfrac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial y^2} (Q_{1i})^2 + h \dfrac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial y} Q_{2i}$

$e_i := 1$

все

конец цикла по s

конец цикла по i

Запишем соответствующий алгоритм при $p = 5$. Исходными данными являются функции и величины: $f(x, y)$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2}$, $\dfrac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3}$, $T_j^9(t)$ ($j = 0,1,\ldots,5$), a, b, $\bar{y}$, m, Δ, δ, λ, S. Результатами являются приближенные значения величин: x_i, $Q_{y\,0\,i}$, $Q_{y\,1\,i}$, $Q_{y\,2\,i}$, $Q_{y\,3\,i}$, $Q_{y\,4\,i}$ ($i = 0,1,\ldots,m$), которые, в свою очередь, позволяют найти приближенное решение $y_m(x)$ по формулам (8), (17). Введем дополнительные результаты e_i ($i = 1,2,\ldots,m$). Величина e_i полагается равной 0, если на $[x_{i-1}, x_i]$ итерации завершаются при выполнении условия (36).

Если итерации завершаются при $s = S$, то $e_i = 1$. А если итерации завершаются при нарушении условия (35) или если $S < 1$, то $e_i = 2$. На основе исходных данных производятся следующие вычисления:

$$h := \frac{b-a}{m};\ x_0 := a;\ Q_{0\,0} := \bar{y};\ Q_{1\,0} := h\cdot f(x_0, Q_{0\,0});\ Q_{2\,0} = h^2\frac{\partial f(x_0, Q_{0\,0})}{\partial x} + h\frac{\partial f(x_0, Q_{0\,0})}{\partial y}Q_{10}$$

$$Q_{3\,0} = h^3\frac{\partial^2 f(x_0, Q_{00})}{\partial x^2} + 2h^2\frac{\partial^2 f(x_0, Q_{00})}{\partial x\partial y}Q_{10} + h\frac{\partial^2 f(x_0, Q_{00})}{\partial y^2}(Q_{10})^2 + h\frac{\partial f(x_0, Q_{00})}{\partial y}Q_{20}$$

$$Q_{4\,0} = h^4\frac{\partial^3 f(x_0, Q_{00})}{\partial x^3} + 3h^3\frac{\partial^3 f(x_0, Q_{00})}{\partial x^2\partial y}Q_{10} + 3h^2\frac{\partial^3 f(x_0, Q_{00})}{\partial x\partial y^2}(Q_{10})^2 +$$

$$+h\frac{\partial^3 f(x_0, Q_{00})}{\partial y^3}(Q_{10})^3 + 3h^2\frac{\partial f^2(x_0, Q_{00})}{\partial x\partial y}Q_{20} + 3h\frac{\partial^2 f(x_0, Q_{00})}{\partial y^2}Q_{10}\cdot Q_{20} + h\frac{\partial f(x_0, Q_{00})}{\partial y}Q_{30}$$

для i **от** 1 **до** m **с шагом** 1
начало цикла по i

* $\mu := Q_{0\,i-1} + Q_{1\,i-1} + \frac{1}{2}Q_{2\,i-1} + \frac{1}{6}Q_{3\,i-1} + \frac{1}{24}Q_{4\,i-1}$

$x_i := a + ih$

если $S < 1$

то $Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := h\cdot f(x_i, \mu);\ Q_{2\,i} = h^2\frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial x} + h\frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial y}Q_{1i}$

$$Q_{3\,i} = h^3\frac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial x^2} + 2h^2\frac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial x\partial y}Q_{1i} + h\frac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial y^2}(Q_{1i})^2 + h\frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial y}Q_{2i}$$

$$Q_{4\,i} = h^4\frac{\partial^3 f(x_i, \mu)}{\partial x^3} + 3h^3\frac{\partial^3 f(x_i, \mu)}{\partial x^2\partial y}Q_{1i} + 3h^2\frac{\partial^3 f(x_i, \mu)}{\partial x\partial y^2}(Q_{1i})^2 + h\frac{\partial^3 f(x_i, \mu)}{\partial y^3}(Q_{1i})^3 +$$

$$+3h^2\frac{\partial f^2(x_i, \mu)}{\partial x\partial y}Q_{2i} + 3h\frac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial y^2}Q_{1i}\cdot Q_{2i} + h\frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial y}Q_{3i}$$

$e_i := 2$

все

для s **от** 1 **до** S **с шагом** 1
начало цикла по s

$$K_{11} := h\cdot f(x_i, \mu);\ Dfy := \frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial y};\ Dfxy := \frac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial x\partial y};\ Dfyy := \frac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial y^2}$$

$$K_{12} := h^2\cdot\frac{\partial f(x_i, \mu)}{\partial x} + h\cdot Dfy\cdot K_{11}$$

$$K_{13} := h^3\cdot\frac{\partial^2 f(x_i, \mu)}{\partial x^2} + 2h^2\cdot Dfxy\cdot K_{11} + h\cdot Dfyy\cdot(K_{11})^2 + h\cdot Dfy\cdot K_{12}$$

$$K_{14} = h^4\frac{\partial^3 f(x_i, \mu)}{\partial x^3} + 3h^3\frac{\partial^3 f(x_i, \mu)}{\partial x^2\partial y}K_{11} + 3h^2\frac{\partial^3 f(x_i, \mu)}{\partial x\partial y^2}(K_{11})^2 + h\frac{\partial^3 f(x_i, \mu)}{\partial y^3}(K_{11})^3 +$$

$$+3h^2\cdot Dfxy\cdot K_{12} + 3h\cdot Dfyy\cdot K_{11}\cdot K_{12} + h\cdot Dfy\cdot K_{13}$$

$$\nu_1 := \frac{1}{2}\cdot Q_{0\,i-1} + \frac{93}{512}\cdot Q_{1\,i-1} + \frac{29}{1024}\cdot Q_{2\,i-1} + \frac{7}{3072}\cdot Q_{3\,i-1} + \frac{1}{12288}\cdot Q_{4\,i-1}\quad \nu_2 := -\frac{315}{128}\cdot Q_{0\,i-1}$$

$$-\frac{187}{256}\cdot Q_{1\,i-1} - \frac{47}{512}\cdot Q_{2\,i-1} - \frac{3}{512}\cdot Q_{3\,i-1} - \frac{1}{6144}\cdot Q_{4\,i-1}$$

$$K_{15} := h \cdot f\left(x_i - \frac{h}{2}, v_1 + \frac{1}{12288}K_{14} - \frac{7}{3072}K_{13} + \frac{29}{1024}K_{12} - \frac{93}{512} \cdot K_{11} + \frac{1}{2} \cdot \mu\right)$$

$$L_1 := v_2 + \frac{1}{6144} \cdot K_{14} - \frac{3}{512} \cdot K_{13} + \frac{47}{512} \cdot K_{12} - \frac{187}{256} \cdot K_{11} + \frac{315}{128}\mu - K_{15};\ L_1 := L_1 \cdot L_1$$

если $L_1 \le \lambda$

то

$Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := K_{11};\ Q_{2\,i} := K_{12};\ Q_{3\,i} := K_{13};\ Q_{4\,i} := K_{14}; e_i := 0$

конец цикла по s

все

$$K_{21} := h \cdot f(x_i, \mu - \Delta);\ Dfym := \frac{\partial f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial y};\ Dfxym := \frac{\partial^2 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x \partial y};$$

$$Dfyym := \frac{\partial^2 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial y^2};\ K_{22} := h^2 \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x} + h \cdot Dfym \cdot K_{21}$$

$$K_{23} := h^3 \cdot \frac{\partial^2 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x^2} + 2h^2 \cdot Dfxym \cdot K_{21} + h \cdot Dfyym \cdot (K_{21})^2 + h \cdot Dfym \cdot K_{22}$$

$$K_{24} = h^4 \frac{\partial^3 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x^3} + 3h^3 \frac{\partial^3 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x^2 \partial y} K_{21} + 3h^2 \frac{\partial^3 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial x \partial y^2} (K_{21})^2 +$$

$$+ h \frac{\partial^3 f(x_i, \mu - \Delta)}{\partial y^3} (K_{21})^3 + 3h^2 \cdot Dfxym \cdot K_{22} + 3h \cdot Dfyym \cdot K_{21} \cdot K_{22} + h \cdot Dfym \cdot K_{23}$$

$$K_{25} := h \cdot f\left(x_i - \frac{h}{2}, v_1 + \frac{1}{12288}K_{24} - \frac{7}{3072}K_{23} + \frac{29}{1024}K_{22} - \frac{93}{512} \cdot K_{21} + \frac{1}{2} \cdot \mu\right)$$

$$L_2 := v_2 + \frac{1}{6144} \cdot K_{24} - \frac{3}{512} \cdot K_{23} + \frac{47}{512} \cdot K_{22} - \frac{187}{256} \cdot K_{21} + \frac{315}{128}\mu - K_{25};\ L_2 := L_2 \cdot L_2$$

$$K_{31} := h \cdot f(x_i, \mu + \Delta);\ Dfyp := \frac{\partial f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial y};\ Dfxyp := \frac{\partial^2 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x \partial y};$$

$$Dfyyp := \frac{\partial^2 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial y^2};\ K_{32} := h^2 \cdot \frac{\partial f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x} + h \cdot Dfyp \cdot K_{31}$$

$$K_{33} := h^3 \cdot \frac{\partial^2 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x^2} + 2h^2 \cdot Dfxyp \cdot K_{31} + h \cdot Dfyyp \cdot (K_{31})^2 + h \cdot Dfyp \cdot K_{32}$$

$$K_{34} = h^4 \frac{\partial^3 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x^3} + 3h^3 \frac{\partial^3 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x^2 \partial y} K_{31} + 3h^2 \frac{\partial^3 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial x \partial y^2} (K_{31})^2 +$$

$$+ h \frac{\partial^3 f(x_i, \mu + \Delta)}{\partial y^3} (K_{31})^3 + 3h^2 \cdot Dfxyp \cdot K_{32} + 3h \cdot Dfyyp \cdot K_{31} \cdot K_{32} + h \cdot Dfyp \cdot K_{33}$$

$$K_{35} := h \cdot f\left(x_i - \frac{h}{2}, v_1 + \frac{1}{12288}K_{34} - \frac{7}{3072}K_{33} + \frac{29}{1024}K_{32} - \frac{93}{512} \cdot K_{31} + \frac{1}{2} \cdot \mu\right)$$

$$L_3 := v_2 + \frac{1}{6144} \cdot K_{34} - \frac{3}{512} \cdot K_{33} + \frac{47}{512} \cdot K_{32} - \frac{187}{256} \cdot K_{31} + \frac{315}{128}\mu - K_{35};\ L_3 := L_3 \cdot L_3$$

$L_4 := L_3 - 2 \cdot L_1 + L_2;\ L_5 := L_3 - L_2$

если $L_4 < \delta$

то $Q_{0\,i} := \mu;\ Q_{1\,i} := K_{11};\ Q_{2\,i} := K_{12};\ Q_{3\,i} := K_{13};\ Q_{4\,i} := K_{14}; e_i = 2$

конец цикла по s

все

$\mu := \mu - \dfrac{\Delta}{2} \cdot \dfrac{L_5}{L_4}$

если $s = S$

то $Q_{0\,i} := \mu$; $Q_{1\,i} := h \cdot f(x_i, \mu)$; $Q_{2\,i} = h^2 \dfrac{\partial f(x_i\,,\,\mu)}{\partial x} + h \dfrac{\partial f(x_i\,,\,\mu)}{\partial y} Q_{1i}$

$$Q_{3\,i} = h^3 \frac{\partial^2 f(x_i,\,\mu)}{\partial x^2} + 2h^2 \frac{\partial^2 f(x_i,\,\mu)}{\partial x \partial y} Q_{1i} + h \frac{\partial^2 f(x_i,\,\mu)}{\partial y^2} (Q_{1i})^2 + h \frac{\partial f(x_i,\,\mu)}{\partial y} Q_{2i};$$

$$Q_{4\,i} = h^4 \frac{\partial^3 f(x_i,\,\mu)}{\partial x^3} + 3h^3 \frac{\partial^3 f(x_i,\,\mu)}{\partial x^2 \partial y} Q_{1i} + 3h^2 \frac{\partial^3 f(x_i,\,\mu)}{\partial x \partial y^2} (Q_{1i})^2 +$$

$$+ h \frac{\partial^3 f(x_i,\,\mu)}{\partial y^3} (Q_{1i})^3 + 3h^2 \frac{\partial f^2(x_i,\,\mu)}{\partial x \partial y} Q_{2i} + 3h \frac{\partial^2 f(x_i,\,\mu)}{\partial y^2} Q_{1i} \cdot Q_{yi} + h \frac{\partial f(x_i,\,\mu)}{\partial y} Q_{3i}$$

$e_i := 1$

все

конец цикла по s

конец цикла по i

Отметим некоторые очевидные свойства и особенности описанных методов.

- Сеточное приближенное решение задачи Коши (1), (2), x_i, $Q_{0\,i}$ ($i = 0,1,\ldots,m$), получаемое с помощью описанных алгоритмов, сходится к точному при $m \to \infty$ во всех случаях, когда обеспечивается сходимость приближенного сеточного решения $\mu_{0\,i}$, получаемого по одной из схем (соответствующей): (36), (37) или (38), (39) или (40), (41) или (42), (43) и т. д.
- Гладкое приближенное решение задачи Коши, $y_m(x)$, сразу получается в виде непрерывно дифференцируемой функции на $[a,b]$. Эта функция задается аналитически и удобна для дальнейшего использования.
- Гладкое приближенное решение, $y_m(x)$ также сходится к точному решению задачи Коши, $y(x)$, при $m \to \infty$ на $[a,b]$, как результат кусочно-многочленной эрмитовой интерполяции, проведенной на основе сходящихся приближенных сеточных решений.
- Если количество итераций в описанной вычислительной схеме не фиксировано, то в общем случае вряд ли можно говорить об определенном порядке точности описанной вычислительной схемы. В то же время, приближенное сеточное решение $\mu_{0\,i}$ сходится к точному решению с порядком $(p-1)$ относительно h на $[a,b]$.
- Невязка $R_m(t) = \dfrac{du_m(t)}{dt} - f(a + ht, u_m(t))$ дифференциального уравнения (5) на приближённом решении $u_m(t)$ обращается в ноль вместе со своими производными до $(p-1)$-го порядка включительно во всех узлах $t_i = i$ ($i = 0,1,\ldots,m$). Кроме того, если значение m достаточно велико, то невязка будет близка к нулю в серединах $t_i^* = i - \dfrac{1}{2}$ отрезков $[t_{i-1}, t_i] = [i-1, i]$.

Описанные методы, вообще говоря, не будут иметь определённый порядок сходимости, и использовать правило Рунге для оценки погрешности не удастся. Для этой цели потребуется другой подход. Обозначим погрешность приближенного решения $u_m(t)$ задачи (5), (6)

$$\varepsilon_m(t) = u_m(t) - u(t),\ t \in [0, m]. \qquad (45)$$

Очевидно

$$\varepsilon_m(t)\big|_{t=(x-a)/h} = u_m\left(\frac{x-a}{h}\right) - u\left(\frac{x-a}{h}\right) = y_m(x) - y(x),\ x \in [a,b]. \tag{46}$$

Отсюда

$$|y_m(x) - y(x)| = \left|\varepsilon_m(t)\big|_{t=(x-a)/h}\right|,\ x \in [a,b] \tag{47}$$

и оценка погрешности приближённого решения $u_m(t)$ задачи (5), (6) на $[0,m]$ совпадает с оценкой погрешности соответствующего приближённого решения $y_m(x) = u_m\left(\frac{x-a}{h}\right)$ задачи (1), (2) на $[a,b]$. Поэтому мы далее будем рассматривать только погрешность $\varepsilon_m(t)$ приближённого решения $u_m(t)$ задачи (5), (6) на $[0,m]$. Для получения оценки погрешности приближенного решения $u_m(t)$ на $[0,m]$ можно воспользоваться невязкой $R_m(t)$ уравнения (5), которая становятся известной после вычисления приближенного решения $u_m(t)$ задачи (5), (6). Это обстоятельство позволяет получить оценку погрешности приближенного решения $u_m(t)$ задачи (5), (6), связав погрешность с невязкой. Поскольку точное решение задачи (5), (6) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и, учитывая, что $u(t) = u_m(t) - \varepsilon_m(t)$, можно преобразовать невязку

$$R_m(t) = \frac{du_m(t)}{dt} - \tilde{f}(t\ ,u_m(t)) = \frac{du_m(t)}{dt} - \tilde{f}(t\ ,u_m(t)) - \frac{du(t)}{dt} + \tilde{f}(t\ ,u(t)) =$$

$$= \frac{d\varepsilon_m(t)}{dt} + \tilde{f}(t\ ,u_m(t) - \varepsilon_m(t)) - \tilde{f}(t\ ,u_m(t)). \tag{48}$$

Таким образом, погрешность $\varepsilon_m(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varepsilon_u(t)}{dt} = -\tilde{f}(t\ ,u_m(t) - \varepsilon_m(t)) + \tilde{f}(t\ ,u_m(t)) + R_m(t) =$$

$$= -h\cdot f(a+ht\ ,\ u_m(t) - \varepsilon_m(t)) + h\cdot f(a+ht\ ,u_m(t)) + R_m(t),\ \ t\in[0,m]. \tag{49}$$

Все функции, стоящие в правой части уравнения (49) являются известными после того, как найдено приближенное решение $u_m(t)$. Начальное условие (6) выполняется как для точного $u(t)$, так и для приближенного решения $u_m(t)$. Поэтому

$$\varepsilon_m(0) = u_m(0) - u(0) = \bar{y} - \bar{y} = 0\,. \tag{50}$$

Итак, погрешность $\varepsilon_m(t)$ является решением задачи Коши (49), (50). Для решения этой задачи можно использовать любой численный метод. А можно воспользоваться и подходом, описанным в работе [5].

Описанные выше итерационные обработки (уточнения) можно добавлять к вычислительным схемам любых известных численных методов решения задач Коши. Для этого достаточно вместо формулы (33) записать рекуррентные формулы соответствующего численного метода. Иными словами, вместо численных методов, основанных на формуле Тейлора, мы будем использовать другие известные численные методы [1], [3], [4]. Чтобы получить алгоритмы новых, полученных таким способом, вычислительных схем, в приведенных алгоритмах необходимо заменить только строки, отмеченные символами звёздочки.

Приведём рекуррентные схемы нескольких известных численных методов, которые можно использовать вместо формулы (33).

Вычислительная схема одного шага метода Эйлера, применительно к решению задачи Коши (5), (6) на $[i-1,i]$, имеет вид:

$$\mu_{0\,i} = Q_{0\,i-1} + Q_{1\,i-1}\,. \tag{51}$$

Вычислительная схема одного шага метода Хойна (или Хьюна или Рунге-Кутта 2 порядка), применительно к решению задачи Коши (5), (6) на $[i-1,i]$, имеет вид:

$$\mu_{0\,i} = Q_{0\,i-1} + \frac{1}{2}Q_{1\,i-1} + \frac{h}{2}\,f\left(a+hi\ ,\ Q_{0\,i-1}+Q_{1\,i-1}\right). \tag{52}$$

Вычислительная схема одного шага метода Рунге-Кутта 4 порядка, применительно к решению задачи Коши (5), (6) на $[i-1,i]$, имеет вид:

$$K_2 = h\cdot f\left(a+h\left(i-\frac{1}{2}\right),\ Q_{0\,i-1}+\frac{Q_{1\,i-1}}{2}\right),$$

$$K_3 = h\cdot f\left(a+h\left(i-\frac{1}{2}\right),\ Q_{0\,i-1}+\frac{K_2}{2}\right),$$

$$K_4 = h\cdot f\left(a+hi\ ,\ Q_{0\,i-1}+K_3\right),$$

$$\mu_{0\,i} = Q_{0\,i-1} + \frac{1}{6}\left(Q_{1\,i-1}+2K_2+2K_3+K_4\right). \tag{53}$$

Вычислительная схема одного шага метода прогноза и коррекции с разгонной формулой из схемы Рунге-Кутта 4 порядка со сгущённой в 2 раза сеткой, применительно к решению задачи Коши (5), (6) на $[i-1,i]$, имеет следующий вид. Если $i\le 3$, то используется разгонная схема:

$$K_{21} = h\cdot f\left(a+\left(i-\frac{3}{4}\right)h\ ,\ Q_{0\,i-1}+\frac{Q_{1\,i-1}}{4}\right),$$

$$K_{31} = h\cdot f\left(a+\left(i-\frac{3}{4}\right)h\ ,\ Q_{0\,i-1}+\frac{K_{21}}{4}\right),$$

$$K_{41} = h\cdot f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\ ,\ Q_{0\,i-1}+\frac{K_{31}}{2}\right),$$

$$\eta = Q_{0\,i-1} + \frac{1}{12}\left(Q_{1\,i-1}+2K_{21}+2K_{31}+K_{41}\right),$$

$$K_{12} = h\cdot f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\ ,\ \eta\right),$$

$$K_{22} = h\cdot f\left(a+\left(i-\frac{1}{4}\right)h\ ,\ \eta+\frac{K_{12}}{4}\right),$$

$$K_{32} = h\cdot f\left(a+\left(i-\frac{1}{4}\right)h\ ,\ \eta+\frac{K_{22}}{4}\right),$$

$$K_{42} = h\cdot f\left(a+ih\ ,\ \eta+\frac{K_{32}}{2}\right),$$

$$\mu_{0\,i} = \eta + \frac{1}{12}\left(K_{12}+2K_{22}+2K_{32}+K_{42}\right). \tag{54}$$

Если $i>3$, то используется схема прогноза и коррекции:

$$K_1 = Q_{0\,i-1} + \frac{h}{24}\cdot\Big(55f\left(a+(i-1)h\ ,\ Q_{0\,i-1}\right) - 59f\left(a+(i-2)h, Q_{0\,i-2}\right) +$$
$$+37f\left(a+(i-3)h\ ,\ Q_{0\,i-3}\right) - 9f\left(a+(i-4)h\ ,\ Q_{0\,i-4}\right)\Big),$$

$$K_2 = Q_{0\,i-1} + \frac{h}{24}\cdot\Big(9f\left(a+ih\ ,\ K_1\right) + 19f\left(a+(i-1)h\ ,\ Q_{0\,i-1}\right) -$$
$$-5f\left(a+(i-2)h\ ,\ Q_{0\,i-2}\right) + f\left(a+(i-3)h\ ,\ Q_{0\,i-3}\right)\Big),$$

$$\mu_{0\,i} = K_2 - \frac{19}{270}\left(K_2-K_1\right). \tag{55}$$

Описанная модификация позволила получить широкий класс новых численных методов с итерационной обработкой. Основываясь только на приведенных формулах (51) – (55) мы получили 15 новых численных методов решения задачи Коши:

- численный метод Эйлера с итерационными обработками при $p=3,4,5$;
- метод Хойна с итерационными обработками при $p=2,3,4,5$;
- метод Рунге-Кутта 4 порядка с итерационными обработками при $p=2,3,4,5$;
- метод прогноза и коррекции (с разгонной формулой в виде схемы Рунге-Кутта 4 порядка со сгущённой в 2 раза сеткой) с итерационными обработками при $p=2,3,4,5$.

Описанный класс численных методов можно ещё расширить, если для вычисления частных производных правой части дифференциального уравнения использовать разностные аппроксимации. Для вычисления частных производных первого порядка, фигурирующих в алгоритме итерационной обработки при $p=3$, используем формулы численного дифференцирования второго порядка точности:

$$\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x}\approx\frac{f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y})-f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y})}{2\Delta x}, \tag{56}$$

$$\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}\approx\frac{f(\bar{x},\bar{y}+\Delta y)-f(\bar{x},\bar{y}-\Delta y)}{2\Delta y}. \tag{57}$$

Для вычисления частных производных второго порядка, фигурирующих в алгоритме итерационной обработки при $p=4$, используем формулы численного дифференцирования второго порядка точности:

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x^2}\approx\frac{f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y})-2f(\bar{x},\bar{y})+f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y})}{(\Delta x)^2}, \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x\partial y}\approx\frac{1}{2\Delta x\Delta y}\big(&f(\bar{x},\bar{y}+\Delta y)+f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y})-f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y}+\Delta y)-f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y}-\Delta y)-\\&-2f(\bar{x},\bar{y})+f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y})+f(\bar{x},\bar{y}-\Delta y)\big),\end{aligned} \tag{59}$$

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y^2}\approx\frac{f(\bar{x},\bar{y}-\Delta y)-2f(\bar{x},\bar{y})+f(\bar{x},\bar{y}+\Delta y)}{(\Delta y)^2}, \tag{60}$$

Для вычисления частных производных третьего порядка, фигурирующих в алгоритме итерационной обработки при $p=5$, также используем формулы численного дифференцирования второго порядка точности:

$$\frac{\partial^3 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x^3}\approx\frac{f(\bar{x}+2\Delta x,\bar{y})-2f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y})+2f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y})+f(\bar{x}-2\Delta x,\bar{y})}{2(\Delta x)^3}, \tag{61}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x^2\partial y}\approx\frac{1}{2(\Delta x)^2\Delta y}\big(&f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y}+\Delta y)-2f(\bar{x},\bar{y}+\Delta y)+f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y}+\Delta y)-\\&-f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y}-\Delta y)+2f(\bar{x},\bar{y}-\Delta y)-f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y}-\Delta y)\big),\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x\partial y^2}\approx\frac{1}{2\Delta x(\Delta y)^2}\big(&f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y}+\Delta y)-2f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y})+f(\bar{x}+\Delta x,\bar{y}-\Delta y)-\\&-f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y}+\Delta y)+2f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y})-f(\bar{x}-\Delta x,\bar{y}-\Delta y)\big),\end{aligned} \tag{63}$$

$$\frac{\partial^3 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y^3}\approx\frac{f(\bar{x},\bar{y}+2\Delta y)-2f(\bar{x},\bar{y}+\Delta y)+2f(\bar{x},\bar{y}-\Delta y)-f(\bar{x},\bar{y}-2\Delta y)}{2(\Delta y)^3}, \tag{64}$$

Описанные в работе новые численные методы требуют дополнительного исследования, подбора значений параметров и сравнения по вычислительной эффективности, как между собой, так и с известными численными методами. Результаты этих исследований будут приведены в следующих работах.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 2002.
4. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1986.
5. Трубников С.В. О новом подходе к построению численных методов решения одномерных задач Коши на основе эрмитовой кусочно-многочленной интерполяции. - Вестник Брянского государственного университета. №4(2006): Естественные и точные науки. – Брянск: РИО БГУ, 2006, С.199-217 .
6. Трубников, С.В. Исправленный метод Эйлера с итерационным уточнением и переменным шагом (текст) / С.В.Трубников // Вестник Брянского государственного университета. №4 (2007) Математика. Физика. Биология. Медицина. Брянск: РИО БГУ, 2007. С.71-83.
7. Трубников, С.В. Модифицированный метод Эйлера с итерационным уточнением и переменным шагом. // Вестник Брянского государственного университета. №4 (2008) Математика. Физика. Биология. Медицина. Брянск: РИО БГУ, 2008. С.70-85.
8. Трубников С.В. О новом подходе к численному решению линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Брянского государственного технического университета. №3. Брянск: БГТУ, 2008. С. 128-137.
9. Трубников С.В. О новом подходе к построению численных методов решения линейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе эрмитовых сплайнов // Вестник Брянского государственного университета. №4 (2011) Точные и естественные науки. Брянск: РИО БГУ, 2011. С. 48-54.
10. Трубников С.В. О новом подходе к численному решению нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Электронный ресурс. // Ученые записки Брянского государственного университета: физико-математические науки/ биологические науки/ ветеринарные науки. №2 (2016). Брянск: РИО БГУ, 2016. 84 с. Точка доступа: http://scim-brgu.ru. Размещено на официальном сайте журнала: 05.10.2016. С. 29-38.

Сведения об авторе

Трубников С.В. – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и прикладной математики Брянского государственного университета имени акад. И.Г. Петровского. E-mail: serg.trubnickov@yandex.ru.

DESCRIPTION OF NEW NUMERICAL METHODS FOR THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ITERATIVE PROCESSING

S.V. Trubnikov
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

A new class of numerical methods for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations is described.
Keywords*: numerical methods; boundary problems; the ordinary differential equations*

References

1. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P. Kobelkov N.M. Numerical methods. M.: Nauka, 1987.
2. Vasilyev F. P. Numerical solution methods of extremal problems. M.: Nauka, 1980.

3. Verzhbitsky V. M., Basics of numerical methods: Textbook for universities. M.: Vysh. shk., 2002.

4. Ivanov V. V., Methods of practical calculations. A reference guide. Kiev: Naukova Dumka, 1986.

5. Trubnikov S. V. About the new approach to construction of numerical methods for solving one-dimensional Cauchy problems based on Hermite piecewise polynomial interpolation. - Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2006, No.4, pp. 199-217.

6. Trubnikov S. V. Corrected Euler's method with iterative refinement and variable pitch. - Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2007, No.4. pp. 71-83.

7. Trubnikov, S. V. Modified Euler's method with iterative refinement and variable pitch. - Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2008, No.4. pp. 70-85.

8. Trubnikov, S. V. About the new approach to the numerical solution of linear boundary value problems for ordinary differential equations of second order. Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2008, No.3. pp. 128-137.

9. Trubnikov, S. V. About the new approach to construction of numerical methods for the solution of linear boundary value problems for systems of ordinary differential equations based on Hermite splines. Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2011. No. 4 pp. 48-54.

10. Trubnikov, S. V. About the new approach to numerical solution of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations of second order. - Uchenye zapiski Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2016, No. 2. pp. 29-38. Electronic resource. Tochka dostupa: http://scim-brgu.ru. Razmeshcheno na oficialnom cayte zhurnala: 05.10.2016.

About author

Trubnikov S.V. – PhD in Physical and Mathematical Sciences, the associate professor, a head of department of computer science and applied mathematics at Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: serg.trubnickov@yandex.ru.

УДК 004.4

ВОЗМОЖНОСТИ СРЕДЫ ECLIPSE ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ИНТЕРФЕЙСОВ МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Д.З. Цхошвили, Н.А. Иванова
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

В работе рассматриваются основные возможности среды Eclipse для разработки интерфейсов мобильных приложений, а также описывается процесс разработки простого мобильного календаря на основе визуального компонента GridView.
Ключевые слова: *Eclipse, Pallete, GridView, мобильные приложения, среда разработки, адаптер, обработчик событий.*

Одной из самых популярных бесплатных сред разработки модульных кроссплатформенных приложений является Eclipse, базовым языком которой является Java. Платформа Eclipse предоставляет разработчикам широкие возможности: редактор с подсветкой синтаксиса, инкрементальную компиляцию кода, потокобезопасный отладчик, навигатор по классам, менеджеры файлов и проектов, а также интерфейсы к стандартным системам контроля исходных текстов. Достоинствами Eclipse по сравнению с другими средами разработки являются удобный и понятный интерфейс, кроссплатформенность, возможность установки дополнений, а также настройки среды.

Создание проекта в Eclipse реализуется с помощью команды File/New. В подпункте Other отображаются все типы проектов, которые поддерживает среда. Например, Web-проекты, проекты на языках C, C++, Java-проекты. Для создания мобильных приложений используются Java-проекты.

Для формирования интерфейса мобильных приложений в Eclipse имеется вкладка Palette, на которой представлены все необходимые элементы управления. Palette делится на блоки: Form Vidgets, Text Field, Layouts, Composite, Images & Media, Time & Date, Transitions, Advanced, Other [2].

Компонет GridView располагается в разделе Composite палитры компонентов и представляет собой двумерную таблицу. На основе такой таблицы довольно легко реализовать календарь с возможностью вывода информации об определенных событиях по нажатию на элемент таблицы.

В статье «Разработка приложения мобильный cinema-календарь для учета просмотренных фильмов и сериалов» описана разработка мобильного приложения, в котором для реализации календаря использовался именно компонент GridView [1]. В данной статье будут рассмотрены возможности использования визуального элемента управления GridView для формирования интерфейса простейшего календаря на его основе.

В первую очередь необходимо создать новый проект File/New/Project, задать имя и версию Android, остальные пункты оставить по умолчанию.

Далее необходимо добавить на форму activity_main два компонента TextView и компонент GridView (рис. 1). Первое текстовое поле отводится для заголовка, второе – для вывода информации по нажатию на элементы GridView.

На следующем шаге требуется определить значения свойств размещенных компонентов: для текстовых окон прописать значения, которые они отображают (для TextView1 – «Январь 2017», для TextView2 – «»), для GridView изменить стандартное значение столбцов (в нашем случае компонент будет содержать 7 столбцов). Вся информация сохраняется в файле activity_main.xml (рис.2).

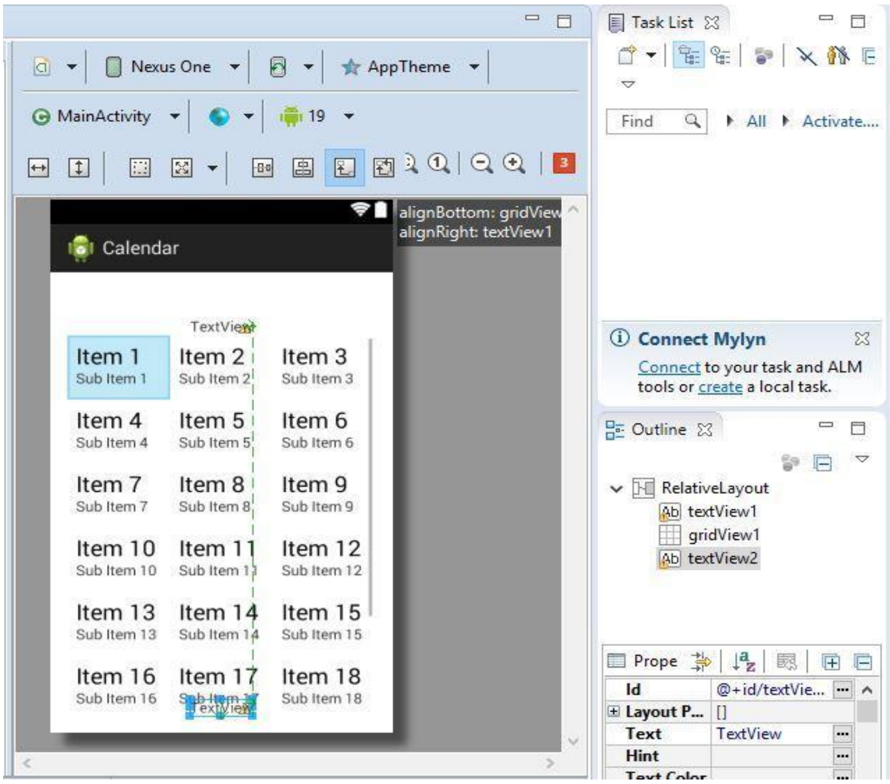


Рис.1. Конструктор формы

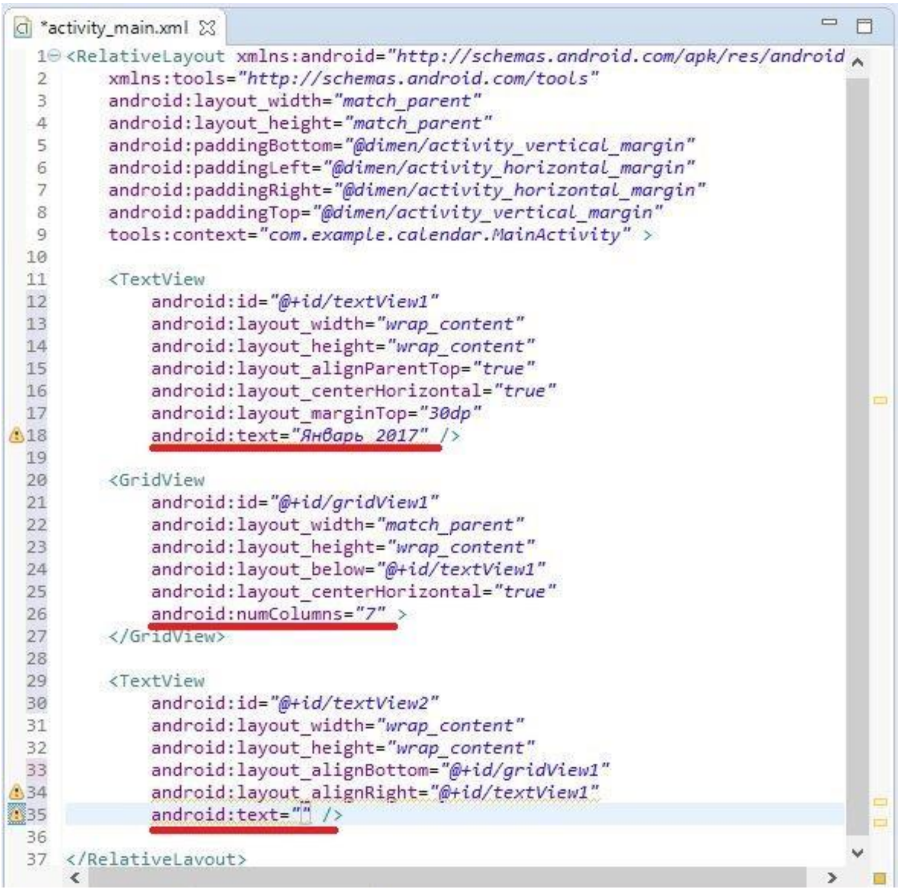


Рис.2. Редактирование свойств компонентов

Для редактирования свойств элементов таблицы нужно создать файл item.xml в папке layout (File/New/Other/Android XML File) и добавить на форму текстовое поле, в котором будет отображаться содержимое элементов таблицы (листинг 1).

Листинг 1

```
<?xml version="1.0" encoding="utf-8"?>
<LinearLayout
 xmlns:android="http://schemas.android.com/apk/res/android"
 android:layout_width="match_parent"
 android:layout_height="match_parent"
 android:background="@drawable/rect"
 android:orientation="vertical">
<TextView
 android:id="@+id/tvText"
 android:layout_width="wrap_content"
 android:layout_height="wrap_content"
 android:gravity="center_vertical"
 android:minHeight="40dp"
 android:textSize="20sp"
 android:text="">
</TextView>
</LinearLayout>
```

На этом редактирование интерфейса окончено и можно перейти к добавлению функционала. Для этого потребуется внести изменения в файл MainActivity.java, расположенный в папке src проекта.

В коде реализуем наполнение таблицы через адаптер. Адаптер – шаблон проектирования, который используется для преобразования интерфейса таким образом, чтобы он мог работать с другим, несовместимым, интерфейсом [3]. В данном случае адаптер используется для заполнения значений таблицы из кода. Нужно определить переменные, в том числе и массив значений элементов таблицы, создать адаптер, заполнить необходимые параметры и назначить его элементу GridView.

Далее нужно реализовать обработку событий для элементов таблицы, чтобы по нажатию на определенный элемент, в текстовом поле отображалась информация о нем (листинг 2).

Листинг 2

```
gvMain.setOnItemClickListener(new AdapterView.OnItemClickListener() {
public void onItemClick(AdapterView<?> parent, View view, int position, long id)
{  //созданиеобработчиканажатияпоэлементамтаблицы
if (position==13){
textView2.setText("1 января 2017: \n 4x01 Шерлок \n 4x11 Бруклин 9-9");
                    }
else if (position==17){
textView2.setText("5 января 2017: \n 10x12 Теориябольшоговзрыва ");
                   }// определение вывода сообщений по нажатию наопределенный
элемент
             }
             });
}
}
```

Таким образом, простое приложение с календарем разработано, и можно проверить его работоспособность на эмуляторе (рис.3).

При запуске приложения на экран выводится заголовок и календарь. При желании пользователь может нажать на определенный день в календаре и увидеть пояснительную информацию (например, какие фильмы или сериалы выходят в этот день).

Рис.3. Запуск проекта на эмуляторе

Аналогичным образом разрабатывалось и приложение «Мобильный cinema-календарь для учета просмотренных фильмов и сериалов» [1], в котором внешний вид календаря был доработан, добавлены маркеры для элементов. Также были добавлены кнопки для перехода к следующему и предыдущему месяцу (рис. 4).

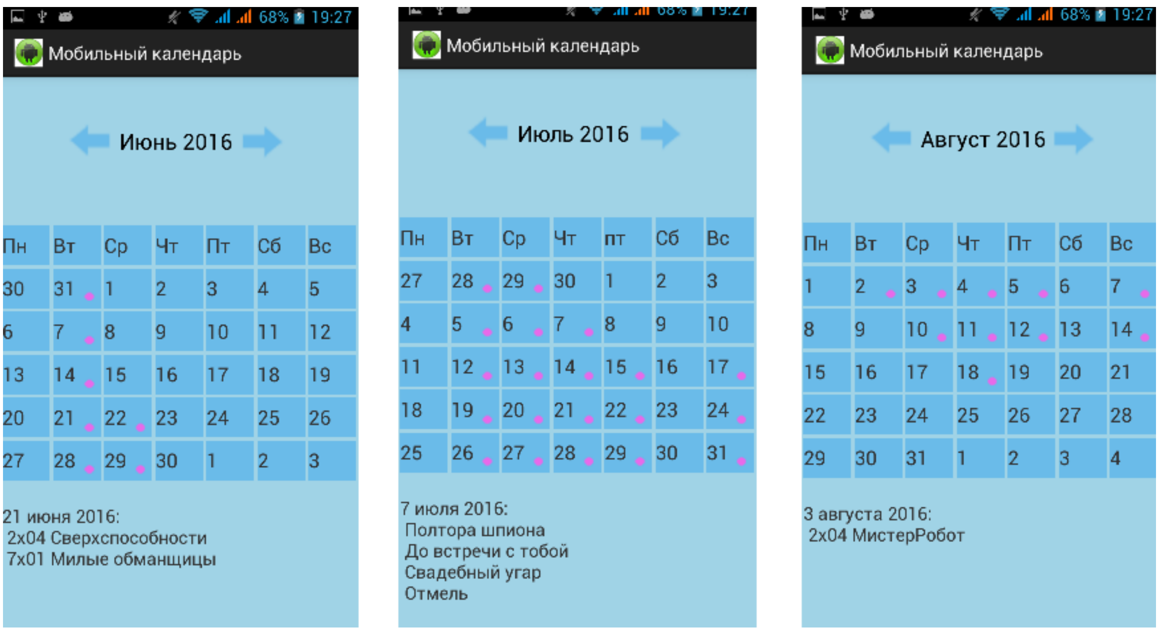


Рис.4. Интерфейс приложения «Мобильный cinema-календарь»

Такой календарь предоставляет пользователям информацию более наглядно, в удобном для восприятия формате. Его можно использовать и в других мобильных приложениях для различных напоминаний, например о важных событиях или днях рождения.

Eclipse – одна из самых популярных сред разработки в мире. Одной из причин этого является простота проектирования приложений благодаря палитре управляющих элементов Palette, в которой содержатся необходимые инструменты для разработки интерфейса приложений. С помощью компонента GridView достаточно легко создать простой календарь с возможностью записи и отображения данных в него, который может быть использован во многих приложениях.

Список литературы

1. «Разработка приложения мобильный cinema-календарь для учета просмотренных фильмов и сериалов». [Электронный ресурс].URL:http://web.snauka.ru/issues/2016/07/69834. (Дата обращения: 14.12.2016).
2. Eclipse Documentation. [Электронный ресурс]. URL:http://help.eclipse.org/mars/ index.jsp? topic=%2Forg.eclipse.wb.doc.user%2Fhtml%2Fuserinterface%2Fpalette.html. (Дата обращения: 15.12.2016).
3. IBM Developer Works. [Электронныйресурс].URL: http://www.ibm.com/ developerworks/ru/ library/j-ft11/index.html. (Дата обращения: 15.12.2016).

Сведения об авторах

Цхошвили Д.З. – магистрант направления подготовки «Прикладная математика и информатика», Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, e-mail: darya9312@mail.ru.

Иванова Н. А. – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики, Брянский Государственный университет имени академика И.Г. Петровского, e-mail: ivanova_natala@mail.ru.

POSSIBILITY OF ECLIPSE ENVIRONMENT FOR THE DEVELOPMENT OF MOBILE APPLICATIONS INTERFACE

D.Z. Tskhoshvili, N.A. Ivanova

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

The paper discusses the main features of the Eclipse environment for the development of mobile application interfaces, and describes the process of developing a simple mobile calendar on the basis of a visual component GridView.

Keywords: *Eclipse, Pallete, GridView, mobile application development environment, an adapter, an event handler.*

References

1. "Development of mobile application cinema-calendar to account for View movies and TV shows." [Electronic resource] .URL: http: //web.snauka.ru/issues/2016/07/69834. (Reference date: 12.14.2016).
2. Eclipse Documentation. [Electronic resource] .URL: http: //help.eclipse.org/mars/ index.jsp topic =% 2Forg.eclipse.wb.doc.user% 2Fhtml% 2Fuserinterface% 2Fpalette.html?. (Reference date: 12.15.2016).
3. IBM Developer Works. [Elektronnyyresurs] .URL: http://www.ibm.com/ developerworks/ru/library/j-ft11/index.html. (Reference date: 12.15.2016).

About authors

Tskhoshvili D.Z. – graduate student, Department of computer science and applied mathematics, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: darya9312@mail.ru.

Ivanova N.A. – PhD in Technical Sciences, assistant professor, Department of computer science and applied mathematics, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: ivanova_natala@mail.ru.

УДК 371.24+371.212

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ НА ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВАХ

А.В. Чуева, В.И. Горбачев
Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского

В работе исследуются общие закономерности исследования уравнений, неравенств, систем в содержании функционально-графического метода. Выделена общая основа представления пространства числовых предикатов. Установлено содержание обобщенно-теоретического, обобщенно-алгоритмического и конкретно-эвристического видов деятельности, формирующих как представление пространства предикатов, так и последовательность действий функционально-графического метода.
Ключевые слова: *методика обучения математике, пространство уравнений, неравенств, систем, функционально-графический метод решения.*

Конструируемая на базе фундаментальных теорий числовых систем, числовых элементарных функций теория уравнений, неравенств, систем исследует специфическое пространство объектов – пространство предикатов на числовых множествах. Структуру предикатно-числового пространства составляют абстрактные классы уравнений, неравенств, систем уравнений, систем неравенств – взаимосвязанные, но отдельные абстрактные классы объектов с соответствующими мировоззренческой, методологической основами, задачами личностного развития [6, 8, 9].

В классической содержательно-методической концепции классы уравнений, неравенств, систем исследуются вне общего теоретического анализа, в значительной степени для приложений свойств числовых элементарных функций в методологической схеме «класс числовых функций – свойства класса – класс уравнений со спектром функциональных равносильностей – класс неравенств со спектром функциональных равносильностей – содержательно-методический модуль функций, уравнений, неравенств». В модульном представлении «функции – преобразования – уравнения, неравенства» аналитическое, функционально-графическое исследование уравнений, неравенств, систем выступает средой и итоговым результатом учебной математической деятельности: «Способы решения уравнений основаны на использовании равносильных преобразований, на учете свойств соответствующих функций, их области определения и области значений» [13, с.24].

В содержании ограниченного классом функций модуля в общем представлении класса уравнений (неравенств, систем) с опорой на свойства класса функций в определенной степени осуществляется его обобщенно-теоретическое представление, на основе выделенных закономерностей класса последовательно формируются обобщенно-алгоритмическая и конкретно-эвристическая деятельности, их перенос в классы уравнений и неравенств с параметрами (М.И. Башмаков [1, с.37, 51], Г.В. Дорофеев [6, с.59], В.И. Горбачев [2, с.63], [3, с.61], А.И. Маркушевич [13, с.25], А. Г. Мордкович [15, с.21], [16, с.25], Г.И. Саранцев [17, с.38], М.И. Шабунин [20, с.23]).

Пространственно-предикатный тип мышления теории уравнений, неравенств, систем востребует становление деятельности представливания в сочетании с теоретико-предикатной деятельностью в целостном (не фрагментарном) содержательно-теоретическом подходе, структурируемом последовательно развиваемыми обобщенно-теоретической, обобщенно-алгоритмической и конкретно-эвристической деятельностями [4,5,18].

В обобщенно-теоретической деятельности формируется целостное представление о базовых понятиях, теоремах теории уравнений, неравенств, систем, выступающих математическими моделями реальных ситуаций равновесия, сравнения, выделяется спектр классов уравнений, неравенств, систем, ограниченных классами числовых элементарных функций, их композиций, комбинаций, осуществляется формирование функционально-аналитического, функционально-графического методов [10,12].

Обобщенно-алгоритмическая деятельность направлена на выделение как общих, так и соответствующих классу функций тождественных, равносильных преобразований, функционально-графических представлений в классах уравнений, неравенств, систем, способов их решения в форме обобщенных алгоритмических схем, модульную интеграцию функций, уравнений, неравенств в качестве промежуточного результата исследования [8,15].

В содержании конкретно-эвристической деятельности обобщенная схема решения подвергается модификации, исследовательский характер имеют анализ конкретного примера с позиции его принадлежности расширению стандартного класса уравнений, неравенств на базе композиции, комбинации, обращения функций, поиск способа сведения к уравнению, неравенству с ранее установленным общим способом решения [13,19].

Закономерность становления пространственно-предикатного типа мышления в теории уравнений, неравенств, систем средствами взаимосвязанных обобщенно-теоретического, обобщенно-алгоритмического, конкретно-эвристического видов учебной математической деятельности не стыкуется с принятой в методике обучения математике содержательно-методической концепцией:

- функционально-определенное модульное изучение уравнений, неравенств оказывается фрагментарным, затушевывает цель становления математической теории уравнений и неравенств;

- в содержательно-методическом модуле обобщенно-теоретический, обобщенно-алгоритмический, конкретно-эвристический виды деятельности представливания не отдифференцированы, не имеют взаимного обоснования;

- достигаемыми результатами учебной математической деятельности выступают лишь ограниченные модулями компоненты функционально-аналитического и функционально-графического методов решения, представленные в субъектном плане в изолированной форме;

- системы уравнений в силу наличия двух переменных в классе функций одной переменной не получают логического обоснования, выпадают из методологической схемы функционально-аналитического и функционально-графического методов.

Базовым в пространстве числовых предикатов выступает класс всех уравнений, определенных формальной записью $F(x)=0$ с системой характеристических свойств:

- уравнение $F(x)=0$ – одноместный предикат равенства;

- предикат $F(x)=0$ задан на определенном подмножестве системы действительных чисел;

- поставлена задача поиска области истинности предиката (множества решений уравнения)

$$F^{+} = \{a|F(a) = 0\};$$

- выражение с переменной $F(x)$ задает аналитическую форму функционального соответствия $F: x \to F(x)$, позволяющего по записи класса числовых элементарных функций выделять класс уравнений;

- класс всех уравнений – абстрактный, бесконечный с совокупностью подклассов, соответствующих либо стандартным классам функций, либо их композиции, комбинации, обращению;

- основными в решении (поиске множества решений) уравнений каждого из подклассов выступают дополняющие друг друга функционально-аналитический и функционально-графический методы.

С классом уравнений с одной переменной непосредственно связан класс неравенств, определенный формальной записью $F(x) < 0$, обладающий характеристическими свойствами:

- неравенство $F(x) < 0$ – одноместный предикат сравнения;
- предикат $F(x) < 0$ задан на определенном подмножестве системы действительных чисел;
- поставлена задача поиска области истинности предиката (множества решений неравенства)

$F^+ = \{a|F(a) < 0\}$;

- аналитическая форма функционального соответствия $F: x \to F(x)$ по классу числовых элементарных функций $y = F(x)$ позволяет выделить как классы уравнений $F(x) = 0$, так и классы соответствующих неравенств $F(x) < 0, F(x) > 0$;
- в решении неравенства $F(x) < 0$ фундаментальное свойство непрерывности числовой элементарной функции $y = F(x)$ приводит к оценке ее знакопостоянства на промежутках, выделенных решениями уравнения $F(x) = 0$;
- решение неравенств каждого из классов предполагает решение исходного уравнения, осуществляется либо функционально-аналитическим, либо функционально-графическим методами [11], [14].

Пространство числовых предикатов помимо уравнений, неравенств содержит и их конъюнкции:

- системы уравнений с двумя переменными и множеством решений в форме упорядоченных пар – точек координатной плоскости;
- системы неравенств с двумя переменными и ограниченной частью точек координатной плоскости в качестве множества решений.

Класс систем уравнений с двумя переменными задается формальной записью $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ с характеристическими свойствами:

- система уравнений – предикат, составленный из двухместных предикатов равенства $F(x,y) = 0$ и $G(xy) = 0$, который обрашается в истинное высказывание на множестве всех общих решений каждого из уравнений;
- предикат $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ задан на множестве упорядоченных пар действительных чисел – множестве точек координатной плоскости;
- поставлена задача поиска области истинности предиката

$$(F \wedge G)^+ = \{(a,b)|F(a,b) = 0 \text{ и } G(ab) = 0\};$$

- функционально определенные уравнения $F(x,y) = 0$ и $G(x,y) = 0$ однозначно задают класс систем уравнений с соответствующим методом исследования, комбинации классов уравнений фиксируют спектр систем уравнений;
- основными в решении (поиске множества решений) систем уравнений каждого из классов выступают взаимосвязанные функционально-аналитический и функционально-графический методы.

Класс систем неравенств с двумя переменными, представленный в форме $\begin{cases} F(x,y) \le 0 \\ G(x,y) \ge 0 \end{cases}$, востребованный в учебной математической деятельности, задается характеристическими свойствами:

- система неравенств – предикат, составленный из двухместных предикатов сравнения $F(x,y) \le 0$ и $G(xy) \ge 0$, обращается в истинное высказывание на множестве всех общих решений каждого из неравенств;
- предикат $\begin{cases} F(x,y) \le 0 \\ G(x,y) \ge 0 \end{cases}$ задан на множестве упорядоченных пар действительных чисел – определенной области координатной плоскости;
- поставлена задача поиска области истинности предиката

$$(F \wedge G)^{+} = \{(a,b)|F(a,b) \leq 0 \text{ и } G(ab) \geq 0\};$$

- функционально определенные неравенства $F(x,y) \leq 0$ и $G(xy) \geq 0$ однозначно задают класс систем неравенств с соответствующим методом исследования, комбинации классов неравенств фиксируют спектр систем неравенств;

- основанием исследования (анализа множества решений) систем неравенств каждого из классов выступает интеграция функционально-аналитического и функционально-графического методов.

Пространство числовых предикатов, как объект теории уравнений, неравенств, систем, в соответствии с методологией развертывания учебной математической теории исследуется в содержании деятельности представливания и теоретико-предикатной деятельности

Деятельность представливания как учебную математическую деятельность характеризуют:

- направленность на формирование пространственно-предикатного типа мышления средствами функционально-аналитического и функционально-графического методов исследования классов уравнений, неравенств, систем, интегрируемых в единый метод, сочетающий приближенные образные и точные аналитические действия [8], [16];

- проектирование в соответствии с закономерностями восхождения от абстрактного к конкретному – развертыванием категории решения уравнения через системы (общих, тождеств, функциональных) равносильностей к функционально-определенному спектру классов уравнений, неравенств, систем с адекватными методами исследования в содержании функционально-аналитического метода [1], [9];

- понятийное выделение в обобщенно-алгоритмической деятельности обобщенных способов исследования в функционально-определенных классах уравнений, неравенств, систем в качестве конкретных проявлений функционально-аналитического и функционально-графического методов[2, 3], [13];

- планирование конкретно-эвристической деятельности в расширениях функционально-определенных классов числовых предикатов композицией, комбинацией, обращением функций в содержании функционально-аналитического и функционально-графического методов[7], [20].

Пространственно-предикатный тип мышления не ограничивается представлением и теоретическим обоснованием функционально-аналитического метода исследования всех типов числовых предикатов, выделением функционально-определенных классов уравнений, неравенств, систем с соответствующими обобщенными способами решения. Также как и в геометрическом, числовом, функциональном пространствах важной составляющей учебной деятельности представливания выступает формирование адекватных уравнениям, неравенствам, системам функционально-графических образов в содержании функционально-графического метода решения.

Функционально-графический метод решения уравнений, неравенств, систем с одной переменной базируется на уже сформированных функционально-графических представлениях: графические представления класса функций, общая схема исследования функций и построение графика, связь аналитических и графических преобразований функции. Фундаментальные теоретико-функциональные виды деятельности, представленные в форме прикладных обобщенно-алгоритмических и конкретно-эвристических действий, в классах уравнений $F(x)=0$, неравенств $F(x) < 0$ с одной переменной определяют каркас функционально-графического метода:

- выделение функции $y = F(x)$ в аналитическом задании уравнения, неравенства, оценка ее принадлежности к определенному классу функций, анализ способа конструирования функции на основе базовой функции стандартного класса;

- актуализация свойств определенного класса функций, характеристических точек графиков, конкретизация общего способа исследования класса функций в форме алгоритмической схемы исследования функции $y = F(x)$;

- построение графика функции $y = F(x)$ в соответствие с выделенной алгоритмической схемой исследования;

- визуализация нулей функции $y = F(x)$ в качестве решений уравнения $F(x)=0$, приближенная оценка решений с заданной точностью;

- визуализация промежутков с отрицательными значениями функции $y = F(x)$ в качестве множества решений неравенства $F(x) < 0$, приближенное аналитическое описание решений;

- поиск функционально-аналитического способа решения уравнения $F(x)=0$ на основе функционально-графических представлений, числа и приближенных значений решений уравнения;

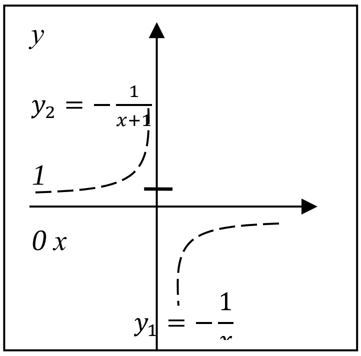
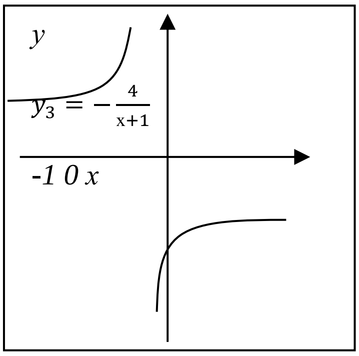
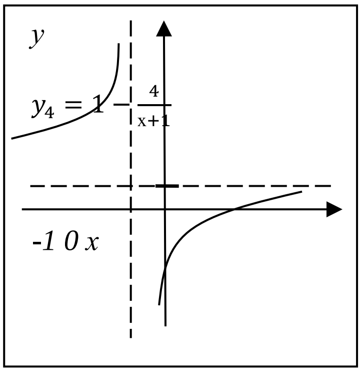
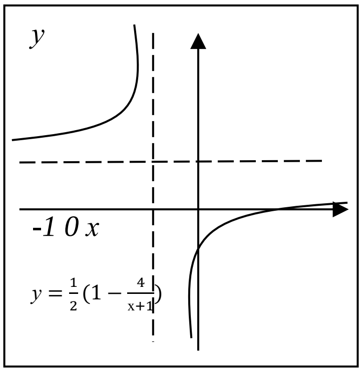
- решение уравнения $F(x)=0$ функционально-аналитическим способом – в содержании обобщенного способа решения уравнений данного класса;

- поиск аналитического способа оценки знаков функции $y = F(x)$ на промежутках значений, выделенных нулями, точное описание множества решений неравенства $F(x) < 0$;

- сравнение функционально-графического и функционально-аналитического способов решения уравнения $F(x)=0$, неравенства $F(x) < 0$ с позиции выделения структуры методов, их общности, построения целостного функционально-графического образа.

На решении конкретного рационального уравнения функционально-графическим методом рассмотрим фундаментальные закономерности метода.

Общие закономерности функционально-графического метода	Конкретная реализация функционально-графического метода в классе рациональных уравнений и неравенств
1. Исходное уравнение исследуется с позиции принадлежности к определенному классу и системой равносильных преобразований приводится к стандартному виду.	**Задача.** Решить уравнение $-\frac{2}{x+1} = -\frac{1}{2}$ функционально-графическим методом. Решение. 1. Преобразуем рациональное уравнение к стандартному виду: - перенесем все слагаемые уравнения в левую часть $-\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2} = 0$; - приведем левую часть к общему знаменателю $\frac{-4+x+1}{2(x+1)} = 0$; - приведем подобные слагаемые $\frac{-3+x}{2(x+1)} = 0$ (1) – рациональное уравнение стандартного вида.
2.Выделяется функция $y = F(x)$ в аналитическом задании уравнения, (неравенства), оценивается ее принадлежность к определенному классу функций, анализируется способ конструирования функции на основе базовой функции стандартного класса;	2. Сопоставим уравнение (1) с функцией $y = F(x) = \frac{-3+x}{2(x+1)}$ (2). Так как функция (2) есть дробь, где и числитель и знаменатель многочлены, соответственно данная функция принадлежит классу дробно-рациональных функций. Выделим в записи функции (3) целую часть: $y = \frac{-3+x}{2(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1-4}{x+1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{4}{x+1})$. Получаем $y = \frac{1}{2}(1 - \frac{4}{x+1})$ (3). Для функции (3) функцией стандартного вида выступает $y = \frac{-1}{x}$ – с графиком – гиперболой.

3.Актуализируются свойства определенного класса функций, характеристических точек графиков, осуществляется конкретизация общего способа исследования класса функций в форме алгоритмической схемы исследования функции $y = F(x)$;	3. Графиком функции (2) $y = F(x) = \frac{-3+x}{2(x+1)}$ является гипербола. Ее асимптоты: вертикальная $y = -3$, горизонтальная x = -1 . Построим график в следующем порядке: 1) график функции $y_1 = -\frac{1}{x}$ – искомый график (Рис.1а); 2) строим график $y_2 = -\frac{1}{x+1}$, с помощью сдвига вдоль оси Ox на 1 влево (Рис. 1а); 3) строим график $y_3 = 4y_2$, с помощью растяжения графика от оси Ox в 4 раз (Рис. 1б); 4) построить график функции $y_4 = 1 + y_3$, с помощью сдвига вдоль оси Oy вверх на 1 (Рис. 1в); 5) построить график $y = \frac{1}{2}y_4$, с помощью сжатия графика к оси оси Ox в $\frac{1}{2}$ раз (Рис. 1г).
4. Строится график функции $y = F(x)$ в соответствие с выделенной алгоритмической схемой исследования;	  Рис.1 (а) Рис. 1(б)   Рис. 1(в) Рис. 1(г)
5.Осуществляется визуализация нулей функции $y = F(x)$ в качестве решений уравнения $F(x) = 0$, приближенная оценка решений с заданной точностью;	5. По графику (Рис. 1г) функции (3) решением уравнения (1) относительно выбранного единичного отрезка будет приближенное значение с точностью до десятых x = 3,3. Проверим подствив в исходное уравнение, получим: $\frac{-3+3{,}3}{2(3{,}3+1)} = \frac{0{,}3}{8{,}6} \approx 0{,}0\,35 \neq 0$ Проверим x = 3,11. Получим $\frac{-3+3{,}11}{2(3{,}11+1)} = \frac{0{,}11}{8{,}22} \approx 0{,}013$ В качестве приближенного решения уравнения выбираем x = 3,11.
6. Визуализация промежутков с отрицательными значениями функции	6. На графике (Рис. 1г) функции (3) можно определить решение неравенства $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x+1}\right) < 0$ (4). Решением неравенства (4) бутут те значения абсцисс, при которых график функции (3) расположен ниже оси Ox

$y = F(x)$ в качестве множества решений неравенства $F(x) < 0$, приближенное аналитическое описание решений;	(аналогично >0). Следовательно решением будут значения *x* расположенных от -1 до точки *x* = 3,11. пересечения графика с осью *Ox*.
7.Поиск функционально-аналитического способа решения уравнения $F(x)=0$ на основе функционально-графических представлений, числа и приближенных значений решений уравнения;	7. В зависимости от выбора единичного отрезка, точности построения графика решение уравнения оказывается приближенным, уточняется в последовательности приближений. Задача состоит в поиске таких значений при которых уравнение (1) превращается в верное равенство. Поэтому для точного вычисления таких значений нужно уравнение (1) решить аналитическим способом.
8.Решение уравнения $F(x)=0$ функционально-аналитическим способом – в содержании обобщенного способа решения уравнений данного класса;	8. $\frac{-3+x}{2(x+1)} = 0$ $\begin{cases} -3+x=0 \\ 2(x+1) \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ x \neq -1 \end{cases}$ Решением уравнения (1) является *x* =3.
9. Поиск аналитического способа оценки знаков функции $y = F(x)$ на промежутках значений, выделенных нулями, точное описание множества решений неравенства $F(x) < 0$;	9. Аналогично, для неравенства чтобы оценить знаки функции (3) на промежутках сужествует аналитический способ. Он заключается в следуещем: $\frac{-3+x}{2(x+1)} < 0 \equiv$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3+x<0 \\ 2(x+1)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -3+x>0 \\ 2(x+1)<0 \end{cases} \end{array}\right. \equiv \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<3 \\ x>-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>3 \\ x<-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;3)$
10.Сравнение функционально-графического и функционально-аналитического способов решения уравнения $F(x)=0$, неравенства $F(x) < 0$ с позиции выделения структуры методов, их общности, построения целостного функционально-графического образа.	10. В решении уравнения (1) и неравенства (4) функционально-графическим методом использовался аналитический способ поиска решений. При этом функционально-графический метод позволяет актуализировать свойства элементарных функций, элементарные преобразования их графиков, а так же представление решения уравнения и неравенства на образно-графической форме.

Функционально-графический метод решения систем уравнений $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ с двумя переменными, базирующийся на функционально-графических представлениях множеств решений уравнений $F(x,y)=0$ и $G(x,y)=0$, выступает вспомогательным средством функционально-аналитического метода с ведущей функцией формирования его функционально-графического образа. Составляющими метод действиями выступают:

- анализ уравнения $F(x,y)=0$ системы с позиции установления либо функционального представления линии L всех решений, либо ее принадлежности определенному специальному классу линий с уточнением значений параметров;

- графическое изображение линии L всех решений уравнения $F(x,y)=0$;

- анализ уравнения $G(x,y)=0$ системы с позиции установления либо функционального представления линии H всех решений, либо ее принадлежности определенному специальному классу линий с уточнением значений параметров;

- графическое изображение линии H всех решений уравнения $G(x,y)=0$ в общей системе координат с линией L;

- визуализация всех точек пересечения линий L и H уравнений $F(x,y)=0$ и $G(x,y)=0$, приближенная оценка координат точек пересечения в качестве множества решений системы $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$;

- поиск функционально-аналитического способа решения системы $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ на основе функционально-графических представлений, приближенных значений решений системы согласно обобщенному способу решения класса систем;

- интеграция функционально-графического и функционально-аналитического способов решения системы $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ с позиции выделения структуры методов, их общности, построения целостного функционально-графического образа.

Теоретическое обоснование функционально-графического метода исследования числовых предикатов позволяет выделить его закономерности в содержании обобщенно-алгоритмической, конкретно-эвристической деятельностей.

1. Обобщенно-алгоритмическая деятельность в классах уравнений, неравенств, соответствующих стандартным классам функций в содержании функционально-графического метода:

- анализ функции в аналитическом задании уравнения, неравенства, оценка ее принадлежности к определенному классу функций, анализ способа конструирования, актуализация свойств, характеристических точек графиков, конкретизация общего способа исследования;

- построение графика функции в соответствие с выделенной алгоритмической схемой исследования, визуализация нулей функции $y=F(x)$ в качестве решений уравнения $F(x)=0$, приближенная оценка решений с заданной точностью;

- визуализация промежутков с отрицательными значениями функции в качестве множества решений неравенства, приближенное аналитическое описание решений;

- поиск функционально-аналитического способа решения уравнения, неравенства на основе функционально-графических представлений, приближенных значений решений уравнения;

- сравнение функционально-графического и функционально-аналитического способов решения уравнения $F(x)=0$, неравенства $F(x)<0$ с позиции выделения структуры методов, их общности, построения целостного функционально-графического образа.

Обобщенно-алгоритмическая деятельность в классах систем уравнений в содержании функционально-аналитического и функционально-графического методов:

- аналитическое описание множества решений уравнений с двумя переменными в форме функциональной зависимости координат точек (решений) для стандартного класса функций одной переменной, его расширения, либо в спектре специальных, ранее изученных классов неявно заданных линий;

- графическое изображение множества решений уравнений с двумя переменными в форме функциональной зависимости координат точек, либо в форме неявно заданных линий специальных, ранее изученных классов уравнений;
- визуальное представление всех точек пересечения линий множества решений уравнений с двумя переменными, приближенная оценка координат точек пересечения в качестве множества решений системы;
- переход средствами равносильных преобразований к системе уравнений стандартного вида, исследование уравнения с одной переменной для функционально-определенного класса функций, выделение множества всех решений системы;
- анализ соответствия функционально-графического и функционально-аналитического методов решения, аналитического и образного представлений множества решений.

2. Конкретно-эвристическая деятельность в функционально-определенных классах уравнений, неравенств в содержании функционально-графического и функционально-аналитического методов:

- планирование эвристической деятельности по расширению функционально-определенных классов числовых предикатов композицией, комбинацией, обращением функций с позиции выделения способов решения уравнений, неравенств, систем в содержании функционально-аналитического и функционально-графического методов;
- анализ конкретного примера с позиции его принадлежности расширению стандартного класса уравнений, неравенств, систем на базе композиции, комбинации, обращения функций, эвристический, творческий поиск способа сведения к уравнению, неравенству, системе для стандартного класса функций с ранее установленным общим способом решения;
- выделение обобщенного способа решения в новом функционально-определенном классе уравнений, неравенств, систем в форме конкретной модификации функционально-аналитического и функционально-графического методов решения.

Список литературы

1. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. М.: Наука,1976. 96с.
2. Горбачев В.И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами // Математика в школе. 1999. №6. С. 60-68.
3. Горбачев В.И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами не выше второй степени // Математика в школе. 2000. № 2. С. 61-68.
4. Горбачев В.И. Компетенции учебной математической деятельности уровня общего образования. Вестник Брянского государственного университета: Педагогика и психология. Брянск: РИО БГУ №1, 2014. С.278-287.
5. Горбачев В.И. Закономерности проектирования учебных математических теорий в методологии теоретического типа мышления. Фізико-математична освіта: науковий журнал. 2016. Выпуск 1(7). С. 49-60.
6. Дорофеев Г.В. О принципах отбора содержания школьного математического содержания // Математика в школе. 1990. №6. С. 2-5. Гуманитарно-ориентированный курс – основа учебного предмета математика в общеобразовательной школе // Математика в школе. -1997.- №4. С. 59-66.
7. Звавич Л.И., Погорев Б.П. Тригонометрические уравнения // Математика в школе. 1995. № 3. С. 18-27.
8. Концепция математического образования (в 12-летней школе) // Математика в школе. 2000. №2. С. 13-18.
9. Колмогоров А.Н., Яглом И.М. О содержании школьного курса математики // Математика в школе. 1965. № 4. С.53-61.

10. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 1.Арифметика, Алгебра, Анализ: Пер. с нем./ Под ред. В.Г. Болтянского. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1987. 432с.

11. Калинкин А.К. К вопросу о решении неравенств методом интервалов // Математика в школе. 1995. № 6. С. 5-8.

12. Ньютон, И. Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе / И. Ньютон. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 448с.

13. Маркушевич Л.А., Черкасов Р.С. «Уравнения и неравенства» в заключительном повторении курса алгебры средней школы // Математика в школе. 1994. № 1. С. 24-32.

14. Мордкович А.Г. Новая концепция школьного курса алгебры // Математика в школе. 1996. №6. С. 28-33.

15. Мордкович А.Г. К концепции школьного математического образования // Математика в школе. 1989. № 2. С. 20-30.

16. Мордкович А.Г. О некоторых методических вопросах, связанных с решением уравнений // Математика в школе. 2006. № 3. С. 25-34.

17. Саранцев Г.И. Цели обучения математике в средней школе в современных условиях// Математика в школе. 1999. №6. С. 36-41.

18. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. *(утвержден приказом Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413)*. http://минобрнауки.рф/документы/2365. (дата обращения 22.03.2016).

19. Чучаев И.И., Мещерякова С.И. Уравнения вида $f(g(x)) = f(h(x))$ и нестандартные методы решения // Математика в школе. 1995. № 3. С. 48-54.

20. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы. Уравнения и системы уравнений / Учеб. пособие. М. Аквариум. 1997. 272 с.

Сведения об авторах

Чуева А.В. – магистрант направления подготовки «Педагогическое образование», направленность «Математическое образование», Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского.

Горбачев В.И. – к.ф.-м.н., д.п.н., профессор, директор Естественно-научного института Брянского государственного университета имени акад. И.Г. Петровского, enibgu@mail.ru.

METHODS OF FORMATION OF FUNCTIONAL GRAPHICAL METHOD FOR SOLVING EQUATIONS, INEQUALITIES, SYSTEMS OF NUMERICAL SETS

A.V. Chueva, V.I. Gorbachev

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

This paper investigates the general laws of the study of equations, inequalities, systems in the maintenance of functional graphical method. Obtained common basis representation of space of numerical predicates. Installed content generalized theory, generalized algorithmic and heuristic-specific activities that form as a representation of the predicates of space and sequence of functional graphical method.

Keywords: *Methods of teaching mathematics, space of equations, inequalities, systems; functional and graphical method of solution.*

References

1. Bashmakov M.I. Uravnenija i neravenstva. M.: Nauka,1976. 96s.

2. Gorbachev V.I. Obshhie metody reshenija uravnenij i neravenstv s parametrami // Matematika v shkole. 1999. №6. S. 60-68.

3. Gorbachev V.I. Obshhie metody reshenija uravnenij i neravenstv s parametrami ne vyshe vtoroj stepeni // Matematika v shkole. 2000. № 2. S. 61-68.

4. Gorbachev V.I. Kompetencii uchebnoj matematicheskoj dejatel'nosti urovnja obshhego obrazovanija. Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta: Pedagogika i psihologija. Brjansk: RIO BGU №1, 2014. S.278-287.

5. Gorbachev V.I. Zakonomernosti proektirovanija uchebnyh matematicheskih teorij v metodologii teoreticheskogo tipa myshlenija. Fiziko-matematichna osvita: naukovij zhurnal. 2016. Vipusk 1(7). S. 49-60.

6. Dorofeev G.V. O principah otbora soderzhanija shkol'nogo matematicheskogo soderzhanija // Matematika v shkole. 1990. №6. S. 2-5. Gumanitarno-orientirovannyj kurs – osnova uchebnogo predmeta matematika v obshheobrazovatel'noj shkole // Matematika v shkole. 1997. №4. S. 59-66.

7. Zvavich L.I., Pogorev B.P. Trigonometricheskie uravnenija // Matematika v shkole. 1995. № 3. S. 18-27.

8. Koncepcija matematicheskogo obrazovanija (v 12-letnej shkole) // Matematika v shkole. 2000. №2. S. 13-18.

9. Kolmogorov A.N., Jaglom I.M. O soderzhanii shkol'nogo kursa matematiki // Matematika v shkole. 1965. № 4. S.53-61.

10. Klejn F. Jelementarnaja matematika s tochki zrenija vysshej: V 2-h tomah. T. 1.Arifmetika, Algebra, Analiz: Per. s nem./ Pod red. V.G. Boltjanskogo. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.,1987. 432s.

11. Kalinkin A.K. K voprosu o reshenii neravenstv metodom intervalov // Matematika v shkole. 1995. № 6. S. 5-8.

12. N'juton, I. Vseobshhaja arifmetika ili kniga ob arifmeticheskih sinteze i analize / I. N'juton. M.: Izd-vo AN SSSR, 1948. 448s.

13. Markushevich L.A., Cherkasov R.S. «Uravnenija i neravenstva» v zakljuchitel'nom povtorenii kursa algebry srednej shkoly // Matematika v shkole. 1994. № 1. S. 24-32.

14. Mordkovich A.G. Novaja koncepcija shkol'nogo kursa algebry // Matematika v shkole. 1996. №6. S. 28-33.

15. Mordkovich A.G. K koncepcii shkol'nogo matematicheskogo obrazovanija // Matematika v shkole. 1989. № 2. S. 20-30.

16. Mordkovich A.G. O nekotoryh metodicheskih voprosah, svjazannyh s resheniem uravnenij // Matematika v shkole. 2006. № 3. S. 25-34.

17. Sarancev G.I. Celi obuchenija matematike v srednej shkole v sovremennyh uslovijah// Matematika v shkole. 1999. №6. S. 36-41.

18. Federal'nyj gosudarstvennyj obrazovatel'nyj standart srednego (polnogo) obshhego obrazovanija.(utverzhden prikazom Minobrnauki Rossii ot 17 maja 2012 g. № 413). http://minobrnauki.rf/dokumenty/2365. (data obrashhenija 22.03.2016).

19. Chuchaev I.I., Meshherjakova S.I. Uravnenija vida f(g(x))=f(h(x)) i nestandartnye metody reshenija // Matematika v shkole. 1995. № 3. S. 48-54.

20. Shabunin M.I. Matematika dlja postupajushhih v vuzy. Uravnenija i sistemy uravnenij / Ucheb.posobie. M. Akvarium, 1997, 272 s.

About authors

Chueva A.V. – graduate student, Department of Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Gorbachev V.I. – Doctor of Education, professor, Director of Institute of Natural Sciences, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky. E- mail: enibgu@mail.ru

УДК 371.24+371.212

К ОБОСНОВАНИЮ СОДЕРЖАНИЯ ОБЩЕКУЛЬТУРНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

И.Ю. Шалов, В.И. Горбачев
Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского

В статье исследуется содержание общекультурных компетенций математического образования. Выделены историко-общественная компетенция, компетенция субъектного становления, компетенция социо-профессионального самоопределения. Для компетенций установлено содержание учебной математической деятельности.
Ключевые слова: *общее образование, общекультурные компетенции, учебные математические теории, методика обучения математике.*

Концепция развития математического образования в Российской Федерации, утвержденная распоряжением Правительства РФ, отмечает особое место математики в науке, культуре и общественной жизни как одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса [1]. Отражение общекультурной роли математики как учебного предмета (общекультурный подход), наряду с ее мировоззренческой, методологической, личностной значимостью, является не только отечественной, но и общеевропейской закономерностью. Государственный стандарт базового и полного общего образования Украины [2], основанный на личностно-ориентированном, компетентностном и деятельностном подходах, в качестве ведущей выделяет общекультурную компетентность – способность ученика анализировать и оценивать достижения национальной и мировой культуры, ориентироваться в культурном и духовном содержании современного общества, использовать методы самовоспитания, ориентированные на общечеловеческие ценности. Образовательный стандарт учебного предмета «Математика» (1-11 классы) Республики Беларусь также выделяет общекультурную цель – развивать у ученика интерес к математике, формировать понимание ее места в системе наук, ее методологического значения и роли в формировании общей культуры, осознание того, что средствами математики описываются и исследуются явления и процессы реальности [3].

Основываясь на базовых целях общего образования, структурном представлении социального опыта и опыта личности, А.В. Хуторской [4] выделил и классифицировал ключевые образовательные компетенции – компетенции деятельности ученика, позволяющие ему овладевать социальным опытом, опытом практической деятельности в различных сферах современного общества.

В обширном спектре ключевых компетенций А.В. Хуторской важное место отвёл группе общекультурных компетенций, охватывающих:

- познание и опыт деятельности в области национальной и общечеловеческой культуры;
- духовно-нравственные основы жизни человека и человечества, отдельных народов;
- культурологические основы семейных, социальных, общественных явлений и традиций;
- роль науки и религии в жизни человека;
- компетенции в бытовой и культурно-досуговой сфере, владение эффективными способами организации свободного времени;
- опыт освоения учеником картины мира, расширяющейся до культурологического и всечеловеческого понимания мира [4].

Характеризуя ключевые компетенции как некоторые внутренние, потенциальные, сокрытые психологические новообразования: знания, представления, программы (алгоритмы) действий, систем ценностей и отношений, которые затем выявляются в компетентностях человека, И.А. Зимняя также актуализирует группу общекультурных компетенций: « компетенции ценностно-смысловой ориентации в мире: ценности бытия, жизни; ценности культуры (живопись, литература, искусство, музыка), науки; производства; истории цивилизаций, собственной страны; религии» [5].

Анализируя закономерности компетентностного подхода в содержании общего образования, В.А. Болотов, В.В. Сериков мировоззренческую, общекультурную, личностную цели обучения вкладывают в понятие ключевой (образовательной) компетентности: «Компетентность - это способ существования знаний, умений, образованности, способствующий личностной самореализации, нахождению воспитанником своего места в мире, вследствие чего образование предстает как высокомотивированное и в подлинном смысле личностно-ориентированное, обеспечивающее максимальную востребованность личностного потенциала, признание личности окружающими и осознание ею самой собственной значимости» [6, с.12-13]. Не ограничивая понимание компетентностного подхода только системой ключевых компетенций, авторы отмечают, что «дальнейшая разработка модели компетентностного образования связана с переходом от общетеоретического представления о его содержании к построению предметных образовательных программ, адекватных им ситуационно-моделирующих технологий и контрольно-измерительных материалов» [6, с.12].

В процессе систематизации сферы компетенций образовательной деятельности А.В. Хуторской, Л.Н. Хуторская [7], наряду с группами ключевых и общепредметных компетенций, выделяют группу предметных компетенций – в соответствии с уровнями (метапредметным, межпредметным, предметным) учебной методологии. Приоритетный характер формирования ключевых компетенций определен А.В. Хуторским в качестве методологической закономерности: предметные компетенции проектируются, формируются в содержании ключевых.

В исследовании задачи классификации предметных компетенций математического образования В.И. Горбачев отмечает, что «цели математического образования не только выступают предметным проявлением целей общего образования (общеобразовательный целевой компонент), но и отражают специфику познавательной математической деятельности, связанную с абстрагированием, доказательностью, универсальностью математических теорий, их моделей (специфический целевой компонент)» [9, с. 100]. Содержательная включенность целей математического образования в систему целей общего образования, а также их относительная самостоятельность, опосредованная спецификой абстрактной, доказательной математической деятельности и подтверждаемая всей историей мировой математики, выступают главной закономерностью выделения, формирования компетенций математической деятельности учащихся.

Проекция целей общего образования на учебную математическую деятельность в компетентностном подходе характеризует описываемый в категориях дидактики, педагогической психологии спектр предметных компетенций математического образования, имеющих социальный, общественно-коммуникативный, метапредметный уровни представленности.

Компетенции учебной математической деятельности, обоснованные спецификой ее предмета, логико-содержательными средствами, способами рассуждений, имеют предметный уровень представленности, выделяются методикой обучения математике в аналитико-синтетическом исследовании адаптированных математических теорий.

Другая, не менее важная закономерность задачи классификации предметных компетенций деятельности учения – целевой подход в анализе базовых видов деятельности учащихся при изучении адаптированных учебных математических теорий. Нормативно закрепленная либо выделяемая в теоретическом анализе общеобразовательная, предметная цель обучения формируется, достигается в адекватной деятельности, структурируемой ее базовыми видами. В свою очередь, деятельность в системе критериальных признаков сформированности востребует определенные компетенции – компетенции ее успешного выполнения, рефлексии, экспертного оценивания.

Методологическая схема «цель деятельности – виды деятельности – компетенции цели (деятельности)» с одной стороны структурирует, технологизирует цель в системе критериальных признаков компетенции, с другой стороны по классификации целей приводит к классификации компетенций образовательной, предметной учебной деятельности.

В содержательно-целевом анализе математического образования оказывается возможным:

- выделение компетенций учебной математической деятельности, выступающих проекциями общекультурных компетенций на учебный предмет «математика»;
- поиск компетенций учебной математической деятельности, становящихся в условиях переноса в другие учебные дисциплины общепредметными;
- классификация, последующее формирование предметных компетенций математической деятельности [9].

Для выделения компетенций, характеризующих математическую деятельность уровня общего образования, наиболее естественной является принятая программой общего математического образования система целей обучения математике в содержании:

- мировоззренческой цели, направленной на овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;
- методологической цели, обоснованной формированием во внутреннем плане субъекта представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;
- общекультурной цели обучения математике, связанной с представлениями о математике как части человеческой культуры, пониманием значимости математики для общественного прогресса;
- личностной цели обучения математике, направленной на интеллектуальное развитие учащегося, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для продуктивной жизни в обществе [8].

Так, в конкретном проявлении схемы «цель деятельности – виды деятельности – компетенции цели (деятельности)» в методологической цели общеобразовательного курса математики самостоятельный статус имеет внутренняя методология познания – об идеях и методах математики. Задача становления внутренней методологии реализуется в деятельности представливания в содержании адекватных видов деятельности: становления во внутреннем плане базовых понятий теории; классификации, систематизации понятий теории; системно-структурного представления теории во взаимной связи понятий, теорем, классов задач; интеграции понятий различных теорий в «математической картине мира». Интеграция выделенных видов учебной математической деятельности, их рефлексия во внутреннем плане выступают итоговым результатом в форме логико-понятийной компетенции [12].

Выделение компетенций общекультурной цели учебной математической деятельности предполагает исследование категории общей культуры в содержании общего образования с последующей проекцией закономерностей общекультурной деятельности на математическое образование. Исходным в детализации категории культуры выступает ее описание в Декларации прав культуры: культура является определяющим условием реализации созидательного потенциала личности и общества, гуманистическим ориентиром и критерием развития человека и цивилизаций. Разделяя в категории культуры общую социальную характеристику культуры и общую культуру человека, И.А. Зимняя[10] содержание общей культуры человека описывает как целостность его внутренней культуры с личностными, деятельностными, интерактивными особенностями и образованности, как освоенной совокупности социо-профессиональных знаний с качествами системности, широты, всесторонности, глубины. Компонентный анализ категории общей культуры позволяет выделить фундаментальные для целей общего образования и математического, в частности, ее виды в единстве, во взаимосвязи:

- культуру общества, общественных форм производства;
- субъектную культуру мировоззрения, мышления, деятельности;
- культуру социо-профессиональной деятельности человека, коллектива, общества в целом.

В историко-социальном плане общекультурный подход в образовании в задаче формирования культуры общества, общественных форм производства предусматривает мировоззренческий анализ общенаучной картины мира, исследование методологии познавательной человеческой деятельности, приложений научных теорий, методов, фактов в преобразующей человеческой деятельности - значимых в истории общественного производства, цивилизации, принятых обществом в качестве средств, условий последующего развития, прогресса (историко-общественный компонент культуры).

С позиций личностно-деятельностного подхода в содержании субъектной культуры выделяются план культуры личности с формирующимися во внутреннем плане эмоционально-волевой сферой, способами мышления, мировоззрением и план культуры деятельности, характеризующий направленность, способы и результат присвоения общественно выработанных норм, ценностей, целостного гуманитарного знания (субъектный компонент культуры). «Общая культура человека, – отмечает И.А. Зимняя, - это способ его социальной жизнедеятельности, социального бытия, выявляющий всю совокупность присвоенных им знаний, ценностей, традиций в процессе и результате их распредмечивания и последующего опредмечивания и проявляющийся во всех формах его поведения» [10, с. 6].

Направленность образования на взращивание субъектной культуры, имеющей общественно-исторический характер и выраженной в предметно-профессиональной форме, предполагает адекватную социо-профессиональную образовательную деятельность субъекта по становлению культуры языка и речи, культуры общения и поведения, спектра предметно-профессиональных картин мира - план культуры социального взаимодействия человека с другими людьми (компонент культуры социально-профессионального самоопределения).

Выделенные историко-общественный, социо-профессиональный и субъектный компоненты общей культуры охватывают фундаментальные цели образования, имеют относительно самостоятельный характер, востребуют адекватные виды образовательной деятельности как с позиции общества, так и с позиции ученика. В содержательно-целевом подходе общекультурной цели образования соответствуют имеющие статус ключевых историко-общественная компетенция, компетенция социо-профессионального самоопределения и компетенция субъектного становления [9].

Проекция ключевых компетенций общей культуры на математическое образование позволяет представить общекультурную цель обучения математике в содержании компетентностного подхода, технологизировать ее компетенциями, которые являются дидактическими по характеристическим признакам, закономерностям формирования, но математическими по содержанию деятельности:

- историко-общественной компетенцией, адекватной историко-общественному компоненту культуры;
- компетенцией субъектного становления, соответствующей субъектному компоненту культуры;
- компетенцией социо-профессионального самоопределения, реализующей компонент культуры социально-профессионального самоопределения.

В описании содержания учебной математической деятельности, адекватной каждой из математических общекультурных компетенций, используется содержательно-теоретический подход:

- развитая в процессе общественного развития математическая теория фундаментального плана (числа, функций, геометрических фигур, векторов, уравнений и неравенств) подвергается анализу с позиции ее мировоззренческой, методологической значимости как в целом для общественного развития, так и для развития личности;

- в содержании выступающей достижением человеческой культуры математической теории выделяются ведущие идеи, представления, методы деятельности, факты, составляющие основу содержания адаптированной для целей общего образования учебной математической теории;

- в системе психолого-дидактических принципов, образовательных теорий в содержании целостного гуманитарного знания проектируется процесс изучения адаптированной математической теории в ее интеграции с другими, реализующий выделенную систему целей.

В содержательно-теоретическом подходе историко-общественная компетенция, структурирующая методологию общеобразовательной математической деятельности, формируется в системе базовых видов деятельности:

- представления фундаментальных типов (пространств) абстрактных, идеализированных объектов, отражающих отношения (число, фигура, вектор), зависимости (функция, вероятность), условия взаимной связи (уравнения и неравенства) явлений, свойств реального мира и выступающих базовыми элементами современной математической картины мира;

- выделения закономерных свойств, связей пространств математических абстракций в форме значимых в историко-математическом плане теорий, выступающих предметом учебной математической деятельности;

- систематизации методов установления справедливости математических предложений теории (доказательства, моделирования, конструирования, исследования, решения) как предметных способов постижения истины в отражении закономерностей реального мира;

- понятийного представления теорий в сочетании фундаментальных понятий отдельных теорий и понятий-категорий общематематического характера;

- оперирования математическими терминами, логическими средствами рассуждений, образными формами представлений для целей становления математического языка, математического мышления.

Субъектная компетенция общекультурной цели математического образования в планах культуры личности и культуры деятельности определяется:

- направленностью на присвоение целостного представления математических теорий и их базовых моделей, логико-содержательных и образно-символических способов деятельности в пространствах абстрактных объектов, описания теорий в адекватной системе понятий;

- эмоциональной выраженностью учебной математической деятельности, оценкой личностной значимости содержания деятельности при изучении математических теорий, управлением системой волевых усилий для достижения запланированного результата;

- становлением математического мировоззрения в мировоззренческой сфере личности, осознанием способов образования и способов приложения математических абстракций, методов, идей, теорий в познании закономерностей реального мира;

- овладением выработанными в историко-математической практике интуитивной и понятийной, образной и логической, индуктивной и дедуктивной, теоретической и модельной формами учебной математической деятельности;

- сформированностью ведущих видов математического мышления – абстрактного, эвристического, алгоритмического, пространственного, логического – самостоятельной значимости и развивающихся до уровня соответствующей культуры.

Компетенция социо-профессионального самоопределения, как интеграционный (субъект - общество) компонент общей культуры в математическом образовании, характеризуется учебно-социальными видами деятельности:

- овладения субъектом процедурами доказательства, определения, классификации, конструирования, исследования, решения при изучении математической теории и ее приложений в условиях внешнего управления, оценки, коррекции, в сочетании коллективных и индивидуальных форм учебной математической деятельности;

- становления субъектной математической речи различных уровней обобщения конкретных исполнительских действий в содержании воспроизводящей, эвристической, творческой деятельностей;

- формирования математической картины мира в содержании базовых учебных математических теорий, ее интеграция в системе предметных картин мира для становления научно-социального субъектного мировоззрения;

- организации межличностного взаимодействия в спектре различных ролей субъекта (учитель, ученик, методолог, теоретик, практик, эксперт) на разных этапах изучения, анализа учебной математической теории в условиях рефлексии, оценки результатов коллективной и индивидуальной форм деятельности;

- субъектного выбора предпочтительных видов и методов учебной математической деятельности в условиях обогащения опыта в содержании теорий, изменений в учебном социуме, личных представлениях последующей жизнедеятельности.

В методологии учебной математической деятельности адекватные компетенциям общекультурной цели виды деятельности конкретизируются в соответствии с закономерностями развертывания базовых учебных математических теорий (числа, функций, геометрических фигур, векторов, уравнений и неравенств) [11, 12].

Учебная математическая деятельность, адекватная историко-социальной компетенции, в содержании базовых теорий технологизируется вполне конкретными методическими задачами:

1. Формирование представлений числового пространства в абстрактном отражении счета, измерения; функциональных пространств, абстрагирующих зависимости с однозначно определенным образом; геометрического пространства с идеализацией абстрактных свойств формы и взаимного расположения; пространства числовых предикатов, отражающих условия равновесия и сравнения; вероятностного пространства, исследующего закономерности случайного.

2. Логико-содержательный анализ адаптированных учебных математических теорий: числовых систем с арифметической, геометрической, алгебраической моделями натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; теории функций в содержании геометрических, вероятностной, предикатной, дискретной и непрерывной числовых моделей с общим представлением функций; теории геометрических фигур, исследующей метрические, пространственные, конструктивные свойства фигур; теории уравнений, неравенств, систем на числовых множествах с общей идеей равносильности.

3. Становление базовых методов доказательства, исследование свойств соответствующих пространств абстрактных объектов: метода математической индукции, метода предельного перехода, метода математического моделирования, аналитико-синтетического метода, метода конструирования и преобразований, функционально-аналитического и функционально-графического методов.

4. Исследование фундаментальных математико-философских идей «конечного и бесконечного», «дискретного и непрерывного», «функционального и вероятностного», «целого и части», «истины и доказательства», «содержательного и логического», «теории и модели».

5. Выделение фундаментальных в истории развития математики понятий числа, функции, геометрической фигуры, уравнения, вероятности, их представление в содержании теорий и моделей, в процедурах обобщения и конкретизации, в интуитивной, аналитической и логико-символической формах.

6. Переход от оперирования в памяти, мышлении абстрактными объектами, их образами к отрефлексированной обществом аналитико-синтетической деятельности в системе понятий, теорем, их логических связей в целостном представлении теории.

Направленная на становление субъектной компетенции общекультурной цели учебная математическая деятельность имеет индивидуально окрашенный характер, в личностном плане в значительной степени определяется эмоциональной сферой учебного взаимодействия, сложившимися представлениями социо-профессиональной жизнедеятельности, общими математико-мировоззренческими представлениями и складывающимися на их основе субъектными образами каждой из отдельных теорий, формирующимися в теориях способами деятельности.

Субъектный образ учебной математической теории определяется сформированностью во внутреннем плане деятельности представливания и теоретико-пространственной деятельности соответствующего пространства абстрактных объектов в спектре соответствующих обобщенных способов деятельности. Итоговой закономерностью в плане становления субъектной компетенции выступают анализ и оценка сформированного во внутреннем плане образа математической теории с позиций «общекультурного наследия», личностной самореализации, собственной значимости.

В теории числовых систем в деятельности представливания создается внутренний образ числового пространства в последовательно расширяющихся моделях и образ теории пространства – аксиоматизируемой, с модельным методом доказательства свойств. Обобщенными способами деятельности в теории выступают:

- исследование цепочки расширений конкретной (геометрической, арифметической, алгебраической) модели;

- исследование числовой системы в содержании аксиоматического подхода, в системе модельных представлений числа, операций, отношений, универсальных и специфических методов доказательства;

- исследование числового пространства в условиях интеграции теории числовой системы и ее моделей, представления фундаментальных свойств конечности, бесконечности, счетности, континуальности, дискретности, непрерывности.

Теория функций во внутреннем плане разделяется на общую теорию функций в форме общего представления функционального пространства с понятиями-категориями композиции, комбинации, обращения, свойствами конечности-бесконечности, дискретности-непрерывности и предметные модели общей теории функций (теория отображений, теория преобразований, теория операторов, теория меры, теория булевых функций, теория числовых дискретных функций, теория числовых непрерывных функций). Деятельность представливания, как ведущая в формировании функциональных представлений, функционального мышления, характеризуется обобщенными способами деятельности, отражающими спектр ее моделей:

- построения, исследования функциональной модели в предметном (числовых систем, векторном, евклидовом, точечном, геометрическом, случайных величин, двоичных последовательностей) пространстве;

- исследования теоретических закономерностей предметного пространства в содержании функциональных моделей спектрального этапа;

- становления фундаментальных методов теории функций, их приложений в функциональных моделях числового пространства интегрального этапа;

- становления интегральных модельно-теоретических представлений функционального пространства.

Целостный субъектный образ теории геометрических фигур формируется на базе представлений геометрического пространства - трехмерного, евклидова, топологического, с ортонормированной системой координат, инвариантного относительно преобразований движения, подобия, проектирования. Исследование закономерностей геометрического пространства осуществляется в содержании теоретико-геометрической деятельности - создания, структурирования, методологического анализа евклидовой геометрии как абстрактной теории геометрического пространства с аксиоматизацией определенных свойств геометрических фигур, преобразований, использованием логических средств анализа.

Пространственные представления, мышление формируются в системе пространственных, метрических, конструктивных свойств геометрических фигур, в содержании аналитико-синтетического, конструктивного, алгебраического методов их исследования в учебной математической деятельности, структурируемой обобщенными способами деятельности:

- создания и оперирования внутренними пространственными образами геометрических фигур в схеме «объекты физического пространства – физическая модель (форма) – геометрическая фигура – конструктивные изображения геометрической фигуры – свойства геометрической фигуры - внутренний пространственный образ»;

- исследования геометрических фигур в схеме «пространство физических моделей – пространство геометрических фигур – свойства геометрического пространства – свойства класса геометрических фигур»;

- теоретико-геометрической деятельности построения евклидовой геометрии в методологической схеме «абстрактное геометрическое пространство – свойства классов геометрических фигур – теория геометрического пространства».

Субъектные системно-структурные представления евклидова пространства, его арифметической модели в единстве с векторно-координатным, аналитическим методами исследования геометрических фигур, выступающих предметом аксиоматической теории евклидова пространства, характеризуются обобщенными способами деятельности в формах:

- векторного метода исследования пространственных свойств геометрических фигур в схеме «геометрическое пространство – трехмерное векторное пространство»;

- координатного метода исследования пространственных и метрических свойств геометрических фигур в евклидовом пространстве в схеме «трехмерное векторное пространство - трехмерное евклидово пространство»;

- аналитического метода исследования пространственных и метрических свойств геометрических фигур в схеме «трехмерное евклидово пространство - арифметическое трехмерное пространство - аналитический метод исследования геометрических фигур в евклидовом пространстве».

Теория числовых предикатов, базирующаяся на математико-мировоззренческих представлениях пространства числовых предикатов, формируется в содержании функционально-аналитического и функционально-графического методов решения функционально-определенных классов уравнений, неравенств, систем. Пространственно-предикатный тип мышления востребует становление деятельности представливания в сочетании с теоретико-предикатной деятельностью в целостном содержательно-теоретическом подходе, структурируемом последовательно развиваемыми обобщенными видами:

- обобщенно-алгоритмической деятельности в классах уравнений, неравенств, соответствующих стандартным классам функций в содержании функционально-аналитического метода;

- обобщенно-алгоритмической деятельности в классах уравнений, неравенств, соответствующих стандартным классам функций в содержании функционально-графического метода;

- обобщенно-алгоритмической деятельности в классах систем уравнений в содержании функционально-аналитического и функционально-графического методов;

- конкретно-эвристической деятельности в функционально-определенных классах уравнений, неравенств в содержании функционально-графического и функционально-аналитического методов;

- теоретико-предикатной деятельности анализа и обоснования теоретических закономерностей решения уравнений, неравенств, систем.

Учебно-социальные виды деятельности, направленные на становление компетенции социо-профессионального самоопределения, имеют системообразующий характер, являются ключевыми в достижении общекультурной цели математического образования:

- в системе психолого-социальных, дидактических, методических закономерностей личностно-социального учебного взаимодействия отражают отрефлексированный обществом историко-общественный потенциал содержания целостной учебной математической деятельности;

- создают среду учебного взаимодействия, в которой происходит структурирование коллективных и индивидуальных форм математического мировоззрения, взращивание субъектного математического мышления;

- в системе представлений пространств абстрактных объектов, теоретических закономерностей классов объектов, обобщенных способов деятельности создают условия интериоризации учебной математической деятельности, формирования субъектных образов каждой из учебных математических теорий.

Основу процесса интериоризации составляет общий подход к изучению учебных математических теорий:

- мировоззренческое обоснование процедуры абстрагирования и идеализации, представление математического пространства объектов;

- выделение базовых классов объектов пространства, их свойств в мировоззренческом отражении отношений, свойств реального мира;

- представление математической теории для описания закономерностей, свойств идеального пространства в содержательном, аксиоматическом подходах;

- становление обобщенных способов деятельности представливания и теоретико пространственной деятельности на воспроизводящем, эвристическом, творческом уровнях;

- организация рефлексии пространственно-теоретической деятельности с позиции выделения базовых понятий, методов доказательства, общих способов исследования, формирования целостного представления теории;

- оценка, экспертиза сформированности личностных представлений теории, мировоззренческих представлений учебной математической деятельности.

Видимыми, измеряемыми обобщенными результатами сформированности общекультурных компетенций учебной математической деятельности выступают:

- выраженность интереса, эмоциональная окрашенность учебного взаимодействия в базовых видах деятельности;

- сформированность понятийной математической речи, ее употребление в математической, общеучебной деятельности;

- полнота мировоззренческих представлений математических теорий в общем содержании предметных картин мира;

- математическая культура выполнения математических действий, анализа явлений реального мира средствами математических теорий.

Список литературы

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации // Распоряжение Правительства Российской Федерации № 2506-р от 24 декабря 2013 г.
2. Государственный стандарт базового и полного общего образования Украины // Постановление Кабинета Министров Украины №1392 от 23.09.2011 г.
3. Образовательный стандарт учебного предмета «Математика» (1-11 классы) // Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 32 от 29.05.2009.
4. Хуторской А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций // Интернет-журнал "Эйдос". 2005. 12 декабря. Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm. - В надзаг: Центр дистанционного образования "Эйдос", e-mail: list@eidos.ru.
5. Зимняя И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. 2003. № 5.
6. Болотов В.А., Сериков В.В. Компетентностная модель: от идеи к образовательной программе // Педагогика. 2003. № 10. С. 8-14.

7. Хуторской А. В., Хуторская Л. Н. Компетентность как дидактическое понятие: содержание, структура и модели конструирования// Проектирование и организация самостоятельной работы студентов в контексте компетентностного подхода: Межвузовский сборник научных трудов/ Под ред. А. А. Орлова. Тула. Изд-во Тул. гос. пед. ун-та, 2008, Вып. 1. С.117-137.

8. Сборник нормативных документов. Математика / Сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев, М.: Дрофа, 2004. 79 с.

9. Горбачев В.И. Предметные компетенции общеобразовательного курса математики и их классификация // Интеграция общего и профессионального математического образования стран европейского сотрудничества в контексте Болонского соглашения. Брянск, Изд-во ООО «Ладомир», 2014. С. 96-105.

10. Зимняя И.А. Общая культура и социально-профессиональная компетентность человека // Интернет-журнал "Эйдос". 2006. 4 мая. http://www.eidos.ru/journal/2006/0504.htm. В надзаг: Центр дистанционного образования "Эйдос", e-mail: list@eidos.ru.

11. Горбачев В.И. Методология компетентностного подхода в учебной математической деятельности общего образования // Научные основы интеграции национальных образовательных стандартов общего и высшего математического образования (Россия-Беларусь-Украина): Международная коллективная монография / Антоненкова Ю.А. и др.; под общ. ред. И. Е. Маловой. Брянск: Изд-во ИП Огнева, 2014. С. 32-50.

12. Горбачев В.И., Горбачева Е.В., Малова И.Е. Закономерности становления логико-понятийной компетенции // Вестник Брянского государственного университета имени академика И. Г. Петровского: Педагогика/ психология/ история/ право/ литературоведение/ языкознание/ точные и естественные науки. Брянск: РИО БГУ. 2015. № 2. С.33-45.

Сведения об авторах

Шалов И.Ю. – магистр направления подготовки «Педагогическое образование», направленность «Математическое образование», Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского.

Горбачев В.И. – к.ф.-м.н., д.п.н., профессор, директор Естественно-научного института Брянского государственного университета имени акад. И.Г. Петровского, e-mail: enibgu@mail.ru.

FOR SUBSTANTIATION CONTENT OF COMMON CULTURAL COMPETENCES OF BASIC MATH EDUCATION

I.Y. Shalov, V.I. Gorbachev,
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

Annotation. The article presents the content of common cultural competences of mathematics education. Obtained historical and social competence, competence of subject formation, the competence of the socio-professional self-determination. The content of educational mathematical activity ascertained for competences.

Key words*: *basic education, common cultural competences, educational mathematical theories, mathematics teaching methodology.

References

1. Concepcija razvitija matematicheskogo obrazovanija v Rossijskoj Federacii // Rasporjazhenie Pravitel'stva Rossijskoj Federacii № 2506-r ot 24 dekabrja 2013 g.

2. Gosudarstvennyj standart bazovogo i polnogo obshhego obrazovanija Ukrainy // Postanovlenie Kabineta Ministrov Ukrainy №1392 ot 23.09.2011 g.

3. Obrazovatel'nyj standart uchebnogo predmeta «Matematika» (1-11 klassy) // Postanovlenie Ministerstva obrazovanija Respubliki Belarus' № 32 ot 29.05.2009.

4. Hutorskoj A.V. Tehnologija proektirovanija kljuchevyh i predmetnyh kompetencij // Internet-zhurnal "Jejdos". 2005. 12 dekabrja. http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm. - V nadzag: Centr distancionnogo obrazovanija "Jejdos", e-mail: list@eidos.ru.

5. Zimnjaja I.A. Kljuchevye kompetencii – novaja paradigma rezul'tata obrazovanija//Vysshee obrazovanie segodnja. 2003. № 5.

6. Bolotov V.A., Serikov V.V. Kompetentnostnaja model': ot idei k obrazovatel'noj programme // Pedagogika. 2003. № 10. S. 8-14.

7. Hutorskoj A. V., Hutorskaja L. N. Kompetentnost' kak didakticheskoe ponjatie: soderzhanie, struktura i modeli konstruirovanija// Proektirovanie i organizacija samostojatel'noj raboty studentov v kontekste kompetentnostnogo podhoda: Mezhvuzovskij sbornik nauchnyh trudov/ Pod red. A. A. Orlova. Tula. Izd-vo Tul. gos. ped. un-ta, 2008,Vyp. 1.S.117-137.

8. Sbornik normativnyh dokumentov. Matematika/Sost. Je.D. Dneprov, A.G. Arkad'ev, M.: Drofa, 2004. 79 s.

9. Gorbachev V.I. Predmetnye kompetencii obshheobrazovatel'nogokursa matematiki i ih klassifikacija//Integracija obshhego i professional'nogo matematicheskogo obrazovanija stran evropejskogo sotrudnichestva v kontekste Bolonskogo soglashenija. Brjansk, Izd-vo OOO «Ladomir»,2014. S. 96-105.

10. Zimnjaja I.A. Obshhaja kul'tura i social'no-professional'naja kompetentnost' cheloveka // Internet-zhurnal "Jejdos". 2006. 4 maja. http://www.eidos.ru/journal/2006/0504.htm. - V nadzag: Centr distancionnogo obrazovanija "Jejdos", e-mail: list@eidos.ru.

11. Gorbachev V.I. Metodologija kompetentnostnogo podhoda v uchebnoj matematicheskoj dejatel'nosti obshhego obrazovanija// Nauchnye osnovy integracii nacional'nyh obrazovatel'nyh standartov obshhego i vysshego matematicheskogo obrazovanija (Rossija-Belarus'-Ukraina): Mezhdunarodnaja kollektivnaja monografija / Antonenkova Ju.A. i dr. ;pod obshh. red. I. E. Malovoj. Brjansk: Izd-vo IP Ogneva, 2014. S. 32-50.

12. Gorbachev V.I., Gorbacheva E.V., Malova I.E. Zakonomernosti stanovlenija logiko-ponjatijnoj kompetencii // Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta imeni akademika I. G. Petrovskogo: Pedagogika/ psihologija/ istorija/ pravo/ literaturovedenie/ jazykoznanie/ tochnye i estestvennye nauki. Brjansk: RIO BGU.2015. №2. S.33-45.

About authors

Shalov I.Y. – Master of Education, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky.

Gorbachev V.I. – Doctor of Education, professor, Director of Institute of Natural Sciences, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky. e- mail: enibgu@mail.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 372.853

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЛЬТМЕТРА НА РЕЖИМ РАБОТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

С.В. Симукова
Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского

В статье рассматривается эксперимент с использованием самодельного прибора для обоснования необходимости учета внутреннего сопротивления при выборе электроизмерительного прибора.
***Ключевые слова**: делитель напряжения, вольтметра, внутреннее сопротивление вольтметра.*

Федеральным государственным стандартом высшего образования по направлению подготовки «Педагогическое образование» предусматривается формирование у студентов умения реализовывать образовательные программы по учебным предметам. Поэтому при подготовке будущего учителя физики необходимо учесть требования стандарта полного (среднего) общего образования по физике.

Одними из важнейших умений, формируемых у школьников при изучении раздела «Электродинамика», являются умения составлять электрические схемы, анализировать режим работы цепей, осознанно выбирать электроизмерительные приборы. В связи с этим возникает необходимость обсуждения с учащимися влияния электроизмерительных приборов на режим работы электрических цепей.

При изучении электроизмерительных приборов с учащимися анализируется, что сопротивление амперметра должно быть мало, а сопротивление вольтметра велико, чтобы при подключении этих приборов режим работы электрической цепи не изменялся [2]. Реальные же приборы обладают конечным сопротивлением, поэтому включение их в электрическую цепь для измерений изменяет общее сопротивление этой цепи. Соответственно нарушается режим работы цепи, и показания приборов могут значительно отличаться от рассчитанных теоретически для идеального случая.

Мы предлагаем изготовить самодельный прибор, с помощью которого можно обосновать необходимость учета внутреннего сопротивления вольтметра при измерении напряжения на участках цепи [1]. Для этого используют делители напряжения.

Рассмотрим три делителя напряжения на резисторах с одинаковыми коэффициентами передачи. Принципиальная схема устройства изображена на рисунке 1.

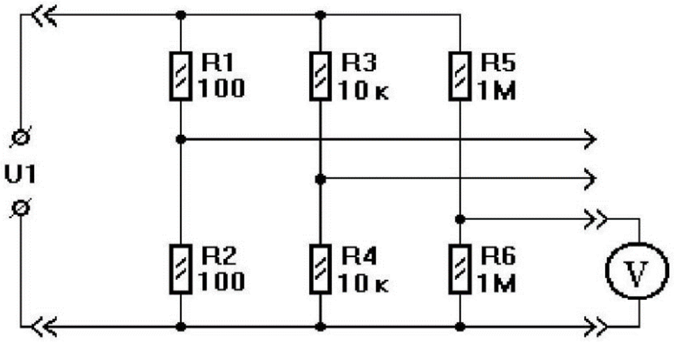


Рис.1

В плечах делителей – подобранные попарно одинаковые резисторы. В этом случае напряжение на выходе всех делителей должно быть равно половине входного напряжения в случае использования идеального вольтметра с бесконечным внутренним сопротивлением. С реальными вольтметрами дело обстоит иначе.

Будем измерять выходное напряжение указанных делителей напряжения следующими вольтметрами: приборов АВО-63, Щ4313, APPA-62, демонстрационным вольтметром (из набора L-микро), демонстрационным вольтметром (стрелочным), лабораторным вольтметром из школьного кабинета физики.

Делители удобно смонтировать на панели, вмонтировав в нее клеммы для подключения проводов (фото 2). Подадим на вход делителей постоянное напряжение 4 В, например, от источника электропитания ИЭПП-2.

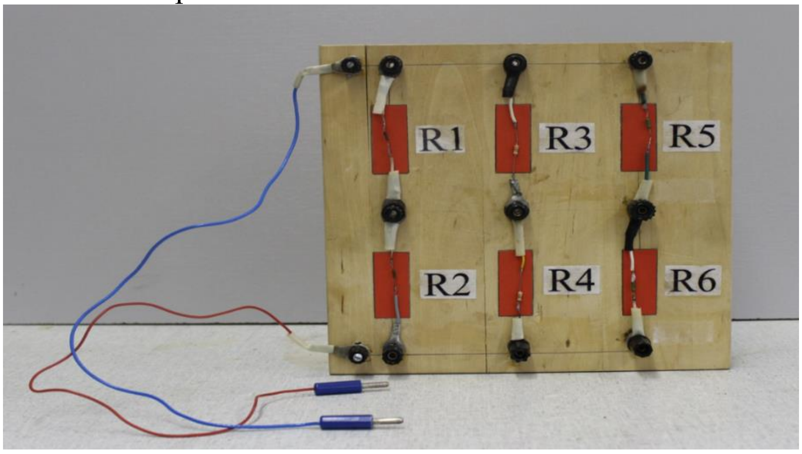


Рис. 2

Будем измерять напряжение на выходе каждого делителя различными вольтметрами. Результаты измерений занесем в таблицу. В ней мы указали также внутреннее сопротивление вольтметров. Для части из них мы взяли его из паспорта к прибору, для остальных (демонстрационные и лабораторный вольтметры) - измерили сами.

Входное напряжение 4В						
прибор	Мультиметр APPA-62	Щ–4313	АВО-63	Дем. вольтметр (цифровой из набора L - микро)	Дем. вольтметр (стрелочный)	Лабораторный вольтметр
Внутр. сопротивл.	$R_{внутр}$=10 МОм	$R_{внутр}$=1 МОм	$R_{внутр}$=1 МОм	$R_{внутр}$=100 кОм	$R_{внутр}$=700 Ом	$R_{внутр}$=5 кОм
Выходное напряжение R_2=100 Ом	2,03 В	1,96 В	1,8 В	2 В	2 В	2,4 В
Выходное напряжение R_4=10 кОм	2,04 В	1,8 В	1,7 В	1,9 В	0,4 В	1,2 В
Выходное напряжение R_6=1 МОм	1,94 В	1,4 В	0,2 В	0,3 В	0,2 В	0,2 В

Из экспериментов делаем следующие выводы:

- если внутреннее сопротивление вольтметра значительно больше сопротивления резистора, на котором измеряется напряжение, то общее сопротивление цепи практически не изменяется, режим работы ее не изменяется и показания вольтметра близки к теоретически рассчитанным для идеального случая;
- если внутреннее сопротивление вольтметра сравнимо с сопротивлением резистора, на котором измеряется напряжение, то измерительный прибор нарушает режим работы электрической цепи. Он значительно уменьшает сопротивление нижнего плеча делителя и соответственно уменьшается напряжение на этом плече;

• если же внутреннее сопротивление вольтметра меньше сопротивления резистора, к которому он подключен для измерений, то вольтметр шунтирует резистор и напряжение на нем уменьшается практически до нуля.

Такую демонстрацию мы предлагаем использовать на занятиях по микроэлектронике, посвященным изучению электроизмерительных приборов. Студентам предлагается рассчитать – какое напряжение будет показывать вольтметр, если известно входное напряжение, сопротивления в плечах делителя и его внутреннее сопротивление по формуле:

$$\mathrm{U}_{\text{вых}} = \frac{\mathrm{U}_{\text{вх}}}{\left(\mathrm{R}_1 + \dfrac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}\right)} \frac{\mathrm{R}_2 R_V}{R_2 + R_V}$$

Затем рассчитанное напряжение сравнивается с измеренным в эксперименте.

Данную демонстрацию можно использовать и на занятиях по методике обучения физике при изучении методики формирования у учащихся умений пользоваться измерительным средством.

Использование такого эксперимента позволяет сформировать у студентов осознанный подход к выбору вольтметра, учитывая соотношение его сопротивления и сопротивления того участка цепи, на котором измеряется напряжение.

Список литературы

1. Иноземцев В.А., Иноземцева С.В. Вводный практикум по электронике / Под ред. В.А. Иноземцева. Брянск: Издательство БГПУ, 2000. 78 с.
2. Мякишев Г.Я. Физика: Учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений / Г.Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев, Н.Н. Сотский. М.: Просвещение, 2016. 336 с.

Сведения об авторе

Симукова С.В. – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной и теоретической физики, Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, simukova-svetlana@yandex.ru

APPLYING OF VOLTAGE DIVIDERS TO STUDY THE INFLUENCE OF THE VOLTMETER INTERNAL RESISTANCE IN THE ELECTRIC CIRCUIT OPERATION MODE

S.V. Simukova
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

The article deals with an experiment using a homemade device to justify the need to consider the internal resistance when selecting electrical measuring instruments.
Key words: voltage divider, voltmeter, internal resistance.

References

1. Inozemtsev V.A., Inozemtseva S.V. Introductory tutorial in electronics/ under the editorship of V.A Inozemtsev . Bryansk: Izdat. Bryanskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universuteta, 2000. 78 p.
2. Myakishev G. Y. Physics: Students' Book (Grade 10) for comprehensive secondary schools/ G. Y.Myakishev, B.B. Boukhovtsev, N.N.Sotsky. M.: Prosvesheniye, 2016. 336 p

About author

Simukova S.V. – PhD in pedagogical science, assistant professor, Department of of Experimental and Theoretical Physics, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: simukova-svetlana@yandex.ru.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ БИОЛОГИЯ

УДК 574.4 (574.2)

ОБЗОР ФЛОРЫ И РАСТИТЕЛЬНОСТИ ПАМЯТНИКА ПРИРОДЫ «ДОБРУНЬСКИЕ СКЛОНЫ» (БРЯНСКАЯ ОБЛАСТЬ, БРЯНСКИЙ РАЙОН)

Е.В. Емельяшина, И.В. Стрижакова, М.А. Андреева, Л. Н. Анищенко
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Обобщены данные о 330 видах флоры сосудистых растений и 76 видах мохообразных. Рассмотрены особенности структуры фитоценозов ассоциации ***Lathyro nigri–Quercetum roboris*** Bulokhov et Solomeshch 2003, также различных типов производных дубовых лесов разной степени нарушенности. Описаны характеристики локальных популяций редких и заносных видов.
Ключевые слова: *флора, фитоценозы, памятник природы, антропогенная трансформация, Брянский район, Брянская область.*

Исследование фиторазнообразия региональных особо охраняемых природных территорий (ООПТ) имеют большое инвентаризационное значение и направлены на разработку биологически обоснованных решений охраны природных комплексов, организации рекреации и кадастрового обоснования границ ценных участков. Памятник природы «Добруньские склоны» площадью 10 га (год основания – 1992) расположен на возвышенном правобережье долины реки Десны у п. Добрунь (Брянский район). Окружающие его агроценозы существенно сокращают буферную зону, необходимую для смягчения антропогенного воздействия на растительный покров. Памятник природы имеет большое гидрологическое, противоэрозионное и научное значение, так как объединяет сохранившиеся широколиственные леса на коренных склонах деснянской долины. Кроме того, расположенное в пределах памятника природы урочище «Ляды» – излюбленное место отдыха людей, сбора грибов, а его окраины используются для для выпаса, поэтому растительный покров ООПТ испытывает значительное антропогенное воздействие.

В работе представлены предварительные сведения по разнообразию флоры и растительности «Добруньских склонов», собранные в ходе исследований 2013–2016 гг.

Материалы и методы исследований. Полевые исследования растительного покрова памятника природы «Добруньские склоны» проводились маршрутным методом. Геоботанические описания растительных сообществ выполнялись по общепринятой схеме; для характеристики количественного участия видов в сообществе использовалась шкала обилия-покрытия Ж. Браун-Бланке [16].

Возрастная структура ценопопуляций древесных растений описывалась на пробных площадях в 100 м^2. На пробных площадях в 1 м^2 определялось количество и состояние подроста дуба черешчатого. Описание возрастной структуры ценопопуляций проводилось с учётом общепринятых методик [3, 12–14]. При проведении анализа на пробной площади производился полный перечет особей деревьев и травянистых растений всех видов и возрастных состояний на основе периодизации онтогенеза по А. А. Уранову [13, 14]. Названия сосудистых растений приведены по С. К. Черепанову (1995) [15]. Номенклатура мхов отдела *Bryophyta* дана в соответствии со списком мохообразных Восточной Европы и Северной Азии [5]; отдела *Marchantiophyta* – со списком печеночников (*Marchantiophyta*) России [7].

Результаты и их обсуждение. На территории памятника природы представлены немногочисленные сохранившиеся участки старовозрастных дубрав в сочетании с обширными участками производных лиственных сообществ – липовых, кленово-липовых, кленовых. Производные фитоценозы в кустарниковом и травяном ярусах сохранили комплекс видов растений коренных широколиственных лесов [2]. Также небольшая часть урочищ занята пойменными гигро-мезофитными широколиственными лесами, прибрежно-водными сообществами в разветвлённом овраге, дно которого заболочено, луговыми сообществами.

На территории памятника природы зарегистрированы 330 видов сосудистых растений из 74 семейств. Наибольшим числом видов представлены семейства: *Asteraceae* (41), *Poaceae* (33), *Rosaceae* (26), *Fabaceae* (18), *Lamiaceae* и *Apiaceae* (15), *Caryophyllaceae* (14), *Scrophylariaceae* и *Ranunculaceae* (11), *Brassicaceae* (10). Видовой состав сосудистых растений, выявленных в ходе маршрутных исследований, представлен ниже.

Athyriaceae – Кочедыжниковые
Athyrium filix-femina (L.) Roth – Кочедыжник женский
Dryopteridaceae – Щитовниковые
Dryopteris carthusiana (VilL.) H. P. Fuchs – Щитовник Картузиуса
D. filix-mas (L.) Schott – Щитовник мужской
Gymnocarpium dryopteris (L.) Newm. – Голокучник обыкновенный
Thelypteridaceae – Телиптерисовые
Thelypteris palustris Schott – Телиптерис болотный
Hypolepidaceae – Орляковые
Pteridium aquilinum (L.) Kuhn – Орляк обыкновенный
Equisetaceae – Хвощовые
Equisetum arvense L. – Хвощ полевой, *E. fluviatile* L. – Хвощ речной, *E. pratense* Ehrh. – Хвощ луговой, *E. sylvaticum* L. – Хвощ лесной
Pinaceae – Сосновые
Pinus sylvestris L. – Сосна обыкновенная
Typhaceae – Рогозовые
Typha latifolia L. – Рогоз широколистный
Poaceae – Мятликовые
Agrostis canina L. – Полевица собачья, *A. gigantea* Roth – Полевица гигантская, *A. stolonifera* L. – Полевица побегоносная, *A. tenuis* Sibth. – Полевица тонкая, *Alopecurus geniculatus* L. – Лисохвост коленчатый, *Anthoxanthum odoratum* L. – Душистый колосок обыкновенный, *Brachypodium sylvaticum* (Huds.) Beauv. – Коротконожка лесная, *Briza media* L. – Трясунка средняя, *Bromopsis benekenii* (Lange) Holub – Кострец Бенекена, *B. inermis* (Leyss.) Holub – Кострец безостый, *Calamagrostis arundinacea* (L.) Roth – Вейник тростниковый или лесной, *C. canescens* (Web.) Roth – Вейник седеющий, *C. epigeios* (L.) Roth – Вейник наземный, *Dactylis glomerata* L. – Ежа сборная, *Deschampsia cespitosa* (L.) Beauv. – Луговик дернистый, *Elytrigia repens* (L.) Nevski – Пырей ползучий, *Festuca gigantea* (L.) VilL. – Овсяница гигантская, *F. ovina* L. – Овсяница овечья, *F. pratensis* Huds. – Овсяница луговая, *F. rubra* L. – Овсяница красная, *Glyceria fluitans* (L.) R. Br. – Манник плавающий, *K. delavignei* Czern. ex Domin – Тонконог Делявиня, *Melica nutans* L. – Перловник поникший, *Milium effusum* L. – Бор развесистый, *Phalaroides arundinacea* (L.) Rauschert – Двукисточник тростниковый, *Phleum pratense* L. – Тимофеевка луговая, *Phragmites australis* (Cav.) Trin. ex Steud. – Тростник обыкновенный, *P. annua* L. – Мятлик однолетний, *P. nemoralis* L. – Мятлик дубравный, *P. palustris* L. – Мятлик болотный, *P. pratensis* L. – Мятлик луговой, *P. trivialis* L. – Мятлик обыкновенный
Cyperaceae – Осоковые
Carex acuta L. – Осока острая, *C. cespitosa* L. – Осока дернистая, *C. lachenalii* Schkuhr – Осока заячья, *C. pilosa* Scop. – Осока волосистая, *Scirpus sylvaticus* L. – Камыш лесной
Araceae – Ароидные
Calla palustris L. – Белокрыльник болотный
Lemnaceae – Рясковые
Lemna minor L. – Ряска малая, *Spirodela polyrhiza* – Многокоренник обыкновенный
Juncaceae – Ситниковые
Juncus articulatus L. – Ситник членистый, *J. conglomeratus* L. – Ситник скученный, *Luzula multiflora* (Ehrh. Ex Retz.) Lej. – Ожика многоцветковая, *L. pallescens* Sw. – Ожика бледноватая
Hemerocallidaceae – Красодневовые
Hemerocallis fulva (L.) L. – Красоднев рыжий
Liliaceae – Лилейные
Allium angulosum L. – Лук угловатый, *Anthericum ramosum* L. – Венечник ветвистый, *Convallaria majalis* L. – Ландыш майский, *Gagea lutea* (L.) Ker-Gawl. – Гусиный лук жёлтый, *Lilium martagon* L. – Лилия саранка, *Maianthemum bifolium* (L.) F. W. Schmidt – Майник двулистный, *Paris quadrifolia* L. – Вороний глаз четырехлистный, *Polygonatum multiflorum* (L.) AlL. – Купена многоцветковая
Melanthiaceae – Мелантиевые
Veratrum lobelianum Bernh. – Чемерица Лобеля
Iridaceae – Касатиковые
Iris pseudacorus L. – Касатик аировидный
Orchidaceae – Орхидные
Dactylorhiza incarnata (L.) Soo – Пальчатокоренник мясо-красный
Platanthera bifolia (L.) Rich. – Любка двулистная
Salicaceae – Ивовые
Populus alba L. – Тополь белый, *P. tremula* L. – Осина, или тополь дрожащий, *S. caprea* L. – Ива козья, *S. cinerea* L. – Ива пепельная, *S. pentandra* L. – Ива пятитычинковая, *S. triandra* L. – Ива трёхтычинковая, *S. viminalis* L. – Ива корзиночная
Betulaceae – Березовые
Alnus glutinosa (L.) Gaertn. – Ольха клейкая, *Betula pendula* Roth – Береза бородавчатая, *B. pubescens* Ehrh. – Береза пушистая, *Corylus avellana* L. – Лещина обыкновенная
Fagaceae – Буковые
Quercus robur L. – Дуб черешчатый
Ulmaceae – Вязовые
Ulmus glabra Huds. – Вяз шершавый
Urticaceae – Крапивные

Urtica dioica L. – Крапива двудомная
Cannabaceae – Коноплевые
Humulus lupulus L. – Хмель вьющийся
Loranthaceae – Ремнецветные
Viscum album L. – Омела белая
Aristolochiaceae – Кирказоновые
Asiasarum europaeum L. – Азиазарум европейский
Polygonaceae – Гречишные
Polygonum aviculare L. – Горец птичий, *P. bistorta* L. – Горец змеиный, *P. convolvulus* L. – Горец вьюнковый, *R. acetosella* L. – Щавель малый, *R. confertus* Willd. – Щавель конский
Chenopodiaceae – Маревые
Atriplex patula L. – Лебеда раскидистая
Amaranthaceae – Амарантовые
Amaranthus retroflexus L. – Щирица запрокинутая
Caryophyllaceae – Гвоздичные
Cerastium holosteoides Fries – Ясколка дернистая, *Coccyganthe flos-cuculi* (L.) Fourr. – Горицвет кукушкин, *Dianthus barbatus* L. – Гвоздика бородатая, *D. deltoides* L. – Гвоздика травянка, *Melandrium album* (MilL.) Garcke – Дрёма белая, *Moehringia trinervia* (L.) Clairv. – Мерингия трехжилковая, *Myosoton aquaticum* (L.) Moench – Мягковолосник водный, *Saponaria officinalis* L. – Мыльнянка лекарственная, *Silene nutans* L. – Смолевка поникшая, *S. viscosa* (L.) Pers. – Смолёвка клейкая, *Spergula arvensis* L. – Торица полевая, *Stellaria graminea* L. – Звездчатка злаковая, *S. holostea* L. – Звездчатка жестколистная, *Steris viscaria* (L.) Rafin. – Смолка обыкновенная
Ranunculaceae – Лютиковые
Actaea spicata L. – Воронец колосистый, *Anemone sylvestris* L. – Ветреница лесная, *Anemonoides ranunculoides* (L.) Holub – Ветреничка лютиковая, *Caltha palustris* L. – Калужница болотная, *Ficaria verna* Huds. – Чистяк весенний, *Ranunculus acris* L. – Лютик едкий, *R. cassubicus* L. – Лютик кашубский, *R. polyanthemos* L. – лютик многоцветковый, *R. repens* L. – Лютик ползучий, *Thalictrum aquilegifolium* L. – Василистник водосборолистный, *T. lucidum* L. – Василистник светлый
Papaveraceae – Маковые
Chelidonium majus L. – Чистотел большой
Fumariaceae – Дымянковые
Corydalis bulbosa (L.) DC. – Хохлатка плотная
Brassicaceae – Крестоцветные
Alliaria petiolata (Bieb.) Cavara & Grande – Чесночница черешковая, *Arabidopsis thaliana* (L.) Heynh. Резуховидка Таля, *Berteroa incana* (L.) DC. – Икотник серый, *Bunias orientalis* L. – Свербига восточная, *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik. – Пастушья сумка обыкновенная, *Cardamine amara* L. – Сердечник горький, *Descurainia sophia* (L.) Webb ex Prantl – Декурайния Софии, *Hesperis pycnotricha* Borb.et Degen – Вечерница густоволосистая, *Lepidium ruderale* L. – Клоповник мусорный, *Rorippa palustris* (L.) Bess. – Жерушник болотный
Crassulaceae – Толстянковые
Sedum acre L. – Очиток едкий
Saxifragaceae – Камнеломковые
Chrysosplenium alternifolium L. – Селезеночник очереднолистный
Grossulariaceae – Крыжовниковые
Ribes nigrum L. – Смородина черная
Rosaceae – Розоцветные
Agrimonia eupatoria L. – Репешок обыкновенный, *A. pilosa* Ledeb. – Репешок волосистый, *Alchemilla vulgaris* L. – Манжетка обыкновенная, *Astragalus glycyphyllos* L. – Астрагал солодколистный, *Comarum palustre* L. – Сабельник болотный, *Filipendula ulmaria* (L.) Maxim. – Лабазник вязолистный, *F. vulgaris* Moench – Лабазник обыкновенный, *Fragaria vesca* L. – Земляника обыкновенная, *Geum rivale* L. – Гравилат речной, *G. urbanum* L. – Гравилат городской, *Malus sylvestris* MilL. – Яблоня лесная, *Melilotus albus* Medik. – донник белый, *M. officinalis* (L.) Pall. – Донник лекарственный, *Padus avium* MilL. – Черемуха птичья, *Potentilla alba* L. – Лапчатка белая, *P. anserina* L. – Лапчатка гусиная, *P. argentea* L. – Лапчатка серебристая, *P. erecta* (L.) Raeusch. – Лапчатка прямостоячая, *P. heptaphylla* L. – Лапчатка семилисточковая, *P. intermedia* L. – Лапчатка средняя, *Pyrus communis* L. – Груша обыкновенная, *Rosa majalis* Herrm. – Шиповник майский, *Rubus idaeus* L. – Малина обыкновенная, *R. nessensis* W. Hall – Куманика, *R. saxatilis* L. – Костяника, *Sorbus aucuparia* L. – Рябина обыкновенная
Fabaceae – Бобовые
Amoria hybrida (L.) C. Presl – Амория гибридная, *A. montana* (L.) Sojak – Амория горная, *A. repens* (L.) C. Presl – Амория ползучая, *Chamaecytisus ruthenicus* (Fisch. ex Woloszcz.) Klaskova – Ракитник русский, *Genista tinctoria* L. – Дрок красильный, *Chrysaspis aurea* (Poll.) Greene – Златощитник золотистый, *Lathyrus niger* (L.) Bernh. – Чина черная, *L. pisiformis* L. – Чина гороховидная, *L. pratensis* L. – Чина луговая, *L. sylvestris* L. – Чина лесная, *L. vernus* (L.) Bernh. – Чина весенняя, *Lotus corniculatus* L. – Лядвенец рогатый, *Lupinus polyphyllus* Lindl. – Люпин многолистный, *Trifolium alpestre* L. – Клевер альпийский, *T. arvense* L. – Клевер пашенный, *T. pratense* L. – Клевер луговой, *Vicia cracca* L. – Горошек мышиный, *V. sepium* L. – Горошек заборный, *V. sylvatica* L. – Горошек лесной
Geraniaceae – Гераниевые
Geranium pratense L. – Герань луговая, *G. robertianum* L. – Герань Роберта, *G. sylvaticum* L. – Герань лесная
Polygalaceae – Истодовые
Polygala comosa Schkuhr – Истод хохлатый
Euphorbiaceae – Молочайные
Mercurialis perennis L. – Пролесник многолетний
Celastraceae – Бересклетовые
Euonymus verrucosa Scop. – Бересклет бородавчатый
Aceraceae – Кленовые
Acer negundo L. – Клён ясенелистный, *A. platanoides* L. – Клён остролистный
Balsaminaceae – Бальзаминовые
Impatiens noli-tangere L. – Недотрога обыкновенная, *I. parviflora* DC. – Недотрога мелкоцветковая
Rhamnaceae – Крушиновые
Frangula alnus MilL. – Крушина ломкая
Vitaceae – Виноградовые
Vitis labrusca L. – Виноград лабруска
Tiliaceae – Липовые

Tilia cordata MilL. – Липа серцелистная
Malvaceae – Мальвовые
Lavatera thuringiaca L. – Хатьма тюрингенская
Hypericaceae – Зверобоевые
Hypericum montanum L. – Зверобой горный, *H. perforatum* L. – Зверобой продырявленный
Violaceae – Фиалковые
Viola canina L. – Фиалка собачья, *V. hirta* L. – Фиалка опушённая, *V. mirabilis* L. – Фиалка удивительная, *V. riviniana* Reichenb. – Фиалка Ривиниуса, *V. tricolor* L. – Фиалка трёхцветная
Lythraceae – Дербенниковые
Lythrum salicaria L. – Дербенник иволистный
Onagraceae – Кипрейные, или Ослинниковые
Chamaenerion angustifolium (L.) Scop. – Иван-чай узколистный, *Epilobium adenocaulon* Hausskn – Кипрей железистостебельный, *E. hirsutum* L. – Кипрей волосистый, *E. roseum* Schreb. – Кипрей розовый, *Oenothera biennis* L. – Ослинник двулетний
Apiaceae – Зонтичные
Aegopodium podagraria L. – Сныть обыкновенная, *Aethusa cynapium* L. – Кокорыш обыкновенный, *Angelica sylvestris* L. – Дудник лесной, *Anthriscus sylvestris* (L.) Hoffm. – Купырь лесной, *Carum carvi* L. – Тмин обыкновенный, *Chaerophyllum aromaticum* L. – Бутень ароматный, *Ch. prescottii* DC. – Бутень Прескотта, *Cicuta virosa* L. – Вех ядовитый, *Daucus carota* L. – Морковь дикая, *Heracleum sibiricum* L. – Борщевик сибирский, *Laserpitium latifolium* L. – Гладыш широколистный, *Levisticum officinalis* Koch – Любисток лекарственный, *Pimpinella saxifraga* L. – Бедренец камнеломка, *Sanicula europaea* L. – Подлесник европейский, *Sium latifolium* L. – Поручейник широколистный
Cornaceae – Кизиловые
Cornus sanguinea L. – Свидина кроваво-красная
Ericaceae – Вересковые
Vaccinium myrtillus L. – Черника
Primulaceae – Первоцветные
Lysimachia nummularia L. – Вербейник монетчатый, *L. vulgaris* L. – Вербейник обыкновенный, *Naumburgia thyrsiflora* (L.) Reichenb. – Кизляк кистецветный, *Primula veris* L. – Первоцвет весенний, *Trientalis europaea* L. – Седмичник европейский
Oleaceae – Маслинные
Fraxinus excelsior L. – Ясень обыкновенный, *F. pennsylvanica* March. – Ясень пенсильванский
Asclepiadaceae – Ластовневые, или Ваточниковые
Vincetoxicum hirundinaria Medik. – Ластовень ласточкин
Convolvulaceae – Вьюнковые
Calystegia sepium (L.) R. Br. – Повой заборный, *Convolvulus arvensis* L. – Вьюнок полевой
Polemoniaceae – Синюховые
Polemonium caeruleum L. – Синюха голубая
Boraginaceae – Бурачниковые
Echium vulgare L. – Синяк обыкновенный, *Lithospermum arvense* L. – Воробейник полевой, *Myosotis palustris* (L.) L. – Незабудка болотная, *Pulmonaria obscura* Dumort. – Медуница неясная
Lamiaceae – Яснотковые
Acinos arvensis (Lam.) Dandy – Щебрушка полевая, *Ajuga genevensis* L. – Живучка женевская, *A. reptans* L. – Живучка ползучая, *Ballota nigra* L. – Белокудренник чёрный, *Betonica officinalis* (L.) Trevis. – Буквица лекарственная, *Clinopodium vulgare* L. – Пахучка обыкновенная, *Galeobdolon luteum* Huds. – Зеленчук жёлтый, *Galeopsis bifida* Boenn. – Пикульник двунадрезанный, *Glechoma hederacea* L. – Будра плющевидная, *Lamium album* L. – Яснотка белая, *L. purpureum* L. – Яснотка пурпурная, *Leonurus villosus* Desf.ex D'Urv. – Пустырник пятилопастной, *Lycopus europaeus* L. – Зюзник европейский, *Mentha arvensis* L. – Мята полевая, *Origanum vulgare* L. – Душица обыкновенная, *Prunella vulgaris* L. – Черноголовка обыкновенная, *Salvia verticillata* L. – Шалфей мутовчатый, *Scutellaria galericulata* L. – Шлемник обыкновенный, *Stachys sylvatica* L. – Чистец лесной
Solanaceae – Паслёновые
Solanum dulcamara L. – Паслён сладко-горький
Scrophylariaceae – Норичниковые
Digitalis grandiflora MilL. – Наперстянка крупноцветковая, *Lathraea squamaria* L. – Петров крест чешуйчатый, *Linaria vulgaris* L. – Льнянка обыкновенная, *Melampyrum nemorosum* L. – Марьянник дубравный, *Scrophularia nodosa* L. – Норичник шишковатый, *Verbascum lychnitis* L. – Коровяк метельчатый, *V. thapsus* L. – Коровяк обыкновенный, *Veronica chamaedrys* L. – Вероника дубравная, *V. officinalis* L. – Вероника лекарственная, *V. serpyllifolia* L. – Вероника тимьянолистная, *V. spicata* L. – Вероника колосистая
Orobanchaceae – Заразиховые
Orobanche alba L. – Заразиха белая
Plantaginaceae – Подорожниковые
Plantago lanceolata L. – Подорожник ланцетный, *P. major* L. – Подорожник большой, *P. media* L. – Подорожник средний
Rubiaceae – Мареновые
Galium aparine L. – Подмаренник цепкий, *G. boreale* – Подмаренник северный, *G. mollugo* l. – Подмаренник мягкий, *G. odoratum* (L.) Scop. – Подмаренник душистый
Caprifoliaceae – Жимолостные
Lonicera xylosteum L. – Жимолость лесная, *Sambucus racemosa* L. – Бузина кистевидная, *Viburnum opulus* L. – Калина обыкновенная
Valeriaceae – Валериановые
Valeriana officinalis L. – Валериана лекарственная
Adoxaceae – Адоксовые
Adoxa moschatellina L. – Адокса мускусная
Dipsacaceae – Ворсянковые
Knautia arvensis (L.) Coult. – Короставник полевой
Cucurbitaceae – Тыквенные
Echinocystis lobata (Michx.) Torr. Et Gray– Колючеплодник лопастной
Campanulaceae – Колокольчиковые
Campanula glomerata L. – Колокольчик скученный, *C. latifolia* L. – Колокольчик широколистный, *C. patula* L. – Колокольчик раскидистый, *C. rapunculoides* L. – Колокольчик рапунцелевидный, *C. trachelium* L. – Колокольчик крапиволистный, *Jasione montana* L. – Букашник горный

Asteraceae – Сложноцветные

Achillea millefolium L. – Тысячелистник обыкновенный, *Arctium lappa* L. – Лопух большой, *A. minus* (Hill) Bernh. – Лопух малый, *A. nemorosum* Lej. – Лопух лесной, *Artemisia campestris* L. – Полынь равнинная, *A. vulgaris* L. – Полынь обыкновенная, *Aster salignus* Willd. – Астра иволистная, *Bidens cernua* L. – Череда поникшая, *Centaurea jacea* L. – Василёк луговой, *Cirsium arvense* (L.) Scop. – Бодяк полевой, *C. heterophyllum* (L.) Hill. – Бодяк разнолистный, *C. oleraceum* (L.) Scop. – Бодяк огородный, *C. vulgare* (Savi) Ten. – Бодяк обыкновенный, *Cicorium intybus* L. – Цикорий обыкновенный, *Conyza canadensis* (L.) Cronq. – Мелколепестник канадский, *Crepis paludosa* (L.) Moench – Скерда болотная, *C. tectorum* L. – Скерда кровельная, *Erigeron acris* L. – Мелколепестник едкий, *Eupatorium cannabinum* L. – Посконник коноплевый, *Gnaphalium sylvaticum* L. – Сушеница лесная, G. *uliginosa* (L.) Opiz – Сушеница топяная, *Helianthus tuberosus* L. – Подсолнечник клубненосный, *Hieracium umbellatum* L. – Ястребинка зонтичная, *Inula salicina* L. – Девясил иволистный, *Lactuca serriola* L. – Латук компасный, *Lapsana communis* L. – Бородавник обыкновенный, *Leucanthemum vulgare* Lam. – Нивяник обыкновенный, *Mycelis muralis* (L.) Dumort. – Мицелис стенной, *Phalacroloma annuum* (L.) Dumort. – Мелколепестник однолетний, *Pyrethrum corymbosum* (L.) Scop. – Пиретрум щитковый, *Rudbeckia laciniata* L. – Рудбекия рассечённая, *Serratula tinctoria* L. – Серпуха красильная, *Senecio fluviatilis* Wallr. – Крестовник приречный, *Solidago canadensis* L. – Золотарник канадский, *S. virgaurea* L. – Золотарник обыкновенный, *Sonchus arvensis* L. – Осот полевой, *Tanacetum vulgare* L. – Пижма обыкновенная, *Taraxacum officinale* Wigg. – Одуванчик лекарственный, *Tragopogon orientalis* L. – Козлобородник восточный, *Trommsdorfia maculata* (L.) Bernh. – Тромсдорфия пятнистая, *Tussilago farfara* L. – Мать-и-мачеха обыкновенная.

Мохообразные представлены 76 видами и 1 разновидностью из 30 семейств. Среди них по числу видов преобладают семейства: *Hylocomiaceae* (15), *Mniaceae* (7), *Dicranaceae* (6). Ведущая роль в напочвенном покрове принадлежит *Brachythecium albicans, Abietinella abietina*, по почвенным обнажениям на крутых склонах – *Atrichum undulatum*, на дне балки в черноольшанике – *Climacium dendroides, Plagiomnium undulatum, Calliergonella cuspidata, Marchantia polymorpha.* Среди эпифитов выявлены мхи-биоиндикаторы старовозрастных лесов: *Homalia trichomanoides*, *Anomodon longifolius*, *Hypnum cupressiforme.* Видовой состав мохообразных памятника природы представлен ниже.

Отдел *Marchantiophyta* – Печёночники

Класс *Jungermanniopsida* – Юнгерманниевые

Metzgeriaceae – Метцгериевые

Metzgeria furcata (L.) Dumort. – Метцгерия вильчатая

Aneuraceae – Аневровые

Aneura pinguis (L.) Dumort. – Аневра тучная

Radulaceae –Радуловые

Radula complanata (L.) Dumort. – Радула сплюснутая

Ptilidiaceae – Птилидиевые

Ptilidium pulcherrimum (Weber) Vain. – Птилидиум красивейший

Класс *Marchantiopsida* – Маршанциевые

Marchantiaceae – Маршанциевые

Marchantia polymorpha L. – Маршанция полиморфная

Conocephalaceae – Коноцефаловые

Conocephalum conicum (L.) Dumort. – Коноцефалум конический

Отдел *Bryophyta* – Бриевые мхи

Sphagnaceae – Сфагновые

Sphagnum squarrosum Crome – Сфагнум оттопыренный

Sphagnum girgensohnii Russ. – Сфагнум Гиргензона

Класс *Polytrichopsida* – Политриховые

Polytrichaceae – Политриховые

Atrichum undulatum (Hedw.) P. Beauv. – Атрихум волнистый, *Polytrichum commune* Hedw. – Политрихум обыкновенный

Класс *Tetraphidopsida* – Тетрафисовые

Tetraphidaceae – Тетрафисовые

Tetraphis pellucida Hedw. – Тетрафис прозрачный

Класс *Bryopsida* – Бриевые

Funariaceae – Фунариевые

Funaria hygrometrica Hedw. – Фунария гигрометрическая

Dicranaceae – Дикрановые

Dicranum montanum Hedw. – Дикранум горный, *Dicranum polysetum* Sw. – Дикранум многоножковый, *Dicranum scoparium* Hedw. – Дикранум метловидный, *Dicranella heteromalla* (Hedw.) Schimp. – Дикранелла разнонаправленная, *Dicranella rufescens* (Dicks.) Schimp. – Дикранелла рыжеватая, *Dicranella subulata* (Hedw.) Schimp. – Дикранелла шиловидная

Ditrichaceae – Дитриховые

Ceratodon purpureus (Hedw.) Brid. – Цератодон пурпурный

Pottiaceae – Поттиевые
Syntrichia ruralis (Hedw.) F.Weber et D.Mohr – Синтрихия полевая, *Tortula muralis* Hedw. – Тортула стенная
Meesiaceae – Меезиевые
Leptobryum pyriforme (Hedw.) Wils. – Лептобриум грушевидный
Orthotrichaceae – Ортотриховые
Orthotrichum obtusifolium Brid. – Ортотрихум туполистный, *Orthotrichum speciosum* Nees – Ортотрихум прекрасный
Bryaceae – Бриевые
Bryum argenteum Hedw. – Бриум серебристый, *Bryum caespiticium* Hedw. – Бриум дернистый, *Bryum capillare* Hedw. – Бриум волосконосный, *Rhodobryum roseum* (Hedw.) Limpr. – Родобриум розетковидный
Mniaceae – Мниевые
Mnium stellare Hedw. – Мниум звездчатый, *Plagiomnium cuspidatum* (Hedw.) T.J. Kop. – Плагиомниум остроконечный, *Plagiomnium ellipticum* (Brid.) T.J. Kop. – Плагиомниум эллиптический, *Plagiomnium undulatum* (Hedw.) T.J. Kop. – Плагиомниум волнистый, *Pohlia nutans* (Hedw.) Lindb. – Полия поникшая, *Pseudobryum cinclidioides* (Hueb.) T. Kop. – Псевдобриум цинклидиевидный, *Rhizomnium punctatum* (Hedw.) T. Kop. – Ризомниум точечный
Plagiotheciaceae – Плагиотециевые
Plagiothecium laetum Bruch et al. – Плагиотециум светло-зеленый
Hypnaceae – Гипновые
Hypnum cupressiforme Hedw. Гипнум кипарисовидный
Pylaisiadelphaceae – Пилайзиадельфовые
Platygyrium repens (Brid.) Bruch et al. – Платигириум ползучий
Anomodontaceae – Аномодоновые
Anomodon longifolius (Brid.) Hartm. – Аномодон длиннолистный
Neckeraceae – Неккеровые
Homalia trichomanoides (Hedw.) Bruch. et al. – Гомалия трихомановидная
Climaciaceae – Климациевые
Climacium dendroides (Hedw.) F.Web.et D.Mohr. – Климациум древовидный
Hylocomiaceae
Hylocomium splendens (Hedw.) Bruch et al. – Гилокомиум блестящий, *Pleurozium schreberi* (Brid.) Mitt. – Плеурозиум Шребера, *Brachytheciastrum velutinum* (Hedw.) Ignatov et Huttunen – Брахитециаструм бархатный, *Brachythecium albicans* (Hedw.) Bruch et al. – Брахитециум беловатый, *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al. – Брахитециум полевой, *Brachythecium mildeanum* (Schimp.) Schimp. – Брахитециум Мильде, *Brachythecium rivulare* Bruch et al. – Брахитециум ручейный, *Brachythecium rutabulum* (Hedw.) Bruch et al. – Брахитециум кочерга, *Brachythecium salebrosum* (F. Web. et D. Mohr) Bruch et al. – Брахитециум крючковатый, *Cirriphyllum piliferum* (Hedw.) Grout – Циррифиллум волосконосный, *Oxyrrhynchium hians* (Hedw.) Loeske – Оксиринхиум зияющий, *Sciuro-hypnum oedipodium* (Mitt.) Ignatov et Huttunen – Сциурогипнум вздутоножковый, *Sciurohypnum populeum* (Hedw.) Ignatov et Huttunen – Сциурогипнум тополевый, *Sciuro-hypnum reflexum* (Starke) Ignatov et Huttunen – Сциурогипнум отогнутый, *Sciuro-hypnum starkei* (Brid.) Ignatov et Huttunen – Сциурогипнум Штарке
Scorpidiaceae – Скорпидиевые
Sanionia uncinata (Hedw.) Loeske – Саниония крючковатая
Pylaisiaceae – Пилезиевые
Callicladium haldanianum (Grev.) H.A. Crum – Калликладиум Холдейна, *Calliergonella cuspidata* (Hedw.) Loeske – Каллиергонелла заостренная, *Pylaisia polyantha* (Hedw.) Bruch et al. – Пилезия многоцветковая, *Stereodon pallescens* (Hedw.) Mitt. – Стереодон бледноватый
Pseudoleskeellaceae – Псевдолескеелловые
Pseudoleskeella nervosa (Brid.) Nyh. – Псевдодескеелла жилковатая
Leskeaceae – Лескеевые
Leskea polycarpa Hedw. – Лескея многоплодная
Thuidiaceae – Туидиевые
Abietinella abietina (Hedw.) M. Fleisch. – Абиетинелла елеобразная
Amblystegiaceae– Амблистегиевые
Amblystegium serpens (Hedw.) Bruch et al. – Амблистегиум ползучий, *Amblystegium serpens* var *juratzkanum* Schimp. Rau et Herv. – Амблистегиум Юрацка, *Leptodictyum riparium* (Hedw.) Warnst. – Лептодикциум береговой, *Serpoleskea subtilis* (Hedw.) Loeske – Серполескея тонкая.

Особую ценность в ООПТ «Добруньские склоны» представляют сообщества ассоциации ***Lathyro nigri–Quercetum roboris*** Bulokhov et Solomeshch 2003 (класс ***Carpino-Fagetea*** Jakucs ex Passarge 1968, порядок ***Quercetalia pubescenti-petraeae*** Klika 1933, союз ***Quercion petraeae*** Issler 1931). Эта ассоциация представляет ксеро-мезофитные широколиственные леса, которые в Брянской области распространены у северо-восточной границы ареала, имеют большое природоохранное значение для сохранения редких видов растений и внесены в Зелёную книгу Брянской области как редкие сообщества [4].

Сообщества имеют выраженную ярусную структуру. Первый подъярус древостоя образует *Quercus robur* высотой от 16 до 21 м; сомкнутость яруса – 50–55%; второй подъярус – *Tilia cordata, Acer platanoides* с примесью *Populus tremula*. Подлесок формируют *Corylus avellana, Euonymus verrucosa, Frangula alnus*, *Sorbus aucuparia,* подрост *Ulmus glabra* с участием *Viburnum opulus, Cornus sanguinea*; сомкнутость яруса – 30%. Травяной ярус местами разреженный, местами достигает проективного покрытия 45–50%. Моховой ярус не выражен, в нём представлены в основном виды родов *Atrichum* и *Brachythecium*.

В качестве примера ниже приведен характерный флористический состав травяного яруса модельного сообщества описываемой ассоциации. Он представлен следующими видами: *Agrimonia eupatoria* (+), *Ajuga reptans* (r), *Amoria repens* (+), *Angelica sylvestris* (1), *Anthericum ramosum* (1), *Asasarum europaeum* (2), *Calamagrostis arundinacea* (r), *Campanula trachelium* (r), *Campanula persicifolia* (1), *Carex cespitosa* (2), *Chrysaspis aurea* (r), *Clinopodium vulgare* (r), *Convallaria majalis* (2), *Digitalis grandiflora* (+), *Dryopteris filix-mas* (+), *Inula salicina* (r), *Fragaria vesca* (1), *Galium boreale* (r), *G. mollugo* (+), *Geranium sylvaticum* (1), *Geum urbanum* (r), *Hieracium umbellatum* (r), *Lathyrus vernus* (+), *Lathyrus niger* (1), *Laserpitium latifolium* (2), *Lilium martagon* (r), *Maianthemum bifolium* (1), *Melica nutans* (+), *Origanum vulgare* (1), *Platanthera bifolia* (r), *Primula veris* (1), *Poa nemoralis* (+), *Pteridium aquilinum* (r), *Pulmonaria obscura* (3), *Pyrethrum corymbosum* (+), *Rubus saxatilis* (r), *Stachys sylvatica* (+), *Steris viscaria* (r), *Taraxacum officinale* (r), *Trommsdorfia maculata* (+), *Veronica chamaedrys* (1), *Vincetoxicum hirundinaria* (+), *Viola mirabilis* (r), *Viola riviniana* (+).

В изучаемых сообществах возрастной спектр ценопопуляции дуба черешчатого «разорванный» и неполночленный: 50% растений дуба – ювенильные, 30% – имматурные, 3% – виргинильные, 17% – генеративные. Возобновление дуба немногочисленно: в подросте отмечено 0,8 тыс. экз./га; самовозобновление слабо обеспечено.

Возрастные спектры ценопопуляций липы и клёна характеризуются неполночленностью: представлены все возрастные состояния, кроме сенильного (нормальный тип популяции). Максимальное число особей – имматурные и молодые генеративные, что характеризует самоподдержание ценопопуляций как устойчивое. Возобновление липы – 2,3 тыс. экз./га; клёна – 2,1 тыс. экз./га.

Описываемой ассоциации дубовых лесов соответствует доминантная ассоциация *Липо-дубняк разнотравный*. Производные леса относятся к следующим ассоциациям.

1. *Липо-дубняк волосистоосоковый.* Общая сомкнутость крон – 70%. Общее проективное покрытие травяного яруса – 50%.

Возрастной спектр дуба черешчатого в этом сообществе неполночленный и «разорванный» с пиками в имматурной (20%) и старой генеративной (75%) частях спектра. Виргинильных и генеративных молодых особей мало – не более 5%. Возобновление дуба неудовлетворительное: отмечено 0,35 тыс. экз./га, со слабой устойчивостью. Возрастной спектр липы и клёна характеризует ценопопуляцию как инвазионную, с возобновлением 0,20–0,27 тыс. экз/га.

2. *Дубняк звездчатково-волосистоосоковый.* Общая сомкнутость крон – 55%, подлеска – 30%, травяного яруса – до 60%. Ценопопуляция дуба черешчатого нормального типа, однако особей ювенильного типа зарегистрировано мало; состояние устойчивое.

Ценопопуляция липы также нормального типа; 45% всех особей представлены имматурными растениями. Состояние устойчивое. Ценопопуляция клёна инвазионного типа с преобладанием имматурных (70 %) и виргинильных (25 %) особей. Состояние неустойчивое.

На склонах балок в виде немногочисленных мозаично расположенных частей (площадь каждой – не более 150–200 м^2) встречаются сообщества ассоциаций: *липо-дубняк волосистоосоковый, липо-дубняк снытевый, липо-дубняк пролесниково-снытевый.* Древостои на склонах оврага преимущественно липово-дубовые; возраст дуба – от 80 до 120 лет, преобладают 70–80-летние деревья.

Спуск к коренному склону долины Десны с относительно «плоским» дном балки заболочен. Здесь формируются сообщества пойменных или приручьевых гигрофитных лесов флористической ассоциации ***Urtico dioicae–Alnetum glutinosae*** Bulokhov et Solomeshch 2003. Ей соответствует доминантная ассоциация *черноольшаник камышовый*. Древостой в таких лесах состоит из ольхи чёрной, местами с примесью осины. В подлеске – смородина чёрная, крушина ломкая, калина обыкновенная, ива пепельная. Травостой местами густой (покрытие до 95–100 %) из высокорослого разнотравья.

На территории памятника природы расположены местонахождения редких и занесённых в Красную книгу Брянской области видов растений [10, 11]. Нами проведён мониторинг состояния их ценопопуляций, результаты которого представлены ниже.

Ценопопуляции Pyretrum corymbosum имеют мозаичное распространение в средней части склона балки. Плотность ценопопуляций – 1,7 особей/м^2.

Ценопопуляции Anthericum ramosum отмечены в сообществах дубрав с преобладанием чины чёрной в травостое; плотность – 9,3 особей/м^2. В верхней части склона на остепнённом участке венечник ветвистый занимает площадь в 25 м^2 с проективным покрытием 75–80%.

Ценопопуляции Laserpitium latifolium иногда достигают плотности 8 особей/м^2 с преобладанием виргинильных и молодых генеративных особей.

Популяции Digitalis grandiflora спорадически распространены в местообитаниях на вершине и в средней части балки в молодой дубраве (возраст примерно 50 лет) совместно с лапчаткой белой, венечником ветвистым, душицей обыкновенной. Плотность ценопопуляции Digitalis grandiflora – 2,3 особи/м^2.

Растения Lilium martagon найдены в двух местообитаниях и представлены в каждом 3 растениями: двумя с вегетативными побегами, одним – с генеративными.

По одному генеративному и 6–9 виргинильных растений на вершине балки представлены в ценопопуляциях Sanicula europaea и Anemone sylvestris. О местонахождении Hypericum montanum как редкого в области вида указывалось ранее [11].

Среди сосудистых растений обнаружены виды, которые культивировали как декоративные и пищевые в ближайших населённых пунктах. В настоящее время они одичали и распространились, иногда формируя монодоминантные сообщества. Так, *Hemerocallis fulva* зарегистрирован в двух местонахождениях, где вид занимает площади 3,8 и 5,5 м^2. В черноольшанике найдено несколько растений *Echynocystis lobata*, который, вероятно, продолжит своё расселение. На вершине балки, в месте отдыха населения на площади в 120 м^2 обнаружены немногочисленные растения *Dianthus barbatus, Saponaria officinalis, Helianthus tuberosus* и *Lupinus polyphyllus*, а также заросли *Aster salignus* на площади в 15 м^2 совместно с несколькими высокорослыми растениями *Levisticum officinalis*. В восточной части памятника природы в молодой осветлённой дубраве зарегистрированы 2 растения *Vitis labrusca* длиной в 35 и 40 см – появление особей вида в 2015 г., возможно, стало возможным благодаря зоохории.

В средней части балки найдены *Solidago canadensis* и *Rudbeckia laciniata*, занимающие площади по 4,5 и 6 м^2. Незначительная территория, на которой распространены особи *Rudbeckia laciniata*, говорит о начальных этапах внедрения этого вида в сообщества памятника природы Однако *Solidago canadensis* широко распространился по его границам в луговых и прибрежно-водных местообитаниях: общая площадь сообществ с участием золотарника канадского составляет более 150 м^2.

На двух генеративных особях берёзы повислой обнаружены 4 растения *Viscum album* – вида, который в настоящее время интенсивно распространяется в садах, парке п. Добрунь и может считаться инвазивным видом. О регистрации омелы белой в п. Добрунь ранее упоминал Э. М. Величкин ещё в 2005 г. [1].

Заключение. Проведенные исследования фиторазнообразия памятника природы «Добруньские склоны» выявили, что его растительный покров испытывает значительную антропогенную нагрузку. Небольшая площадь лесных массивов, яркая выраженность балочной сети и их антропогенно-производная неоднородность свидетельствуют о высокой степени трансформации растительности изученного природного комплекса. Во всех обследованных урочищах памятника природы зарегистрированы неполночленные популяции дуба черешчатого. Основная проблема памятника природы «Добруньские склоны» – островной характер этой ООПТ. Для уменьшения островного эффекта необходимо создание буферной зоны, прилегающей к границам ООПТ.

Для данного памятника природы, ценного в ботаническом и природоохранном плане, сотрудниками Лицея Брянского района и Брянского госуниверситета разработан проект экологической тропы, целью которого является ознакомление населения с природными объектами, имеющими высокую природоохранную и эстетическую ценность. Знакомство с учащихся с описанным уникальным природным объектом как одна из форм воспитания экологического мышления и мировоззрения реализуется в Лицее Брянского района с 2013 года.

Список литературы

1. Величкин Э. М. О распространении омелы белой (*Viscum album* L, *Loranthaceae*) в Брянской области // Вестник Брянского гос. ун-та. 2012. № 4 (2). С. 123–125.

2. Восточноевропейские леса: история в голоцене и современность. Кн. 2 / Отв. ред. О. В. Смирнова. – М.: Наука, 2004. 575 с.

3. Диагнозы и ключи возрастных состояний лесных растений. Деревья и кустарники. Ч. 1 / А. А. Чистякова, Л. Б. Заугольнова, И. В. Полтинкина и др.; под ред. О. В. Смирновой. М.: МГПИ им. Ленина, 1989. 102 с.

4. Зелёная книга Брянской области (растительные сообщества, нуждающиеся в охране): монография / А.Д. Булохов, Ю.А. Семенищенков, Н.Н. Панасенко, Л.Н. Анищенко, Е.А. Аверинова и др. Брянск: ГУП «Брянск. обл. полиграф. объединение», 2012. 142 с.

5. Игнатов М. С., Афонина О. М., Игнатова Е. А. и др. Список мхов Восточной Европы и Северной Азии (The check-list of mosses of East Europe and North Asia) // Arctoa. 2006. Т. 15. С. 1–130.

6. Красная книга Брянской области. Растения. Грибы. Брянск: ЗАО «Издательство «Читай-город», 2004. 272 с.

7. Константинова Н. А., Бакалин В. А., Андреева Е. Н. и др. Список печеночников (*Marchantiophyta*) России (Checklist of liverworts (Marchantiophyta) of Russia) // Arctoa. Т. 18. 2009. С. 1–64.

8. Постановление Администрации Брянской области от 28 июля 2010 г. № 755 «Об утверждении положений и паспортов особо охраняемых природных территорий в Брянском, Гордеевском, Дятьковском, Злынковском, Карачевском, Климовском, Клинцовском, Комаричском, Красногорском, Навлинском, Новозыбковском, Почепском, Рогнединском, Севском, Стародубском, Суражском, Унечском районах Брянской области». [Электронный ресурс]. Режим доступа: *http.: zakonprost.ru. content/regional/7/542780/.* Дата обращения: 15.10.2016.

9. Природные ресурсы и окружающая среда субъектов Российской Федерации. Центральный Федеральный округ: Брянская область / Под ред. Н. Г. Рыбальского, Е. Д. Самотесова и А. Г. Митюкова. М.: НИА Природа, 2007. 1144 с.

10. Семенищенков Ю. А. Фитоценотическое разнообразие Судость-Деснянского междуречья. Брянск: РИО БГУ, 2009. С. 219- 229.

11. Семенищенков Ю. А. О распространении *Hypericum montanum* L. (*Hypericaceae*) и *Pimpinella major* L. (*Apiaceae*) в бассейне Верхнего Днепра (в пределах России) // Бюл. МОИП. 2014. Т. 119. Вып. 1. С. 51–56.

12. Смирнова О. В., Заугольнова Л. Б., Ханина Л. Г., Бобровский М. В., Торопова Н. А. Популяционные и фитоценотические методы анализа биоразнообразия растительного покрова // Сохранение и восстановление биоразнообразия. Учебно-методическое издание. М., 2002. С. 145–194.

13. Уранов А. А. Возрастной спектр фитоценопопуляций как функция времени и энергетических волновых процессов // Биол. науки. 1975. № 2. С. 7–34.

14. Ценопопуляции растений (очерки популяционной биологии). М., 1988. 183 с.

15. Черепанов С. К. Сосудистые растения России и сопредельных государств. СПб, 1995. 992 с.

16. Braun-Blanquet J. Pflanzensoziologie. Grundzuge der Vegetationskunde. 3Aufl. Wien–New York: Springer-Verlag, 1964. 865 P.

Сведения об авторах

Емельяшина Е.В. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: eco_egf@mail.ru

Стрижакова И.В. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: eco_egf@mail.ru

Андреева М.А. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: eco_egf@mail.ru

Анищенко Л.Н. – доктор сельскохозяйственных наук, профессор кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: eco_egf@mail.ru

REVIEW OF FLORA AND VEGETATION OF THE NATURE MONUMENT «DOBRUNSKI SKLONY» (BRYANSK DISTRICT, BRYANSK REGION)

E.V. Emelyashina, I.V. Strizhakova, M.A. Andreeva, L.N. Anishchenko
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

The data of 330 species of vascular plants and 76 species of mosses were generalized. The peculiarities of the structure of phytocenoses of the association ***Lathyro nigri–Quercetum roboris*** Bulokhov et Solomeshch 2003 were inspected, also derived different types of oak forests of different degree of disturbance. The characteristics of local populations of rare and invasive species was described.
Keywords*: flora, plant communities, nature monument, anthropogenic transformation, Bryansk district, Bryansk region.*

References

1. Velichkin E. M. On the distribution of mistletoe (Viscum album L, Loranthaceae) in Bryansk region // Vestnik of Bryansk state University. 2012. No. 4 (2). P. 123-125.

2. Eastern European forests: history in Holocene and contemporaneity. KN. 2 / Ed. the editorship of O. V. Smirnova. – M.: Science, 2004. 575 p.

3. Diagnoses and keys age States of forest plants. The trees and shrubs. Part 1 / A. A. Chistyakova, L. B. Zaugolnova, I. V. Patinkin, etc.; under the editorship of O. V. Smirnova. Moscow: MGPI im. Lenin, 1989. 102 p.

4. Green data book of Bryansk region (plant communities, which need protection): the monograph / A. D. Bulokhov, J. A. Remeniscences, N. N. Panasenko L. N. Anishchenko, E. A. Averianova etc. Bryansk: state unitary enterprise "Bryansk. . the polygraph. Association", 2012. 142 p.

5. Ignatov M. S., Afonina O. M., Ignatova E. A., etc. the List of mosses of East Europe and North Asia (Die check-Liste der Moose in Ost-Europa und Nord-Asien) // Arctoa. 2006. T. 15. P. 1-130.

6. The red book of the Bryansk region. Plants. Mushrooms. Bryansk: ZAO "Publisher "Read-city", 2004. 272 p.

7. Konstantinova N. A., Bakalin V. A., Andreeva E. N. etc. List of liverworts (Marchantiophyta) of Russia (Checkliste der Lebermoose (Marchantiophyta) von Russland) // Arctoa. T. 18. 2009. P. 1-64.

8. The resolution of administration of the Bryansk region from July 28, 2010 № 755 "On approval of the regulations and passport of specially protected natural territories in the Bryansk, Gordeevka, Dyatkovo, Zlynkovskogo, Karachevsky, Klimovsk, Klintsovskiy, Komarichi, Krasnogorskiy Druzhnaya, Novozybkovskiy Krasnyy Gorodok, Sescom, Starodubsky, Surazh, Unechskaya areas of the Bryansk region". [Electronic resource]. Mode of access: http.: zakonprost.ru. Inhalt/regionale/7/542780/. Date of access: 15.10.2016.

9. Natural resources and environment of constituent entities of the Russian Federation. The Central Federal district Bryansk region / ed. G. Rybalsky, E. D. and A. G. Samotesova mitjukova. Moscow: NIA Priroda, 2007. 1144 p.

10. Semeniscenkov Yu. A. Phytocoenotic diversity of Sudost-Desna interfluve. Bryansk: RIO BSU, 2009. P. 219 – 229.

11. Semeniscenkov Yu. A. Propagation Of Hypericum montanum L. (Hypericaceae) and Pimpinella major L. (Apiaceae) in the Upper Dnieper river basin (within Russia) // bull. MOIP. 2014. T. 119. Vol. 1. P. 51-56.

12. Smirnova O.V., Zaugolnova L. B., Khanina L. G., Bobrovsky M. V., Toropova N. A. Populational and phytocenotic analysis methods of the biodiversity of land cover // the Conservation and restoration of biodiversity. Educational-methodical edition. M., 2002. P. 145-194.

13. Uranov A. A. Age range of phyto cenosis populations as a function of time and energetic wave processes // Biol. science. 1975. No. 2. P. 7-34.

14. Coenopopulations of plants (essays on population biology). M., 1988. 183 p.

15. Cherepanov S. K. Vascular plants of Russia and neighboring countries. SPb, 1995. 992 P.

16. Braun-Blanquet J. Pflanzensoziologie. Grundzuge der Vegetationskunde. 3Aufl. Wien–New York: Springer-Verlag, 1964. 865 p.

About authors

Emelyashina E. V – Bryansk State University Undergraduate, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: eco_egf@mail.ru

Strizhakova I. V. – Bryansk State University Undergraduate, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: eco_egf@mail.ru

Andreeva M. A. – Bryansk State University Undergraduate, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: eco_egf@mail.ru

Anishchenko L.N. – doctor of agricultural sciences, professor, department of Geography, Ecology and Land management, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: eco_egf@mail.ru

УДК 796.91

МОРФОФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СПОРТСМЕНОВ ЦИКЛИЧЕСКИХ И АЦИКЛИЧЕСКИХ ВИДОВ СПОРТА

Н.С. Жорова, Е.С. Гурова, М.В. Рудин, Е.В. Шкуричева
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

В статье представлены результаты исследования морфофункциональной характеристики спортсменов циклических и ациклических видов спорта. Исследовались отличия в преобладающем типе телосложения и изменения мышечной и кардиореспираторной систем, отражающие адаптацию спортсменов данного вида спорта.
Ключевые слова: *антропометрия, динамометрия, кардиореспираторная система, телосложения, циклический вид спорта, ациклический вид спорта.*

Введение. При усложнении задач, поставленных перед организмом человека, включается в работу большее количество звеньев регуляции для обеспечения их четкой и своевременной реализации, тем с большим напряжением функционируют все его физиологические системы. Эффективность занятий физической культурой и спортом во многом определяется адекватностью физических нагрузок, индивидуальными особенностями занимающегося, его функциональными возможностями и другими показателями. Только при такой адекватности, может быть, достигнут оздоровительный эффект, рост и стабильность спортивных результатов [1].

Физическая культура и спорт являются очень важными факторами в укреплении здоровья человека, его физическом развитии и воспитании. Для решения ряда задач в спортивной тренировке наиболее оптимальными являются критерии на основе кардиореспираторной системы. Ведь ее функциональное состояние в значительной мере определяется работоспособностью занимающихся и уровнем спортивно-технических результатов. Исследования кардиореспираторной системы занимают центральное место, потому что функциональное состояние ее играет важную роль в адаптации организма к физическим нагрузкам и является одной из основных функциональных возможностей организма. Вместе с тем эффективность физических нагрузок и их стимулирующее влияние на организм может быть достигнуты только при учете возрастных особенностей организма. Организм человека не может существовать без кислорода, который он поглощает из окружающего нас атмосферного воздуха [2].

Физические нагрузки вызывают заметные изменения в различных органах и системах: организм адаптируется к мышечной деятельности. Под влиянием длительных физических нагрузок в организме спортсменов происходит адаптивная перестройка различных органов и систем, обеспечивающая лучшее приспособление его к интенсивной работе в тренировочный период [2]. Наиболее информативным методом оценки состояния кардиореспираторной системы человека является изучение ее показателей в процессе проведения функциональных проб различного характера [3].

Методы исследования. Морфофункциональная оценка состояния организма спортсменов производилась с помощью комплекса методов: соматометрия, динамометрия, реакция сердечно-сосудистой (ЧСС, АД) и дыхательной (ЧД, ЖЕЛ) систем на дозированную нагрузку спортсменов разных специализаций.

Результаты и обсуждения. Систематические занятия физической культурой и спортом не только повышают уровень физического развития, но и изменяют тип телосложения. Есть определенная зависимость между массой тела и мышечной силой. Обычно, чем больше мышечная масса, тем больше сила. Динамометрия руки в среднем составляет 48-50% у женщин, мышечная сила рук характеризует степень развития мускулатуры. Расчеты и сравнительный анализ индекса мышечной массы рук показал, что на

I курсе хороший тестовой показатель имела Лебедь Ю. – 49,5 %, занимающаяся цикличным видом спорта, а самый низкий Булаткина Н. – 22,4 % и Павлюченко Е. – 23,3 %, что говорит о низкой степени развития мускулатуры. У девушек, занимающихся ациклическим видом спорта на I курсе наилучший результат имела Быкова Е. – 61,0%, наименьший Кустова Н. – 46 %. Все девушки, занимающиеся борьбой имеют хорошую степень развития мускулатуры. На II курсе у всех спортсменок, занимающихся ациклическим видом спорта прирост мышечной силы на 25-30 %, у спортсменок, занимающихся цикличным видом спорта на 30-40 %.

Выводы:

1. По результатам антропометрических исследований испытуемые специализирующиеся в ациклическом (на примере дзюдо) и циклическом (на примере легкой атлетики) виде спорта относятся к нормотоническому типу телосложения. Причем полученные показатели практически не отличаются за исключением преобладания мышечного компонента у студентов специализации дзюдо.

2. Тип реакции сердечно-сосудистой системы можно оценить, как брадикардический с умеренным ростом ЧСС на нагрузку и быстрым периодом восстановления среди студентов двух различных по структуре видов спорта. Причем у всех испытуемых отмечается эутонический тип артериального давления.

3. Физические нагрузки вызывают заметные преобразования в кардиореспираторной системе. Данная закономерность характерная для специализирующихся по двум видам спорта. Но несмотря на это студенты ациклического вида спорта, имеющие высокую спортивную квалификацию характеризовались более эффективным уровнем функционирования кардиореспираторной системы, её экономизацией, которая проявляется достоверно более редким пульсом, формированием стабильности АД, увеличением дыхательного объёма лёгких и высокими показателями задержки дыхания на вдохе и выдохе.

Список литературы

1. Дубровский В.И., Федорова В.Н. Биомеханика. Учебник, М.: «Владос-Пресс», 2003. 672 с.

2. Комков А.Г., Кириллова Е.Г. Организационно-педагогическая технология формирования физической активности школьников //Физическая культура: воспитание, образование, тренировка. М., 2002. № 1. С. 2-4.

3. Левшин И.В., Ингол М.В. Руководство к практическим занятиям по общей физиологии. Санкт-Петербург, 2004. 85с

Сведения об авторах

Жорова Н.С. – студентка факультета физической культуры Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: fizvoss@bk.ru

Гурова Е.С. – студентка факультета физической культуры Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: fizvoss@bk.ru

Рудин М.В. – кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой теории и методики физической культуры и спорта Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: fizvoss@bk.ru

Шкуричева Е.В. – старший преподаватель кафедры теории и методики физической культуры и спорта Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: alena.shkuri4eva@yandex.ru

MORPHOFUNCTIONAL CHARACTERISTICS OF SPORTSMEN OF CYCLIC AND ACYCLIC KINDS OF SPORTS

N.S. Zhorova, E.S. Gurova, M.V. Rudin, E.V. Shkuricheva
Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky

The article presents the results of the study of morphofunctional characteristics sportsmen of cyclic and acyclic sports. We investigated differences in the dominant type of physique and changes in the muscle and cardiorespiratory systems, reflecting the adaptation sportsmen of the sport.
Keywords: *anthropometry, dynamometry, cardiorespiratory system, build, cyclical sport, acyclic sport.*

References

1. Dubrovsky V. I., Fedorov V. N. Biomechanics. Textbook, Moscow: "Vla-dos-Press", 2003. 672 p.
2. Komkov A. G., Kirillova E. G. Organizational-pedagogical technology of formation of physical activity of pupils // Physical culture: upbringing, education, training. M., 2002. No. 1. P. 2-4.
3. Levshin, V. I., Yngol M. V. Guide for practical exercises in general physiology. Saint Petersburg, 2004. 85 p.

About authors

Zhorova N. S. – student of the faculty of physical education Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky, e-mail: fizvoss@bk.ru.

Gurova E. S. – student of the faculty of physical education Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky, e-mail: fizvoss@bk.ru.

Rudin M. V. – candidate of pedagogical sciences, head of Department of theory and methodology of physical culture and sport of the Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky, e-mail: fizvoss@bk.ru.

Shkuricheva E.V. – senior lecturer of the Department of theory and methodology of physical culture and sport of the Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky, e-mail: alena.shkuri4eva@yandex.ru.

УДК 612.273+615.2

ВЛИЯНИЕ НОВЫХ ХИМИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ, ОСТРОЙ ГИПОКСИИ С ГИПЕРКАПНИЕЙ И ИХ СОЧЕТАННОГО ДЕЙСТВИЯ НА НЕКОТОРЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ГЕМОГРАММЫ МЫШЕЙ

Н.П. Катунина, Е.Н. Стратиенко, О.В. Кухарева, Ф.Н. Цеева, И.М. Гнеушев, М.П. Катунин
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Среди производных 3-оксипиридина под шифрами СК- и ИБХФ- и физиологически совместимых антиоксидантов под шифром πQ- выявлены соединения СК-131, ИБХФ-2 и πQ-1032, которые в условиях воздействия острой гипоксии различного генеза по антигипоксическому действию превосходят другие испытанные вещества, а также известные антигипоксанты эмоксипин, этомерзол, мексидол, нооглютил и натрия оксибутират. СК-131, ИБХФ-2 и πQ-1032 рекомендуются для дальнейшего более глубокого изучения и возможного применения в клинике в качестве антигипоксических средств.
Ключевые слова: *антигипоксант, гипоксия, организм, лекарственные средства.*

Введение. Гипоксия представляет собой универсальный патологический процесс, сопровождающий и определяющий развитие различной патологии [1, 5]. Метаболические сдвиги в условиях недостатка кислорода стереотипны и связаны с энергодефицитом и усилением генерации активных форм кислорода. Дезорганизация метаболизма при кислородном голодании проявляется нарушениями энергетического обмена, биосинтеза белка, репликации ДНК, изменением чувствительности мембранных рецепторов и др.

Взвешенные элементы периферической крови являются важным объектом для исследования при изучении острой гипоксии, т.к. они отличаются друг от друга по ряду параметров: по выполняемым функциям, по характеру процессов обмена, по механизму использования кислорода, по способности к регенерации активных форм кислорода и устойчивости к ним [6].

Форменные элементы крови активно участвуют в ответной реакции организма на общую гипоксию. При этом основным фактором, регулирующим клеточный гомеостаз, является количественная концентрация клеток.

Цель работы - изучение влияния новых химических веществ, острой гипоксии с гиперкапнией и их сочетанного действия на некоторые показатели гемограммы мышей.

Методика исследования. Опыты выполнены на 80 белых мышах-самцах линии SHR (20-26 г), полученных из питомника Научного центра биомедицинских технологий РАМН (п. Андреевка Московской области). Эксперименты начинали через 12-15 дней после адаптации животных в виварии. Все опыты выполнены в весенне-летний период с 14.00 до 18.00 с обязательным включением в опыт контрольной и подопытной групп мышей одинаковой массы. Исследования проводили в соответствии с «Международными рекомендациями по проведению медико-биологических исследований с использованием животных» (1985 г.) и Правилами лабораторной практики в Российской Федерации (приказ МЗ РФ № 267 от 19.06.2003 г.).

Показатели гемограммы мышей (гемоглобин, эритроциты и лейкоциты) одномоментно определяли на аппарате Microdiff-18 фирмы Coulter (США).

Статистическую обработку экспериментальных данных опытов проводили с помощью компьютерных программ Microsoft Excel XP в среде Windows XP и STATISTICA 6,0. Для вариационного ряда выборки вычисляли среднюю арифметическую величину (М) и ее ошибку (m). Для оценки достоверности различий двух сравниваемых величин применяли t-критерий Стьюдента [4]. Достоверными считали различия между сравниваемыми величинами при $p < 0,05$.

Результаты и обсуждение. В ранее проведенных нами опытах установлено, что новое этилфенилзамещенное производное 3-оксипиридина под шифром СК-131, гетероароматический антиоксидант под шифром ИБХФ-2 и физиологически совместимый антиоксидант под шифром πQ-1032 оказывают наиболее выраженное антигипоксическое действие в широком диапазоне доз на четырех моделях острой гипоксии (гемическая, гистотоксическая, гипобарическая и гипоксия с гиперкапнией). Эти положительные эффекты значительно превосходят таковые у известных препаратов, обладающих антигипоксическими и/или антиоксидантными свойствами (натрия оксибутират, этомерзол, эмоксипин, мексидол и нооглютил) [2, 3].

На наш взгляд, упомянутые выше соединения представляют интерес для дальнейшего всестороннего исследования в качестве потенциальных антигипоксантов и возможного их внедрения в клинику. Результаты этих опытов расширят имеющиеся сведения о фармакологических свойствах и показаниях к применению исследуемых соединений, позволят выявить возможные побочные эффекты и определить противопоказания для их применения, а также судить о возможном механизме антигипоксического действия.

Влияние СК-131, ИБХФ-2 и πQ-1032 и их сочетание с острой гипоксией с гиперкапнией на показатели гемограммы не исследовалось, что было основанием для проведения наших опытов.

В опытах использовали СК-131 в дозе 100 мг/кг, ИБХФ-2 в дозе 10 мг/кг и πQ-1032 в дозе 25 мг/кг, которые на четырех моделях острой гипоксии проявляли четкий антигипоксический эффект.

Установлено, что СК-131 в дозе 100 мг/кг не оказывал существенного влияния на содержание эритроцитов, гемоглобина и лейкоцитов в крови мышей. У животных, подвергавшихся воздействию острой гипоксии с гиперкапнией, содержание эритроцитов в крови увеличивалось на 41%, гемоглобина - на 18%. У мышей, которым за 1 час до воздействия острой гипоксии с гиперкапнией вводили СК-131 (100 мг/кг), количество эритроцитов в крови было больше, чем в контроле на 62%, гемоглобина – на 47%. Соединение СК-131 (100 мг/кг), острая гипоксия с гиперкапнией и их сочетанное воздействие не оказывали существенного влияния на содержание лейкоцитов в крови мышей.

При введении ИБХФ-2 в дозе 10 мг/кг наблюдалась тенденция к увеличению содержания эритроцитов на 18%. В тех же условиях опыта другие показатели крови (гемоглобин, лейкоциты) существенно не отличались от контроля. Острая гипоксия с гиперкапнией приводила к увеличению в крови концентрации эритроцитов на 39%, гемоглобина – на 24%. Количество лейкоцитов существенно не изменялось. При сочетанном воздействии ИБХФ-2 и острой гипоксии с гиперкапнией наблюдалось увеличение содержания эритроцитов и гемоглобина на 59 и 31% соответственно. Концентрация лейкоцитов по сравнению с контролем не изменялась.

Установлено, что после инъекции химического соединения под шифром πQ-1032 в дозе 25 мг/кг показатели гемограммы мышей практически не отличались от исходной величины. После воздействия острой гипоксии с гиперкапнией в крови животных увеличилась концентрация эритроцитов на 37%, гемоглобина – на 21%. У мышей, получавших перед воздействием кислородного голодания πQ-1032 в дозе 25 мг/кг, увеличивалось содержание эритроцитов на 52% и гемоглобина – на 45%. Содержание лейкоцитов существенно не изменялось.

Выводы:

1. Результаты проведенных нами опытов позволяют сказать, что введение СК-131, ИБХФ-2 и πQ-1032 интактным мышам не оказывало существенного влияния на содержание в крови эритроцитов, гемоглобина и лейкоцитов.

2. У мышей, подвергавшихся воздействию острой гипоксии с гиперкапнией, содержание эритроцитов и гемоглобина значительно повышалось. Этот эффект связывают с

включением адаптационных механизмов при действии гипоксии, к числу которых относится выход эритроцитов из депо крови, например, из печени.

3. У животных, получавших СК-131, ИБХФ-2 и πQ-1032 за 1 час до воздействия острой гипоксии с гиперкапнией, содержание эритроцитов и гемоглобина было больше по сравнению с их количеством у мышей в контрольной группе, а также у мышей, которых подвергали воздействию гипоксии с гиперкапнией.

4. Следовательно, результаты наших опытов позволяют заключить, что химические соединения под шифром СК-131, ИБХФ-2 и πQ-1032 после воздействия острой гипоксии с гиперкапнией способны поддерживать содержание эритроцитов и гемоглобина на достаточно высоком уровне, что необходимо для своевременной доставки кислорода к тканям и коррекции повреждающего действия кислородного голодания.

5. На наш взгляд, эти соединения представляют интерес в качестве перспективных антигипоксантов и требуют более глубокого изучения их фармакологических свойств и возможного механизма действия.

Список литературы

1. Владимиров Ю.А. Свободные радикалы в биологических системах // Соровский образовательный журнал. 2000. Т. 6. №12. С.13-19.

2. Катунина Н.П., Катунин М.П. Изучение влияния фенилэтилзамещенных производных 3-оксипиридина на продолжительность жизни мышей при острой гипоксии с гиперкапнией и острой гипобарической гипоксии // Саратовский научно-медицинский журнал. 2007. Т. 3. № 1. С. 100-103.

3. Катунина Н.П., Стратиенко Е.Н., Кухарева О.В., Цеева Ф.Н., Гнеушев И.М., Изучение антигипоксической активности новых металокомплексных соединений // Вестник Брянского государственного университета. 2014. № 4. С. 88-93.

4. Леонов В.П., Ижевский П.В. Применение статистики в статьях и диссертациях по медицине и биологии. // Междунар. журн. мед. практики. 1998. № 4. С. 7-12.

5. Скулачев В.П. Явления запрограммированной смерти. Митохондрии, клетки и органы: роль активных форм кислорода // Соровский образовательный журнал. 2001. Т.7. №6. С. 4-10.

6. Хайбуллина З.Р., Вахидова Н.Т. Состояние периферической крови при острой гипоксии в эксперименте // Медицина: вызовы сегодняшнего дня: материалы междунар. науч. конф. (г. Челябинск, июнь 2012 г.). Челябинск: Два комсомольца, 2012. С. 24-29.

Сведения об авторах

Катунина Н.П. – доктор биологических наук, профессор кафедры физического воспитания и основ медицинских знаний Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: npkatunina@mail.ru

Стратиенко Е.Н. – доктор медицинских наук, профессор кафедры физического воспитания и основ медицинских знаний Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: stratienko@list.ru

Кухарева О.В – кандидат медицинских наук, доцент кафедры физического воспитания и основ медицинских знаний Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: pilotavia32@yandex.ru

Цеева Ф.Н. – кандидат медицинских наук, доцент кафедры физического воспитания и основ медицинских знаний Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: gorizont-32@yandex.ru

Гнеушев И.М. – врач - сосудистый хирург Брянской городской больницы №1, e-mail: npkatunina@mail.ru

Катунин М.П. – врач - кардиолог Брянской областной больницы №1, e-mail: npkatunina@mail.ru

THE IMPACT OF NEW CHEMICAL COMPOUNDS THAT ACUTE HYPOXIA WITH HYPERCAPNIA AND THEIR COMBINED ACTION ON SOME INDICES OF MICE HEMOGRAM

N.P. Katunina, E.N. Stratiyenko, O.V. Kukhareva, F.N. Tseeva,
I.M. Gneushev, M.P. Katunin
Bryansk state university of a name of the academician I.G. Petrovsky

Among derivatives there are 3 oxypyridines under codes of SK- and IBHF- and physiologically compatible antioxidants under code πQ- bonds SK-131, IBHF-2 and πQ-1032 which in the conditions of influence of an acute hypoxia of various genesis surpass other tested substances in anti-hypoxemic action, and also the known antihypoxant Emoxipin, Etomerzol, Mexidol, Nooglyutit and Sodium a hydroxybutyrate. SK-131, IBHF-2 and πQ-1032 are recommended for further deeper studying and possible use in clinic as anti-hypoxemic agents.
Keywords: antihypoxant, hypoxia, organism, medicines.

References

1. Vladimirov Yu.A. Free radicals in biological systems // Sorovsky educational magazine. - 2000. T. 6. No. 12. P. 13-19.
2. Katunina N.P., Katunin M.P. Influence studying the feniletilzameshchennykh derivative 3 oxypyridines on life expectancy of mice at a sharp hypoxia from a giperkapniy and sharp gipobarichesky hypoxia // Saratov scientific and medical magazine. 2007. T. 3. No. 1. P. 100-103.
3. Katunina N.P., Stratiyenko E.N., Kukhareva O.V., Tseeva F.N., Gneushev I.M. Studying of anti-hypoxemic activity new metalokompleksnykh of connections // Bulletin of the Bryansk state university. 2014. No. 4. P. 88-93.
4. Leonov V.P., Izhevskiy P.V. Application of statistics in articles and theses on medicine and biology // International magazine of medical practice. 1998. No. 4. P. 7-12.
5. Skulachev V.P. The phenomena of the programmed death. Mitochondrions, cages and bodies: role of active forms of oxygen // Sorovsky educational magazine. 2001. T.7. No. 6. P. 4-10.
6. Haybullina Z.R., Vakhidova N.T. Sostoyaniye of peripheral blood at a sharp hypoxia in an experiment // Medicine: calls of today: materials international night conference (Chelyabinsk, June, 2012). Chelyabinsk: Two Komsomol, 2012. P. 24-29.

About author

Katunina N.P. – doctor of Biological Science, professor of department of physical training and a basic medical knowledge at the BGU, e-mail: npkatunina@mail.ru.

Stratiyenko E.N. – doctor of Medical Sciences, professor of department of physical training and a basic medical knowledge at the BGU, e-mail: stratienko@list.ru.

Kukhareva O.V. – candidate of medical sciences, associate professor of physical training and a basic medical knowledge at the BGU, e-mail: pilotavia32@yandex.ru.

Tseeva F.N. – candidate of medical sciences, associate professor of physical training and a basic medical knowledge at the BGU, e-mail: gorizont-32@yandex.ru.

Gneushev I.M. – doctor - the vascular surgeon of the Bryansk municipal hospital № 1, e-mail: npkatunina@mail.ru.

Katunin M.P. – doctor - cardiologist of the Bryansk regional hospital № 1, e-mail: npkatunina@mail.ru.

УДК 581.9

К ВОПРОСУ О РЕКОНСТРУКЦИИ УСАДЕБНОГО ПАРКА ВИЛЛЫ Д. САПОЖКОВА (КЛИНЦОВСКИЙ РАЙОН, БРЯНСКАЯ ОБЛАСТЬ)

[1]А. М. Петренко, [2]О. В. Полякова, [1]Ю.А. Семенищенков, [3]Ж. М. Фейгина
[1]Брянский государственный университет им. акад. И. Г. Петровского
[2]Федерация профсоюзов Брянской области
[3]ООО «Санаторий «Вьюнки»

В статье приведен список видов дендрофлоры усадебного парка природно-архитектурного комплекса «Вилла Сапожкова», расположенного в Клинцовском районе Брянской области. Выявлены редкие и нуждающиеся в особой охране виды интродуцентов, даны рекомендации по их сохранению и реконструкции парка. Исследования проведены по инициативе администрации санатория «Вьюнки» и учредителя санатория – Федерации профсоюзов Брянской области.
Ключевые слова: *усадебный парк, дендрофлора, Вилла Сапожкова, Вьюнки, Клинцовский район, Брянская область.*

Введение. Усадьба клинцовского фабриканта Д. Сапожкова расположена в п. Вьюнка – пригороде г. Клинцы (Клинцовский район). Этот уникальный природно-архитектурный комплекс был основан в 1910–1912 гг. по проекту итальянского архитектора и является единственным в Брянской области загородным усадебным комплексом, архитектура которого целиком выдержана в духе подражания готике [8]. Комплекс занимает свыше 6 га на северном берегу большого пруда с земляной плотиной (рис). В настоящее время на территории бывшей усадьбы располагается санаторий «Вьюнки». Комплекс имеет статус объекта культурного наследия федерального значения согласно Указу Президента РФ от 20.02.1995 г. № 176 «Об утверждении Перечня объектов исторического и культурного наследия федерального (общероссийского) значения».

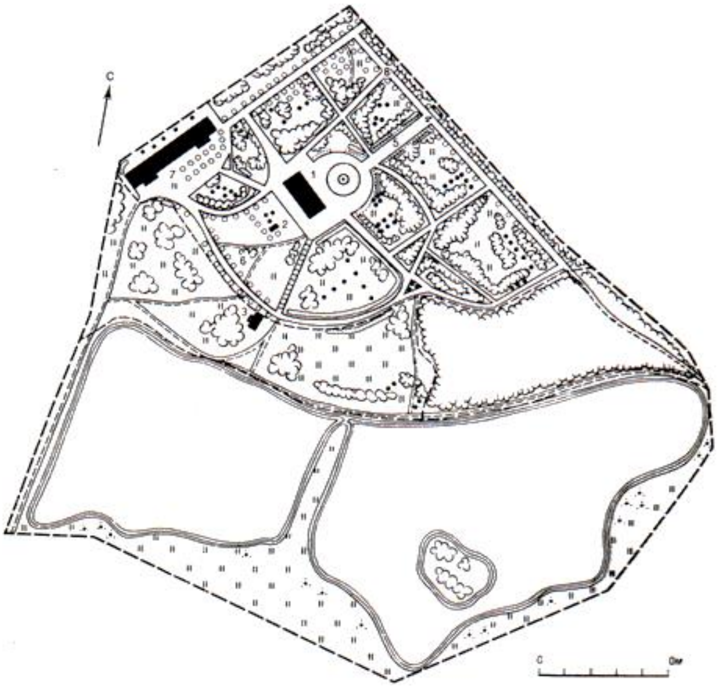


Рис.1. План виллы Д. Сапожкова [8].
Обозначения: 1 – главный дом, 2 – ледник, 3 – машинное отделение, 4 – ворота, 5 – главная аллея, 6 – пергола, 7 – конюшня с голубятней.

Важной достопримечательностью комплекса является усадебный парк ландшафтного типа. Его композиционной осью является главная аллея, которая начинается от монументальных въездных ворот и связывает постройки с проходящей вдоль северо-восточной границы парка дорогой. Ее перспектива замыкается стоящим посреди парка домом. Раздваиваясь, эта аллея огибает дом слева и выходит к берегу пруда, где стоит здание машинного отделения электростанции. Другая ветвь обходит дом справа, связывая его со строениями в северо-западной части парка – конюшней и ледником [4].

Усадебный парк виллы Д. Сапожкова содержит уникальную для начала XX в. коллекцию местных и интродуцированных деревьев и кустарников, многие из которых сохранились до наших дней. В 1941–1943 гг. усадьба сильно пострадала и была восстановлена в послевоенный период [8]. Попытку инвентаризации дендрофлоры парка в начале 1970-х годов предпринял П. З. Босек (1975) [1], который отмечал здесь редкие растения-экзоты: *Picea rubra, Pinus strobus, Pinus montana, Spiraea hypericifolia* и нек. др. В. Н. Городков указывал на нахождение здесь свыше восьмидесяти видов декоративных деревьев и кустарников, однако отмечал, что необходимы их тщательная инвентаризация и реконструкция парка [4].

В 2016 г. по инициативе администрации санатория «Вьюнки» при поддержке Федерации профсоюзов Брянской области проведена инвентаризация дендрофлоры территории природно-архитектурного комплекса. Главная цель исследования – разработка проекта реконструкции усадебного парка, сохранение деревьев и кустарников-экзотов и привлечение внимания общественности к проблеме охраны природно-культурного наследия в Брянской области. В настоящей статье приведены результаты проведенных исследований.

Материалы и методы. Инвентаризация дендрофлоры усадебного парка проведена маршрутным методом в июне 2016 г. На изучаемой территории были индентифицированы деревья и кустарники; растения разных видов внесены в кадастр и пронумерованы. Идентификация образцов проводилась на кафедре биологии Брянского государственного университета им. академика И. Г. Петровского. Гербарные образцы, подтверждающие находки, переданы в Гербарий БГУ (BRSU). В полевых условиях отмечено состояние растений и предложены рекомендации по сохранению наиболее ценных видов на территории парка. Ряд видов индентифицировать в настоящее время не удалось в связи с невозможностью сбора частей растений (в первую очередь, некоторые старовозрастные высокие и угнетенные деревья).

Результаты исследования. По результатам проведенного обследования парка, выявлены 58 видов деревьев и кустарников в составе 19 семейств. Ниже приведен список дендрофлоры в алфавитном порядке (табл. 1). Названия растений даны по С. К. Черепанову [11].

Таблица 1

Перечень декоративных деревьев и кустарников парка «Вьюнки», обнаруженных в ходе обследования

№ п.п.	Название растения	Примечания и рекомендации
1.	**Abies balsamea* (L.) Mill. – Пихта бальзамическая Семейство *Pinaceae* Происхождение – Северная Америка	Особо ценное. Обрезка сухих нижних ветвей.
2.	*Acer campestre* L. – Клён полевой, равнинный, Неклён Семейство *Aceraceae* Происхождение – Европа, Кавказ, Малая Азия	Обнаружен вдоль автотрассы на участке, примыкающем к пруду. Возможна пересадка растений на территорию парка.
3.	**Acer negundo* L. – Клён американский, ясенелистный Семейство *Aceraceae* Происхождение – Северная Америка	Вырубка во всех местонахождениях кроме старовозрастных деревьев в районе детской площадки
4.	**Acer platanoides* L. – Клён остролистный Семейство *Aceraceae* Происхождение – Европа, Кавказ	Сохранение только старовозрастных и высокодекоративных растений. Дикорастущее растение.
5.	**Acer pseudoplatanus* L. – Клён ложноплатановый, белый, Явор	Обрезка нижних ветвей и прикорневой поросли. Поиск и сохранение молодых растений, возникших

№ п.п.	Название растения	Примечания и рекомендации
	Семейство *Aceraceae* Происхождение – Южная и Средняя Европа, Кавказ, Малая Азия	путем самосева для последующей пересадки. Пересадка мелких растений из лесной части парка.
6.	*(?) *Acer rubrum* L. – Клён красный Семейство *Aceraceae* Происхождение – Северная Америка	Особо ценное. Точная идентификация затруднена из-за невозможности сбора частей высокорослого растения.
7.	**Aesculus hippocastanum* L. – Конский каштан обыкновенный Семейство *Hippocastanaceae* Происхождение – Юг Балканского полуострова	Поиск и сохранение молодых растений, возникших путем самосева для последующей пересадки.
8.	**Alnus glutinosa* L. – Ольха чёрная, клейкая Семейство *Betulaceae* Происхождение – Европа, Западная Азия	Лесная часть парка. Дикорастущее растение.
9.	**Amelanchier spicata* (Lam.) K. Koch – Ирга колосистая, Винная ягода Семейство *Rosaceae* Происхождение – Северная Америка	Растет у заброшенного корпуса, возможна пересадка на территорию парка с последующим контролем разрастания.
10.	**Berberis vulgaris* L. – Барбарис обыкновенный Семейство *Berberidaceae* Происхождение – Передняя Азия, Закавказье, Центральная, Восточная и Южная Европа	Формирование кроны, удаление окружающих растений.
11.	**Betula pendula* Roth – Берёза повислая Семейство *Betulaceae* Происхождение – Европа Северная Африка, Передняя и Центральная Азия	Сохранение для общего биоразнообразия. Берез мало на территории парка.
12.	**Caragana arborescens* Lam. – Карагана древовидная, Жёлтая акация Семейство *Fabaceae* Происхождение – Сибирь, Южный Урал, Казахстан, Кавказ	Формирование кроны, удаление окружающих растений.
13.	*Cerasus vulgaris* Mill. – Вишня обыкновенная Семейство *Rosaceae* Происхождение – Европа, встречается только в культуре	Растет у заброшенного корпуса, возможна посадка на территории парка
14.	**Corylus avellana* L. – Орешник обыкновенный, Лещина Семейство *Betulaceae* Происхождение – Европа, Кавказ и Средний Восток	Лесная часть парка. Дикорастущее растение.
15.	**Crataegus monogyna* Jacq. – Боярышник однопестичный Семейство *Rosaceae* Происхождение – Европа, северо-запад Африки, Ближний и Средний Восток	Лесная часть парка. Одичавшие растения. Пересадка.
16.	**Crataegus submollis* Sarg. – Боярышник мягковатый Семейство *Rosaceae* Происхождение – Северная Америка	Особо ценное.
17.	(?) *Cupressus* sp. – Кипарис Семейство *Cupressaceae*	Особо ценное. Высокорослые растения, у которых затруднительно собрать части для определения. Одно из двух деревьев погибшее.
18.	**Euonymus verrucosa* Scop. – Бересклет бородавчатый Семейство *Celastraceae* Происхождение – Европа, Кавказ, Малая Азия	Пересадка в парковую часть.
19.	**Frangula alnus* Mill. – Крушина ломкая Семейство *Rhamnaceae* Происхождение – Европа, Западная Сибирь, Малая Азия, Кавказ, Средняя Азия	Лесная часть парка. Дикорастущее растение.
20.	**Fraxinus excelsior* L. – Ясень обыкновенный	Лесная часть парка. Дикорастущее растение.

№ п.п.	Название растения	Примечания и рекомендации
	Семейство *Oleaceae* Происхождение – Европа, Закавказье	
21.	*Fraxinus pennsylvanica* Marsh. – Ясень пенсильванский Семейство *Oleaceae* Происхождение – Америка	Удаление сухих ветвей.
22.	*Genista tinctoria* L. – Дрок красильный Семейство *Fabaceae* Происхождение – Европа, Малая и Средняя Азия, Кавказ, Западная Сибирь	Обнаружен по берегам пруда. Декоративное красивоцветущее дикорастущее растение. Возможна пересадка на территорию парка на открытые участки.
23.	*Grossularia reclinata* L. – Крыжовник отклонённый Семейство *Grossulariaceae* Происхождение – Западная и Южная Европа, Средняя Азия	Лесная часть парка. Дикорастущее или одичавшее растение.
24.	**Larix decidua* Mill. – Лиственница европейская Семейство *Pinaceae* Происхождение – Средняя Европа, Альпы, Кавказ	Удаление сухих ветвей.
25.	**Lonicera tatarica* L. – Жимолость татарская Семейство *Caprifoliaceae* Происхождение – Юго-Восток европейской части России, Сибирь	Вырубка подроста клена вокруг. Формирование кроны, удаление окружающих растений. Пересадка на открытые участки.
26.	**Mahonia aquifolia* (Pursh) Nutt. – Магония падуболистная Семейство *Berberidaceae* Происхождение – Северная Америка	Особо ценное. Пересадка. Единственное растение в лесной части парка.
27.	**Padus avium* Mill. – Черемуха обыкновенная Семейство *Rosaceae* Происхождение – Европа, Западная Сибирь, Кавказ	Возможно оставление отдельных растений в нижнем ярусе в аллеях и в других частях парка. Красивоцветущее декоративное дикорастущее растение.
28.	**Parthenocissus inserta* (Kerner) Fritsch – Девичий виноград прикреплённый Семейство *Vitaceae* Происхождение – Дальний Восток	Контроль разрастания. Ранее был неверно определен.
29.	**Philadelphus coronarius* L. – Чубушник венечный Семейство *Hydrangeaceae* Происхождение – Юг Западной Европы	Формирование кроны, удаление окружающих растений.
30.	**Philadelphus latifolius* Schrad. ex DC. – Чубушник широколистный, пушистый Семейство *Hydrangeaceae* Происхождение – Северная Америка	Особо ценное. Формирование кроны, удаление окружающих растений. Пересадка на открытые участки.
31	**Picea abies* (L.) H. Karst. – Ель обыкновенная Семейство *Pinaceae* Происхождение – Северо-Восток Европы	Поиск и сохранение молодых растений, возникших путем самосева для последующей пересадки.
32.	* (?) *Picea pungens* Engelm. f. *glauca* – Ель колючая, сизая форма Семейство *Pinaceae* Происхождение – Северная Америка	Особо ценное. Обрезка нижних ветвей, удаление поросли клена вокруг.
33.	* (?) *Picea pungens* Engelm. – Ель колючая, голубая форма Семейство *Pinaceae* Происхождение – Северная Америка	Особо ценное. Растет у заброшенного корпуса, возможна посадка на территории парка
34.	**Pinus sylvestris* L. – Сосна обыкновенная Семейство *Pinaceae* Происхождение – Евразия	Поиск и сохранение молодых растений, возникших путем самосева для последующей пересадки.
35.	**Populus tremula* L. – Осина, Тополь дрожащий Семейство *Salicaceae* Происхождение – Евразия	Лесная часть парка. Дикорастущее растение.
36.	*Prunus domestica* L. – Слива домашняя Семейство *Rosaceae* Происхождение – Восточный Кавказ, Балканы,	Растет у заброшенного корпуса, возможна посадка на территории парка

№ п.п.	Название растения	Примечания и рекомендации
	Малая Азия	
37.	*Prunus cerasifera* Ehrh. – Алыча, Слива растопыренная Семейство *Rosaceae* Происхождение – Передняя Азия	Поиск и сохранение молодых растений, возникших путем самосева для последующей пересадки.
38.	**Pyrus pyraster* Burgsd. – Груша лесная Семейство *Rosaceae* Происхождение – Европа	Дикорастущее красивоцветущее растение. Ранее был неверно определен. Возможна пересадка.
39.	**Quercus robur* L. – Дуб черешчатый Семейство *Fagaceae* Происхождение – Европа	Удаление сухих ветвей. Сохранение молодых растений.
40.	**Quercus rubra* L. – Дуб красный, северный Семейство *Fagaceae* Происхождение – Северная Америка	Особо ценное. Поиск и сохранение молодых растений, возникших путем самосева для последующей пересадки. Содействие росту молодой поросли из семян для последующей пересадки на новые места.
41.	**Rhamnus cathartica* L. – Жостер слабительный Семейство *Rhamnaceae* Происхождение – Европа, Кавказ, Малая и Средняя Азия, Западная и Южная Сибирь	Сохранение старовозрастных растений. Контроль разрастания. Ограничение доступа детей к растениям, плоды которых есть опасно.
42.	**Robinia pseudoaacia* L. – Робиния лжеакация, акация белая Семейство *Fabaceae* Происхождение – Северная Америка	Обновление молодыми растениями, возникающими из корневой поросли. Обрезка сухих ветвей у старых деревьев.
43.	**Rosa rugosa* Thunb. – Роза морщинистая Семейство *Rosaceae* Происхождение – Дальний Восток, Сахалин, Корея, Северный Китай, Япония	Растет вдоль дороги у заброшенного корпуса, возможна посадка на территории парка
44.	**Rosa* sp. L. – Шиповник Семейство *Rosaceae* Происхождение – Европа	Точная идентификация найденных шиповников в данное время года невозможна. Пересадка на клумбы, обрезка, формирование кроны. Кустарники колючие. Посадка в недоступные для детей места!
45.	*Rubus caesius* L. – Ежевика сизая Семейство *Rosaceae* Происхождение – Европа, Азия, Северная Америка	Изредка на открытых участках. Культивирование нецелесообразно. Колючее растение.
46.	*Salix alba* L. – Ива белая, Ветла Семейство *Salicaceae* Происхождение – Европа, Западная Сибирь, Малая Азия, Иран, Казахстан	Лесная часть парка, сырые места, берега пруда. Дикорастущее широко распространенное дерево.
47.	**Salix caprea* L. – Ива козья Семейство *Salicaceae* Происхождение – Европа, Кавказ, Западная и Средняя Азия	Дикорастущее широко распространенное дерево.
48	*Salix vinogradovii* A. Skvorts. – Ива Виноградова. Происхождение – Европа.	Дикорастущее растение в окрестностях пруда.
49.	**Sorbus aucuparia* L. – Рябина обыкновенная Семейство *Rosaceae* Происхождение – Европа, Передняя Азия, Кавказ	Дикорастущие и культивируемые на территории парка растения.
49.	**Spiraea* sp. Семейство *Rosaceae* Происхождение – Европа	Обнаружена на острове пруда. Возможна пересадка на территорию парка.
51.	*Syringa amurensis* Rupr. – Сирень амурская Семейство *Oleaceae* Происхождение – Маньчжурия, Приморский и Хабаровский края, Амурская область, Китай, Корея	Особо ценное. Обрезка сухих ветвей.
52.	**Syringa josikaea* J. Jacq. – Сирень венгерская Семейство *Oleaceae* Происхождение – Юго-Восточная Европа, эндемик Карпат	Формирование кроны, обрезка сухих ветвей.

№ п.п.	Название растения	Примечания и рекомендации
53.	**Syringa vulgaris* L. – Сирень обыкновенная Семейство *Oleaceae* Происхождение – Юго-Восточная Европа, Карпаты, Балканы	Прочистка, вырубка многочисленных мелких побегов, возникающих из корневой поросли. Формирование кроны.
54.	*Thuja occidentalis* L. – Туя западная Семейство *Cupressaceae* Происхождение – Северная Америка	–
55.	**Tilia cordata* Mill. – Липа сердцевидная, мелколистная Семейство *Tiliaceae* Происхождение – Европа, Кавказ	Обрезка поросли от пней у старовозрастных растений.
56.	**Tilia platiphyllos* L. – Липа плосколистная, крупнолистная Семейство *Tiliaceae* Происхождение – Центральная и Западная Европа	Обрезка поросли от пней у старовозрастных растений.
57.	*Ulmus glabra* Huds. – Вяз голый Семейство *Ulmaceae* Происхождение – Центральная и Восточная Европа, Кавказ и Малая Азия	Группа растений встречена у ледника. Происхождение неизвестно.
58.	**Ulmus laevis* Pall. – Вяз гладкий, каркасовый Семейство *Ulmaceae* Происхождение – Европа, Кавказ, Малая Азия, Урал, Казахстан	Дикорастущее растение. Возможно использование в озеленении.

Примечание. Знаком «*» отмечены виды, ранее отмеченные на территории парка [6], в том числе некоторые неверно ранее определенные таксоны. Знаком «?» отмечены виды, индентификация которых затруднительна.

В неофициальных источниках для парка приведены 88 таксонов деревьев и кустарников [6]. Ряд из них, вероятно, исчезли; некоторые из них могли были неверно определены (табл. 2).

Таблица 2

Перечень декоративных деревьев и кустарников парка «Вьюнки», не обнаруженных в ходе обследования, но указанных для парка ранее [6] (сохранено оригинальное наименование таксонов растений)

1. Арункус (таволжник)	23. Сосна сибирская обыкновенная
2. Береза далекарлийская	24. Сосна кедровая европейская
3. Вяз форма пестролистный	25. Сосна веймутова
4. Виноград девичий пятилисточковый	26. Сирень персидская
5. Вейгела ранняя	27. Бирючина овальнолистная
6. Дуб пирамидальный	28. Спирея иволистная
7. Груша обыкновенная	29. Спирея японская
8. Горец сахалинский	30. Спирея многоцветковая
9. Ива ломкая	31. Чубушник Сатэуми
10. Ива русская	32. Черемуха поздняя
11. Ива трехтычинковая	33. Шиповник собачий
12. Ива шерстистопобеговая	34. Шиповник коричный
13. Кизил	35. Яблоня лесная
14. Клен серебристый рассеченнолистный	36. Ясень зеленый
15. Конский каштан восьмитычинковый	37. Ясень американский
16. Лиственница сибирская	38. Чубушник венечный золотистый
18. Липа американская	39. Жимолость
19. Липа крымская	40. Сумах оленерогий (уксусное дерево)
20. Лох восточный	41. Черемуха виргинская
21. Можжевельник виргинский	42. Липа длинночерешковая
22. Пихта сибирская	

Наибольшую ценность на территории парка представляют старовозрастные интродуценты. Примечательна липа крупнолистная (*Tilia plathyphyllos* L.), расположенная в центральной части усадьбы. Возраст дерева составляет, по-видимому, более 150 лет, ствол раздвоен на высоте около 1,5 м. Дерево живое, цветет и плодоносит, имеет дупло. Необходимо ограничить доступ к дереву, чтобы предотвратить облом ветвей.

Рис.2. Старовозрастное дерево *Tilia plathyphyllos*.

На территории парка отмечены одичание и спонтанное распространение некоторых интродуцированных видов. В частности, обнаружен благонадежный подрост центральноевропейских видов *Acer pseudoplatanus* L., *Crataegus monogyna* Jacq. и североамериканского – *Quercus rubra* L., возникающий в результате семенного размножения. Вегетативно интенсивно размножается *Robinia pseudacacia* L. Эти растения можно использовать в озеленении парка.

Рис. 3. Подрост *Acer pseudoplatanus* (слева) и *Crataegus monogyna* (справа).

Спонтанно распространяются малоценные деревья *Acer negundo* L., которые, впрочем, можно в небольшом числе оставить на территории парка. Необходим контроль разрастания лианы *Parthenocyssus inserta* (Kerner) Fritsch, которая в настоящее время формирует аркообразные заросли в аллее на специальных опорах в перголах. На отдельных участках в лесной части парка отмечено ее спонтанное разрастание.

Интересным с флористической точки зрения является широкое участие в насаждениях на территории усадьбы кустарника *Rhamnus cathartica* L., который спорадически распространен в Брянской области. Этот вид, по-видимому, широко использовался в озеленении в парках в начале XX в., о чем свидетельствуют его находки и в других усадебных парках в области [5; наблюдения авторов]. Плоды этого растения вызывают расстройство желудка, поэтому не рекомендуется культивировать его в местах пребывания детей на территории санатория.

Вызывает опасение состояние растений *Mahonia aquifolia* (Pursh) Nutt., которые оказались в сильно заросшей части парка в условиях высокого затенения. Эти кустарники необходимо пересадить на более освещенные участки.

В целом большинство старовозрастных деревьев нуждаются в обрезке сухих сучьев, удалении окружающего подроста малоценных растений. Необходимо производить формирование кроны у невысоких кустарников. Требуется прореживание насаждений в заросшей части парка с сохранением наиболее ценных растений.

Следует учитывать также, что отдельные ценные интродуценты представлены в окрестностях пруда и более нигде на территории усадьбы не встречаются. Здесь же отмечен изредка распространенный в области вид кустарниковой ивы Виноградова – *Salix vinogradovii* A. Skvorts., а также редкий в Брянской области злак у восточной границы арела – *Holcus lanatus* L., формирующий прибрежные заросли по берегам пруда. Все указанные находки подтверждают необходимость включения в состав комплекса расположенного рядом пруда с прибавлением к нему 50–100-метровой прибрежной полосы по южному берегу, от плотины до дороги, на что указывал В. Н. Городков [4].

На территории парка имеется большой участок, где сформировались естественные лесные насаждения. Они представлены теневыми широколиственными лесами с участием *Tilia cordata* Mill., *Acer platanoides* L., *Populus tremula* L., *Fraxinus excelsior* L., *Quercus robur* L. Сообщества тенистые, сомкнутость крон древостоя достигает 80%. В подлеске преобладают *Corylus avellana* L., подрост *Tilia cordata* и *Acer platanoides.* В составе их флоры представлены типичные тенелюбивые и теневыносливые виды широколиственных лесов, в том числе *Aegopodium podagraria* L., *Asarum europaeum* L., *Carex pilosa* Scop., *C. digitata* L., *Galeobdolon luteum* L., *Poa nemoralis* L., *Stellaria holostea* L.; весной желтый аспект создает *Anemonoides ranunculoides* L.. Проективное покрытие травяного яруса – 15–60%. Здесь отмечен вид из мониторингового списка Красной книги Брянской области – *Matteuccia struthiopteris* (L.) Tod., который активно разрастается и используется в озеленении на территории парка.

Пониженную часть парка, прилегающую к оконечности пруда, занимают гигро-гелофитные черноольховые с липой леса. Здесь помимо значительного участия широколиственнолесных видов возрастает обилие гело- и гигрофильных видов растений, на отдельных участках доминируют в травостое *Impatiens noli-tangere* L. и *Urtica dioica* L. s. l.

В окрестностях усадьбы в кленово-липовых насаждениях у автотрассы Клинцы – Сураж найдены невысокие (до 2 м в высоту) растения редкого для Брянской области вида клена – *Acer campestre* L. Происхождение растений здесь неизвестно. Этот вид в естественных местообитаниях встречается в Брянской области только в Севском и Суземском районах [1, 2, 9]. Возможна пересадка этого декоративного растения на территорию парка.

Рис. 4. Гигрофитный черноольшаник на территории парка.
В травостое преобладает *Impatiens noli-tangere*.

Флористические исследования на территории парка будут продолжены. В дальнейших планах развитие экологического и культурно-познавательного экскурсионного обслуживания гостей природно-архитектурного комплекса. На основании проведенных исследований планируется создание экологической тропы – маршрута, при прохождении которого посетители смогут ознакомиться с коллекцией деревьев и кустарников, произрастающих на территории парка. Планируется установка у декоративных деревьев и кустарников специальных табличек с QR-кодами, по которым каждый желающий при помощи мобильного устройства сможет получить полную информацию об интересующем его растении.

Список литературы

1. Босек П. З. Растения Брянской области: справочное пособие. Брянск, 1975. 464 с.
2. Булохов А. Д., Величикин Э. М. Определитель растений Юго-Западного Нечерноземья России (Брянская, Калужская, Смоленская области). Изд. 2-е, перераб. и доп. Брянск: Изд-во БГУ, 1998. 380 с.
3. Городков В. Н. По старинным аллеям. Тула: Приок. кн. изд-во, 1983. 141 с.
4. Городков В. Н. Очерки архитектуры Брянского края. Брянск: ЗАО «Издательство «Читай-город», 2006. 240 с.
5. Елисеенко Е. П. Роль усадебных парков в повышении биоразнообразия региона // Вестник Брянского гос. ун-та. 2015. № 2. С. 398–402.
6. Клинцовский портал [Электронный ресурс]. Режим доступа: *http://klintsy-portal.ru/?id_catalog=820*. Дата обращения: 15.11.2016.
7. Красная книга Брянской области. Растения. Грибы. Брянск: Изд-во «Читай-Город», 2004. 271 с.
8. Свод памятников архитектуры и монументального искусства России: Брянская область. М.: Наука, 1998. С. 326–330.
9. Семенищенков Ю. А. Распространение и эдификаторная роль некоторых древесных эдификаторных видов у границ ареалов в бассейне Верхнего Днепра / Всероссийская научная конференция с международным участием, посвященная 135-летию со дня рождения профессора В. Н. Хитрово «Актуальность идей В.Н. Хитрово в исследовании биоразнообразия России» и Круглый стол «Продукционный процесс растений и его

регуляция» в честь 110-летия со дня рождения профессора С.И. Ефремова». Сб. ст. Орел. 18–20 сентября 2014 г. Под ред. Пузиной Т. И. Орел, 2014. С. 106–109.

10. Цапенко М. П. Земля Брянская. М.: Искусство, 1972. 136 с.

11. Черепанов С. К. Сосудистые растения России и сопредельных стран. СПб.: Мир и семья, 1995. 992 с.

Сведения об авторах

Петренко А.М. – аспирант кафедры биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Полякова О. В. – председатель Федерации профсоюзов Брянской области.

Семенищенков Ю.А. – кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

Фейгина Ж. М. – директор ООО «Санаторий «Вьюнки».

TO THE RECONSTRUCTION OF THE PARK OF THE SAPOZHKOV'S VILLA (KLINTSOVSKY DISTRICT, BRYANSK REGION)

[1]A.M. Petrenko, [2]O.V. Polyakova, [1]Yu. A. Semenishchenkov, [3]Zh. M. Feigina

[1]Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

[2]Federations of Labor unions of the Bryansk region.

[3]Sanatory «Vyunki»

In the paper the list of dendroflora of estate park of nature-architecture complex «Sapozhkov's Villa» located in the Klintsovsky district, Bryansk region is done. Rare and need to protect introducted species noted, the roccomedations to the park protection and reconstruction are done. Researches realized by the iniciative of the Administration of sanatory «Vyunki» and Federations of Labor unions of the Bryansk region.

Keywords: *estate park, dendrofora, Sapozhkov's Villa, Vyunki, Klintsovsky district, Bryansk region.*

References

1. Bosek P. Z. Rasteniya Bryanskoy oblasti: spravochnoe posobie. Bryansk, 1975. 464 p.

2. Bulokhov A. D., Velichikin E. M. Opredelitel' rastenij Yugo-Zapadnogo Necher-nozem'ya Rossii (Bryanskaya, Kaluzhskaya, Smolenskaya oblasti). Izd. 2-e, pererab. i dop. Bryansk: Izd-vo BGU, 1998. – 380 p.

3. Gorodkov V. N. Po starinnym alleyam. Tula: Priok. kn. izd-vo, 1983. 141 p.

4. Gorodkov V. N. Ocherki arhitektury Bryanskogo kraya. – Bryansk: ZAO «Izdatel'-stvo «CHitay-gorod», 2006. 240 p.

5. Eliseenko E. P. Rol' usadebnyh parkov v povyshenii bioraznoobraziya regiona // Vestnik Bryanskogo gos. un-ta. 2015. № 2. P. 398–402.

6. Klintsovskiy portal [Electronic resource] / http://klintsy-portal.ru/?id_catalog=820. 15.11.2016.

7. Krasnaya kniga Bryanskoy oblasti. Rasteniya. Griby. Bryansk: Izd-vo «CHitay-Gorod», 2004. 271 p.

8. Svod pamyatnikov arhitektury i monumental'nogo iskusstva Rossii: Bryanskaya oblast'. M.: Nauka, 1998. P. 326–330.

9. Semenishchenkov Yu. A. Rasprostranenie i ehdifikatornaya rol' nekotoryh drevesnyh ehdifikatornyh vidov u granic arealov v bassejne Verhnego Dnepra / Vserossijskaya nauchnaya konferenciya s mezhdunarodnym uchastiem, posvyashchennaya 135-letiyu so dnya rozhde-niya professora V. N. Khitrovo «Aktual'nost' idej V. N. Khitrovo v issledovanii bio-raznoobraziya Rossii» i Kruglyj stol «Produkcionnyj process rastenij i ego regulya-ciya» v chest' 110-letiya so dnya rozhdeniya professora S. I. Efremova». Sb. st. Orel. 18–20 sentyabrya 2014 g. Pod red. Puzinoj T. I. Orel, 2014. P. 106–109.

10. Tsapenko M. P. Zemlya Bryanskaya. M.: Iskusstvo, 1972. 136 p.
11. Cherepanov S. K. Sosudistye rasteniya Rossii i sopredel'nyh stran. SPb.: Mir i sem'ya, 1995. 992 p.

About authors

Petrenko A.M. – Postgraduate Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, Dpt. of Biology.

Polyakova O. V. – the Chairman of Federation of trade unions of the Bryansk region.

Semenishchenkov Yu.A. – Ph.D. in Biology, Associate professor Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, Dpt. of Biology.

Feigin J. M. – Director of Sanatorium "Vyunki".

УДК 796.91

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗМА ДЕВУШЕК И ЮНОШЕЙ ПРИ ЗАНЯТИЯХ ВОЛЕЙБОЛОМ

Н.Ф. Рзаев, А.П. Синичкина, М.В. Рудин, Е.Н. Зайцева
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

В статье рассматриваются половые отличия волейболистов на примере кардиореспираторной системы как в покое, так и после предельно возможной физической нагрузки.
Ключевые слова: *кардиореспираторная система, девушки, юноши, волейбол, нагрузки.*

Введение. Проблема раскрытия функциональных возможностей человека при выполнении физической работы разного характера является одной из актуальных в физиологии. Изучение этой проблемы необходимо как для дальнейшего выявления закономерностей адаптации, так и для практических целей, связанных с обоснованием эффективных режимов двигательной занятости человека [3].

Особое значение это имеет для возрастной физиологии, так как знание особенностей адаптации растущего организма к физическим нагрузкам дает возможность оптимально организовать физическое воспитание подрастающего поколения [2].

Актуальность проблемы адаптации растущего организма к физическим нагрузкам определяется еще и тем обстоятельством, что нередко в практику физического воспитания переносятся принципы использования физических нагрузок, принятые в спорте. Тенденция к применению нагрузок большой мощности, интенсивности и продолжительности характерна в настоящее время для подготовки не только взрослых, но и юных спортсменов. Между тем, данные, накопленные спортивной физиологией, свидетельствуют о том, что на разных этапах онтогенеза диапазон адаптации физиологических функций различен [4]. Поэтому объективное определение функциональных возможностей организма при мышечной деятельности, обоснование интенсивности и продолжительности нагрузок, вызывающих напряжение функций в физиологически допустимых пределах, приобретает важное научно-практическое значение [1].

Методика исследования. Исследование половых различий волейболистов производилось на основании функциональных проб кардиореспираторной системы: частота пульса, ударный объем, минутный объем кровотока, сердечный индекс, артериальное давление, жизненная емкость легких, частота дыхания.

Результаты и обсуждение. Результаты исследования показывают, что повышенные физические нагрузки стимулируют повышение соматических параметров. Факторы внешней среды (в данном случае мышечная работа) способствуют более полной реализации генетической программы. Анализируя показатель прироста длины тела у девушек и юношей занимающихся спортом показывает, что сравнительно большие физические нагрузки у девушек волейболисток не являются запредельными, а, напротив, усиливают ростовые процессы в организме. И если у юношей прирост длины тела составил 1,3 см, то у девушек 2,1 см. При этом поверхность тела увеличилась на одну и ту же величину 0,02 м кв.

У девушек волейболисток найденный показатель ЖЕЛ на 2 % превышал должную величину, в то время как у юношей, занимающихся спортом, его величина приблизилась к должным значениям, но не превысила эту величину. Данный факт лишний раз свидетельствует в пользу того, что у девушек тренировочный процесс оказался более напряженным. Следует отметить, что вышеуказанные отклонения ЖЕЛ в % от ДЖЕЛ у обследованных находятся в пределах допустимых колебаний, указанных в литературе.

Таким образом, выявлены межгрупповые особенности по показателям дыхания: у спортсменов в покое ниже частота дыхания, выше величина дыхательного объема и отсутствуют различия по величине МОД в своей совокупности, это отражает более экономичную работу дыхательной системы у юношей, занимающихся спортом. После предельной мышечной работы показатели изменяются таким образом, что указывают на усиление резервных возможностей системы дыхания у спортсменов по сравнению с не занимающимися спортом. Ярким доказательством этого служит рост величины дыхательного объема при снижении показателя частоты дыхания по сравнению со здоровыми юношами, не занимающимися спортом.

Регулярная физическая нагрузка вызывает положительные сдвиги в работе сердечно-сосудистой системы. Главным показателем ее работы выступает величина частоты сердечных сокращений. По нашим данным у юношей, занимающихся спортом, пульс в покое достоверно ниже (65,0±1,87 уд. / мин.) по сравнению с лицами, не занимающимися спортом (73,5±1,76 уд. / мин.). Однако, как показали измерения частоты пульса, после предельной мышечной работы функциональный резерв у спортсменов значительно выше. Об этом красноречиво говорят полученные величины ЧСС в обеих группах. Так, у спортсменов величина ЧСС оказалась выше и составила 190,5±6,12 уд. / мин, а у не занимающихся спортом 174,5±4,75 уд. / мин. Полученные величины свидетельствуют о максимально возможных величинах сердечной мышцы по величине частоты сокращений, а сравнительно низкая величина ЧСС у не занимающихся отражает более низкую величину резерва. Следует указать, что и время предельной физической работы у не спортсменов было ниже на 44 секунды.

Регулярные занятия спортом положительно сказываются на обеспечении кровью всех органов и систем организма, о чем красноречиво свидетельствует величина показателя сердечного индекса. По данным исследования у спортсменов его величина равняется 2,95±0,17 мл/мин м кв., что на 6% больше по сравнению с не занимающимися спортом – 2,81±0,10 мл/мин м кв. Выше остается этот показатель и после физической нагрузки и составляет 8,42±0,53 мл/мин м кв. и 7,64±0,64 мл/мин м кв. соответственно. Показатель систолического давления у спортсменов оказался достоверно ниже по сравнению с не спортсменами и составил 110,5±1,29 мм рт. ст., а у не занимающихся спортом – 118,9±1,42 мм рт. ст. После физической нагрузки в обеих группах наблюдался пропорциональный прирост величины систолического артериального давления до 152,1±2,62 мм рт. ст. у спортсменов и до 163,2±3,27 мм рт. ст. у не занимающихся спортом. Сравнительно низкие значения у юношей, занимающихся спортом, скорее всего, указывают на прекращение нагрузки еще до полного объективного утомления, тогда как в группе не спортсменов нагрузка была предельной. Это возможно потому, что организм спортсменов чаще в процессе тренировок сталкивался с предельными нагрузками и в данном случае при работе на велоэргометре возникало охранительное торможение в организме, что проявлялось отказом от работы. Существенных различий по величине диастолического давление в обеих группах не получено, как в покое, так и после максимальной физической нагрузки. Уровень этих изменений укладывается в нормативные показатели.

Таким образом, в функциональном состоянии сердечно-сосудистой системы между юношами, занимающимися и не занимающимися спортом выявлены особенности: у спортсменов в покое реже частота пульса, что отражает брадитропный характер регуляции. Известно, что преобладание в регуляции сердца парасимпатической системы трофотропно сказывается на его работе в целом. У не занимающихся спортом сердце работает менее экономично как в покое, так и после физической нагрузки. Установлены различия по величине систолического давления между представителями двух групп, причем достоверные различия имеют место, как в покое, так и после мышечной работы.

Вышеизложенные результаты сравнительного анализа состояния ССС у девушек и юношей с разной двигательной активностью выявили более напряженную деятельность этой системы как в покое, так и после предельно возможной физической нагрузки у не занимающихся спортом, у спортсменов в этих же условиях кардиогемодинамика, наоборот, функционирует экономичнее.

Выводы:

1. Выявлено, что между юношами и девушками одного возраста существуют достоверные различия по показателям длины тела, массы и поверхности тела. У юношей изученные показатели выше по сравнению с девушками.

2. Показано, что регулярные занятия спортом приводят к повышению средних значений, изученных соматометрических показателей юношей и девушек 19-летнего возраста.

3. Установлено, что между юношами и девушками одной возрастной группы существуют различия по показателям дыхательной и сердечно-сосудистой систем, по подавляющему большинству показателей. Однако различия не достигают достоверно значимого уровня.

4. Показано, что большим функциональным резервом обладают дыхательная и сердечно-сосудистая системы у юношей и девушек регулярно занимающимися спортом, о чем свидетельствуют полученные величины после предельно выполняемой физической нагрузки.

5. Установлено, что наиболее чувствительными показателями являются ДО, ЖЕЛ из дыхательной и ЧСС и СИ из сердечно-сосудистой системы.

Список литературы

1. Арнис В.Р. Развитие мощности работы у человека при тренировке силы // Физиология человека. 1994. Т. 20. №. 2. С. 80- 86.
2. Беляев Н.А. Экспериментальное исследование специальной выносливости волейболистов. // Проблемы здоровья и физического совершенствования подрастающего поколения. М., 1999. с. 67-70.
3. Белоцерковский З.Б. Возрастные особенности развития сердечно-сосудистой системы у детей 9-16 лет // Новые исследования по возрастной физиологии. М., 2000. № 1 (26). С.21-25.
4. Волков Л.В. Физические способности детей и подростков. Киев: здоровья, 2001. 117 с.

Сведения об авторах

Рзаев Н. Ф. – студент факультета физической культуры Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: fizvoss@bk.ru

Синичкина А.П. – студентка факультета физической культуры Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: fizvoss@bk.ru

Рудин М.В. – кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой теории и методики физической культуры и спорта Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: fizvoss@bk.ru

Зайцева Е.Н. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: kafzoo_bgu@mail.ru.

FUNCTIONAL FEATURES OF ORGANISM OF BOYS AND GIRLS WHEN PLAYING VOLLEYBALL

N.F. Rzayev, A.P. Sinichkina, M.V. Rudin, E.N. Zaitseva
Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky

The article discusses gender differences volleyball at the example of the cardiorespiratory system at rest and after maximum possible exercise.

Keywords: *cardiorespiratory system, girls, boys, volleyball, loading.*

References

1. Arnis V. R. Development of work capacity in humans, with the power training // Human physiology. 1994. T. 20. no. 2. P. 80 - 86.
2. Belyaev N.A. Experimental study of the special endurance of volleyball players. // Problems of health and physical improvement of the younger generation. M., 1999. P. 67-70.
3. Belotserkovsky Z. B. Age-related features of cardiovascular system in children 9-16 years old // New researches on age physiology. M., 2000. No. 1 (26). P. 21-25.
4. Volkov L. V. Physical abilities of children and adolescents. Kiev: health, 2001. 117 p.

About authors

Rzayev N. F. – student of the faculty of physical education of the Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky, e-mail: fizvoss@bk.ru

Sinichkina A. P. – student of the faculty of physical education Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky, e-mail: fizvoss@bk.ru

Rudin Maxim Vladimirovich – candidate of pedagogical sciences, head of Department of theory and methodology of physical culture and sport of the Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky, e-mail: fizvoss@bk.ru.

Zaitseva E.N. – Undergraduate Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: kafzoo_bgu@mail.ru.

УДК 581.2

ПРОВЕДЕНИЕ ISSR-PCR ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ФИЛОГЕНЕТИЧЕСКОГО СХОДСТВА ВОЗБУДИТЕЛЕЙ АНТРАКНОЗА ЛЮПИНА

М.С. Селезнева, Р.Б. Ахмедов
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Была проведена ISSR-PCR ДНК полученных изолятов грибов с четырьмя ISSR-праймерами (IS3, IS6, UBS810, B4). Составлены генетические формулы образцов Colletotrichum lupine по четырем ISSR-праймерам и матрица генетического сходства полученных изолятов.
Ключевые слова: *антракноз люпина, ISSR-PCR, анализ межмикросателлитных последовательностей, полимеразная цепная реакция, Colletotrichum lupine.*

Введение. Люпин – важная сельскохозяйственная культура, обогащенная большим количеством белка. Он похож на соевый белок, но, по сравнению с другими бобовыми растениями, богаче по аминокислотному составу. Поэтому люпин используется в качестве корма для КРС. Но в настоящее время из-за массового распространения антракноза все люпиносеяние находится в критическом состоянии. В России штаммы грибов – возбудителей антракноза на люпине недостаточно охарактеризованы. Методы молекулярно-генетического анализа этого патогена в странах СНГ не применялись. Разные исследователи относили его к разным видам и даже родам.

В связи с этим целью нашего исследования являлось выявление особенностей и молекулярно-генетическая идентификация таксономического положения изолятов возбудителя антракноза люпина, выделенных в Брянской области. А также проведение ISSR-PCR для установления филогенетического сходства возбудителей антракноза люпина.

Методика исследования. Образцы люпина узколистного, пораженного антракнозом, были отобраны на полях в селекционных питомниках ВНИИ люпина для изучения его возбудителей и проведения дальнейших анализов, а также переданы из Беларуси.

Было проведено культивирование гриба in vitro: споры из пораженных растений люпина высевали петлей на среду Чапека для получения чистых культур патогенов способом посева штрихом.

Для детального микроскопического исследования спорулирующих структур и расположения спор у грибов рода коллетотрихум использовали культуру на предметном стекле, выращенную во влажной камере.

Проведение ISSR-PCR для установления филогенетического сходства возбудителей данных сортообразцов антракноза люпина

Для анализа использовали четыре ISSR-праймера. Характеристика использованных ISSR-праймеров представлена в таблице 1 [1, 2].

Таблица 1

Характеристика использованных ISSR-праймеров

Название	Нуклеотидная последовательность	Обозначение	Температура отжига
B4	$(CA)_6GG$	A	50
IS3	$(GA)_8C$	B	54
IS6	$(AG)_8(Y)T$	C	54
UBC810	$(GA)_8T$	D	54

Амплификацию проводили в многоканальном программируемом термостате «Терцик» компании «ДНК-Технология». Для анализа использовали усовершенствованную

Taq ДНК-полимеразу Dream™ компании «Fermentas». Состав ПЦР-смеси представлен в таблице 2. Температурный режим ПЦР представлен в таблице 3.

Таблица 2

Состав ПЦР-смеси на одну реакцию (общий объем 20 мкл)

№ п/п	Компонент	Объем, мкл
1	Вода деионизированная	10,8 мкл
2	10X буфер DreamTaq™ Green	2 мкл
3	dNTP Mix (2 mM/ml)	2 мкл
4	ISSR-праймер (50 пмоль/мкл)	1 мкл
5	Taq ДНК-полимеразу Dream™ (5000 u/ml)	0,2 мкл
6	Геномная ДНК	4 мкл

Таблица 3

Температурный режим ПЦР

№ п/п	Этап	Температура, °C	Время, сек	Количество циклов
1	Первичная денатурация	94	240	
2	Денатурация	94	35	37
3	Отжиг	50-54	30	37
4	Элонгация	72	120	37
5	Финальный синтез	72	240	

Электрофоретическое разделение продуктов ISSR-PCR проводили в ходе горизонтального электрофореза в 2% агарозном геле следующего состава:

1) 2 г агарозы;

2) 100 мл однократного TBE-буфера;

3) 10 мкл 1000-кратного интеркалирующего флуоресцентного красителя бромистого этидия.

Условия проведения электрофореза: 120В, 2 часа.

ISSR-анализ моноспоровых культур

В ходе исследования были выбраны четыре ISSR-праймера (B4, IS3, IS6, UBS810) для проведения молекулярно-генетического анализа. Данные праймеры могут применяться для установления уровня генетического полиморфизма Colletotrichum acutatum и паспортизации сортов люпина. После ПЦР проводилось электрофоретическое разделение продуктов реакции (5 мкл) в камере горизонтально электрофореза (рис. 1).

В последующем данные профили использовали для определения длин полиморфных фрагментов, что необходимо для проведения филогенетического анализа. На основе полученных электрофоретических профилей были составлены генетические формулы изучаемых изолятов (табл. 4).

Анализ электрофоретических профилей

Анализ полученных электрофоретических профилей (см. рис. 1) проводился с целью получения представлений о сходстве генетических структур изучаемых изолятов. Определение длины полиморфных фрагментов проводили с использованием программного обеспечения Image Lab компании «Bio-Rad».

Для выявления сходства рассматриваемых культур C.lupine использовали коэффициент Сёренсена-Чекановского:

$$K = \frac{2c}{a + b}$$

где a – число полиморфных фрагментов одного образца; b – число полиморфных фрагментов другого образца; c – число общих фрагментов для обоих образцов. Пределы коэффициента – от 0 до 1 [3;4].

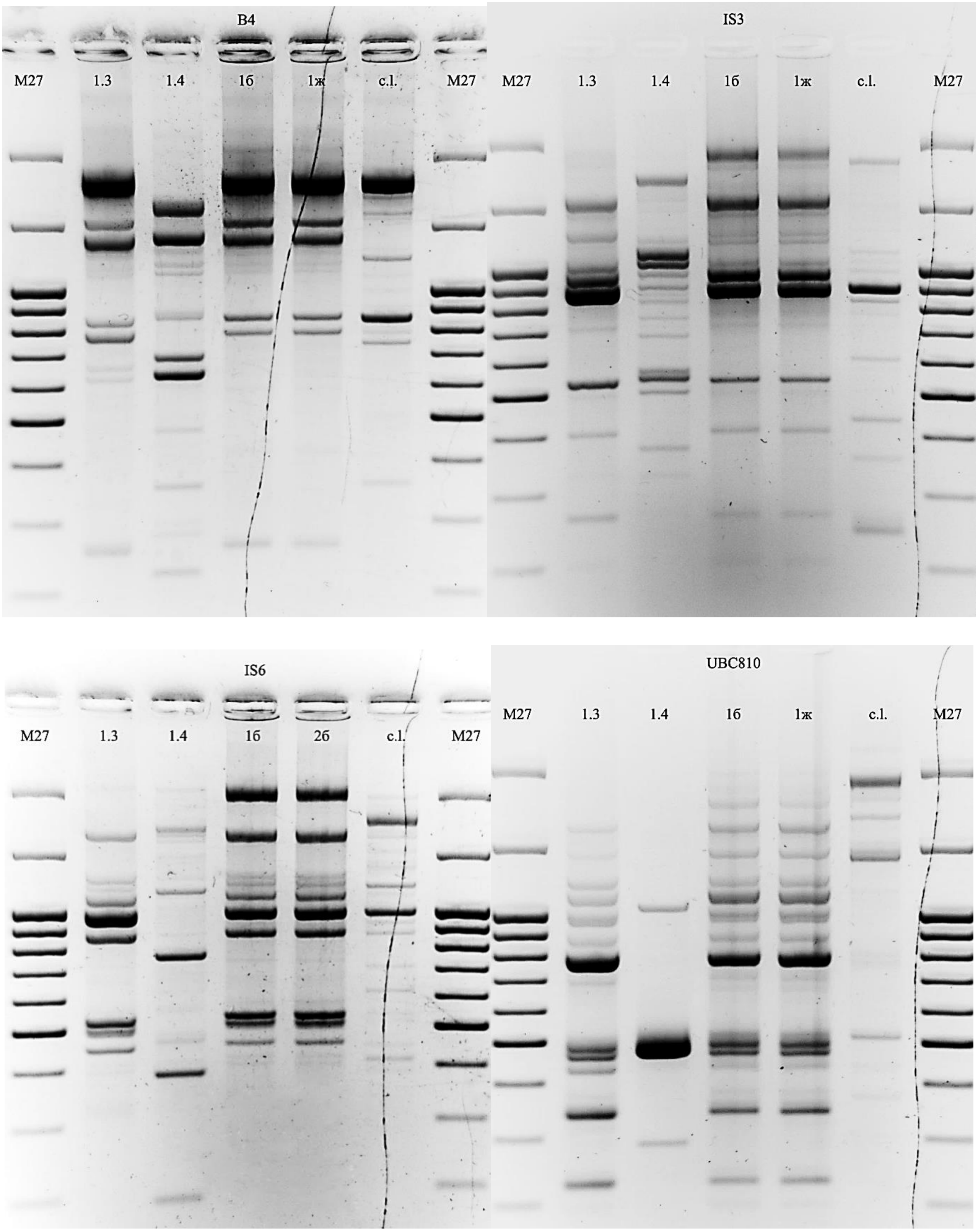


Рис. 1. Электрофорез продуктов ISSR-PCR выросших колоний грибов с четырьмя ISSR-праймерами (B4, IS3, IS6, UBS810)

Таблица 4

Генетические формулы образцов *Colletotrichum lupine* по четырем ISSR-праймерам

Наименование образца	Генетическая формула
Colletotrichum lupine (C.l.), выделенный из люпина узк. 1.3 (1.3у)	A_{260} A_{630} A_{660} A_{797} A_{867} A_{1378} A_{1570} A_{2250} B_{273} B_{420} B_{555} B_{905} B_{990} B_{1070} B_{1300} B_{1600} C_{465} C_{525} C_{545} C_{890} C_{1010} C_{1130} C_{1180} C_{1240} C_{1300} C_{1850} D_{240} D_{355} D_{455} D_{488} D_{510} D_{800} D_{910} D_{1020} D_{1140} D_{1250} D_{1465} D_{1850}
C.l., выделенный из люпина узк. 1.4 (1.4у)	A_{230} A_{280} A_{360} A_{480} A_{630} A_{695} A_{867} A_{1140} A_{1220} A_{1378} A_{1750} B_{380} B_{520} B_{555} B_{580} B_{700} B_{780} B_{855} B_{930} B_{1020} B_{1070} B_{1150} B_{2050} C_{200} C_{395} C_{478} C_{773} C_{1180} C_{2020} D_{300} D_{488} D_{1085}
C.l., выделенный из люпина белого (1б)	A_{260} A_{797} A_{867} A_{1378} A_{1570} A_{2250} B_{273} B_{420} B_{555} B_{905} B_{990} B_{1070} B_{1240} B_{1300} B_{1600} B_{2700} C_{465} C_{525} C_{545} C_{890} C_{1010} C_{1130} C_{1240} C_{1300} C_{1850} C_{3000} D_{240} D_{355} D_{455} D_{488} D_{510} D_{800} D_{910} D_{1020} D_{1140} D_{1250} D_{1465} D_{1850} D_{2330}
C.l., выделенный из люпина желтого (1ж)	A_{260} A_{797} A_{867} A_{1378} A_{1570} A_{2250} B_{273} B_{420} B_{555} B_{905} B_{990} B_{1070} B_{1240} B_{1300} B_{1600} B_{2700} C_{465} C_{525} C_{545} C_{890} C_{1010} C_{1130} C_{1240} C_{1300} C_{1850} C_{3000} D_{240} D_{355} D_{455} D_{488} D_{510} D_{800} D_{910} D_{1020} D_{1140} D_{1250} D_{1465} D_{1850} D_{2330}
Colletotrichum lupine (C.l.) – белорусский штамм	A_{360} A_{750} A_{797} A_{867} A_{1220} A_{1750} A_{2250} B_{250} B_{360} B_{445} B_{610} B_{855} B_{905} B_{1020} B_{1150} B_{2550} C_{420} C_{628} C_{730} C_{890} C_{1010} C_{1240} C_{2240} D_{380} D_{540} D_{1465} D_{2070} D_{2770}

На основе составленных генетических формул были рассчитаны коэффициенты сходства, приведенные в таблице 5.

Таблица 5

Матрица генетического сходства полученных изолятов

	1.3у	**1.4у**	**1б**	**1ж**	**c.l.**
1.3у	1	0,173913	0,921053	0,921053	0,242424
1.4у	0,173913	1	0,140845	0,140845	0,229508
1б	0,921053	0,140845	1	1	0,235294
1ж	0,921053	0,140845	1	1	0,235294
c.l.	0,242424	0,229508	0,235294	0,235294	1

По данным ISSR-праймерам установлен уровень внутривидового молекулярно-генетического разнообразия четырех сортообразцов люпина. Из матрицы генетического сходства полученных изолятов (табл. 5) можно сделать вывод, что изоляты возбудители антракноза люпина узколистного (1.3у), люпина белого (1б) и люпина желтого (1ж) очень похожи и относятся к одному штамму. Изолят из узколистного люпина 1.4 и образец C. lupine из Белоруссии сильно отличаются от остальных изолятов и между собой и могут представлять собой различные штаммы возбудителя.

Выводы:

1. Была проведена ISSR-PCR ДНК полученных изолятов грибов с четырьмя ISSR-праймерами (IS3, IS6, UBS810, B4). Составлены генетические формулы образцов Colletotrichum lupine по четырем ISSR-праймерам и матрица генетического сходства полученных изолятов. Изоляты возбудителя антракноза люпина узколистного (1.3у), люпина белого (1б) и люпина желтого (1ж) очень похожи и относятся к одному штамму.
2. Изолят из узколистного люпина 1.4 и образец C. lupine из Белорусии сильно отличаются от остальных изолятов и между собой и могут представлять собой различные штаммы возбудителя.

Список литературы

1. Ахмедов Р.Б., Кондрацкая И.П., Нам И.Я., Заякин В.В. Молекулярно-генетический анализ межвидовых гибридов лисохвоста лугового (Alopecurus platensis L.) и

лисохвоста вздутого (Alopecurus ventricorus pers.) // Биотехнологические приемы в сохранении биоразнообразия и селекции растений: материалы международной научной конференции. Минск: ГНУ «Центральный ботанический сад Академии наук Беларуси», 2014. 277 с.

2. Ахмедов Р.Б., Нам И.Я., Заякин В.В. Молекулярно-генетический анализ сортов Alopecurus pratensis L. (*Poaceae*) // БИОЛОГИЯ – НАУКА XXI ВЕКА: 18-я Международная Пущинская школа-конференция молодых ученых (Пущино, 2014 г.). Сборник тезисов.

3. Лукашов В.В. Молекулярная эволюция и филогенетический анализ: учебное пособие. М.: БИНОМ, 2009. 256 с.

4. Павлинов И.Я. Введение в современную филогенетику (кладогенетический аспект). М.: КМК, 2005. 51 с.

Сведения об авторах

Селезнева М. С. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: meris_2104@mail.ru.

Ахмедов Р. Б. – аспирант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: roma.akhmedov.91@mail.ru.

THE HOLDING OF ISSR-PCR TO ESTABLISH THE PHYLOGENETIC SIMILARITIES OF THE CAUSATIVE AGENTS OF ANTHRACNOSE OF LUPIN

M.S. Selezneva, R.B. Akhmedov
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

Was conducted by ISSR-PCR DNA obtained isolates of fungi with the four ISSR-primers (IS3, IS6, UBS810, B4). Compiled genetic formula samples Colletotrichum lupine on the four ISSR-primers and the matrix of genetic similarity of the isolates obtained.
Keywords: *Anthracnose of Lupin, ISSR-PCR , analysis MagicRotation sequences , polymerase chain reaction, Colletotrichum lupine.*

References

1. Akhmedov R.B., Kondratska I.P., Nam I.J., Zayakin V.V. Molecular genetic analysis of interspecific hybrids meadow foxtail (Alopecurus Platensis L.) and foxtail bloated (Alopecurus ventricorus pers.) // Biotechnological techniques in biodiversity conservation and plant breeding: materials of the international scientific conference. Minsk: SSI "Central Botanical Garden of the Academy of Sciences of Belarus", 2014. 277 p.

2. Akhmedov R.B., Nam I.J., Zayakin V.V. Molecular genetic analysis of the varieties of Alopecurus pratensis L. (Roaceae) // Biology - Science of XXI Century: 18th International Pushchino School-Conference for Young Scientists (Pushchino, 2014). Abstracts.

3. Loukashov V.V. Molecular evolution and phylogenetic analysis: a tutorial. M:. Binom, 2009. 256 p.

4. Pavlinov I.Y. Introduction to Modern phylogenetics. M:. KMK, 2005. 51 p.

About authors

Selezneva M.S. – Undergraduate of Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: meris_2104@mail.ru.

Akhmedov R.B. – Postgraduate of Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: roma.akhmedov.91@mail.ru.

УДК 581.2

МОЛЕКУЛЯРНО-ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЗБУДИТЕЛЕЙ АНТРАКНОЗА ЖЕЛТОГО И БЕЛОГО ЛЮПИНА

В.С. Стёпкина, Р.Б. Ахмедов
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

С помощью молекулярно-генетического анализа внутренних межгенных спейсеров в кластерах рибосомальных генов было показано, что все анализируемые нами изоляты возбудителя антракноза из России могут быть отнесены к виду Colletotrichum lupine и кластеру (кладе) видов Colletotrichum acutatum, также как европейские и американские изоляты возбудителя антракноза люпина.
Ключевые слова: *антракноз люпина, молекулярно-генетический анализ, ITS-область, полимеразная цепная реакция, Colletotrichum lupine.*

Введение. Люпин – хорошая средоулучшающая и фитомелиоративная культура, которая способствует улучшению агрохимического, микробиологического и фитосанитарного состояния почвы [2]. Он в качестве корма очень полезен для Крс. Анализ современной литературы показал, что опасность антракноза заключена в особенностях жизненного цикла его возбудителя *Colletotrichum lupini*, способах передачи и сохранения инфекции [1]. В настоящее время из-за массового распространения антракноза все люпиносеяние находится в критическом состоянии. В России штаммы грибов – возбудителей антракноза на люпине недостаточно охарактеризованы. Методы молекулярно-генетического анализа этого патогена в странах СНГ не применялись. Разные исследователи относили его к разным видам и даже родам. В связи с этим целью нашего исследования являлось выявление особенностей и молекулярно-генетическая идентификация таксономического положения изолятов возбудителя антракноза люпина, выделенных в Брянской области.

Методика исследования. Для проведения исследований внутривидовой изменчивости у гриба C. lupine нами были использованы грибы из Брянской области, выделенные из антракнозных язв на бобах белого люпина (поля ВНИИ люпина 2013 год) и полученные из Беларуси (предоставлены д.б.н. Анохиной В. С. из коллекции Белорусского государственного университета).

Для культивирования грибов использовалась среда Чапека. Компоненты среды представлены в таблице 1.

Таблица 1

Состав среды Чапека.

Компоненты пит.среды	на 1 литр среды (%)	на 1 л среды (г/л)	на 200 мл среды (г)
Глюкоза	2,0	20	4
$NaNO_3$	0,2	2	0,4
KH_2PO_4	0,1	1	0,2
$MgSO_4$*$7H_2O$	0,05	0,5	0,1
KCI	0,05	0,5	0,1
$FeSO_4$* $7H_2O$	0,001	0,01	0,002
Агар-агар	1,5	15	3

На дно колбы насыпать агар и залить раствором солей. Колбу или бутылки поставить в автоклав на стерилизацию на 20 минут. После стерилизации, покачивая колбу, тщательно перемешать содержимое, иначе агар останется на дне, и застынет только нижний слой среды.

В боксе среду разлить по стерильным чашкам Петри или пробиркам. Проверить на бактериальное заражение, выдержав 3-4 дня при комнатной температуре. В дальнейшем лучше хранить в холодильнике, так как там среда меньше испаряется.

Посев грибов проводили методом моноспоровых культур.

Готовили суспензию спор на стерильном предметном стекле в стерильной воде путем погружения обожженной петли в спорулирующую культуру. Эту суспензию спор засевают сплошным газоном в чашки Петри на тонкую пластинку среды Чапека, и выдерживают при + 24 °С. Через 15-16 часов обычно наблюдают начало прорастания и готовность спор для выделения.

Для проведения полимеразной цепной реакции использовали рекомендуемые для микромицетов праймеры: ITS1, ITS4, CaInt2 и CgInt. Характеристика использованных праймеров представлена в таблице 2.

Таблица 2

Характеристика праймеров для идентификации грибов

Наименование	5’-3’-последовательность	Концентрация			Кол-во нуклеот.
		ОЕ/мл	пкмоль/мкл	мкг/мл	
ITS1	tcc-gta-ggt-gaa-cct-gcg-g	20,3	100	584	19
ITS4	tcc-tcc-gct-tat-tga-tat-gc	20,0	100	603	20
CaInt2	ggg-gaa-gcc-tct-cgc-gg	18,1	100	525	17
CgInt	ggc-ctc-ccg-cct-ccg-ggc-gg	18,7	100	607	20

Праймеры для проведения ПЦР синтезировали в ЗАО «Синтол» (Москва). Выбор праймеров для проведения анализа осуществляли по данным литературы.

Условия проведения ПЦР

Реакционная смесь объемом 20 мкл содержала следующие компоненты:

1. Дезоксинуклеотидтрифосфаты (dATP, dCTP, dTTP, dGTP), концентрация 0.5 mM – 2 мкл смеси
2. Taq ДНК-полимераза – из расчета 1 единица активности на пробу
3. ДНК – матрица – 100 нг
4. Смесь праймеров – по 10-20 пМ каждого праймера в объеме 20 мкл
5. Буфер 10×, например, содержащий для Taq-полимеразы следующие компоненты: 670 мМТрис-HCl pH 8.8, 160 мМ NaHSO4, 15 mM $MgCl_2$, 0,1% Tween-20 – 2 мкл
6. Автоклавированная дистиллированная вода – до объема 20 мкл

Проведение ISSR-PCR для установления филогенетического сходства возбудителей антракноза данных сортообразцов люпина.

Для анализа использовали четыре ISSR-праймера. Характеристика использованных ISSR-праймеров представлена в таблице 4 (Ахмедов и др., 2014).

Таблица 4

Характеристика использованных ISSR – праймеров

Название	Нуклеотидная последовательность	Обозначение	Температура отжига
B4	(CA)6GG	A	50
IS3	(GA)8C	B	54
IS6	(AG)8(Y)T	C	54
UBC810	(GA)8T	D	54

Амплификацию проводили в многоканальном программируемом термостате «Терцик» компании «ДНК-Технология». Для анализа использовали усовершенствованную Taq ДНК-полимеразу Dream™ компании «Fermentas». Состав ПЦР-смеси представлен в таблице 5. Температурный режим ПЦР представлен в таблице 3.

Таблица 5

Состав ПЦР – смеси на одну реакцию (общий объем 20 мкл)

№ п/п	Компонент	Объем, мкл
1	Вода деионизированная	10,8 мкл
2	10Х буфер DreamTaq™ Green	2 мкл
3	dNTPMix(2 mM/ml)	2 мкл
4	ISSR-праймер (50 пмоль/мкл)	1 мкл
5	Taq ДНК-полимеразу Dream™(5000 u/ml)	0,2 мкл
6	Геномная ДНК	4 мкл

Электрофоретическое разделение продуктов ISSR-PCR проводили в ходе горизонтального электрофореза в 2% агарозном геле следующего состава:

1)2 г агарозы;

2) 100 мл однократного ТВЕ-буфера;

3) 10 мкл 1000-кратного интеркалирующего флуоресцентного красителя бромистого этидия.

Условия проведения электрофореза: 120В, 2 часа.

Результаты и обсуждение.

В ходе исследования были получены четыре образца грибных моноспоровых культуры: две культуры из люпина белого и две из люпина желтого. Для культивирования грибов использовалась среда Чапека. Посев

Проведение ДНК – маркирования полученных моноспоровых культур для установления видовой принадлежности к Colletotrichum lupini.

Для проведения маркирования были получены образцы геномной ДНК из моноспоровых культур. Выделение ДНК проводили СТАВ-методом.

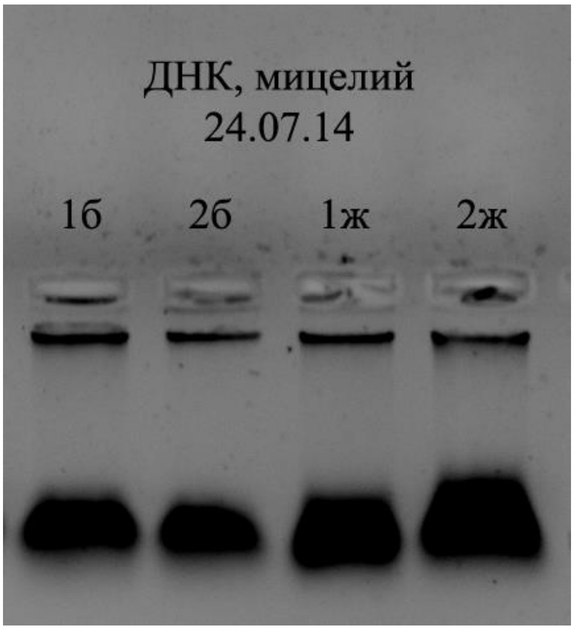


Рис.1. Электрофорез ДНК, выделенной из выросших колоний грибов

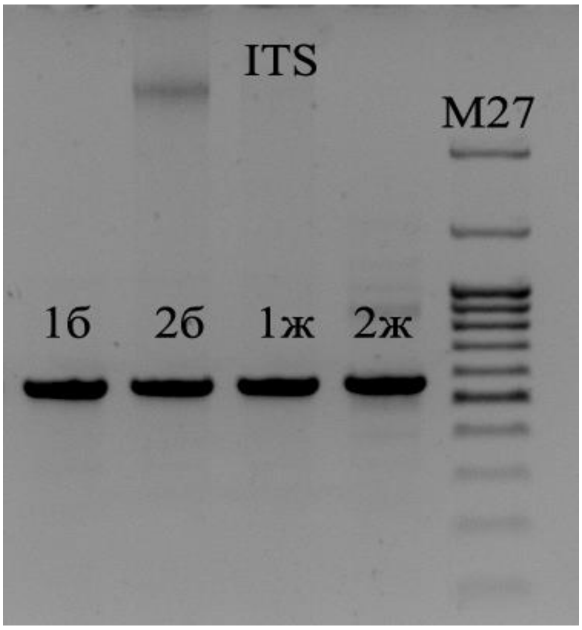


Рис. 2. Электрофорез продуктов ПЦР выросших колоний грибов на ITS-область с праймерами ITS1 и ITS4

Электрофоретическое исследование показало, что в ходе выделения были получены образцы геномной ДНК хорошего качества и достаточной концентрации для последующего ПЦР-анализа (рис. 1).

Для проверки пригодности растворов геномной ДНК для ПЦР-анализа, а так же для изучения их особенностей была проведена ПЦР с праймерами, специфичными участку ITS последовательности. Затем проводили электрофоретическое разделение продуктов амплификации в ходе горизонтального электрофореза (рис.2).

Из результатов электрофореза следует, что при анализе ДНК возбудителя антракноза с праймерами ITS1 и ITS4 с ДНК из всех образцов присутствуют полосы, соответствующие ампликонам ожидаемого размера. Специфичная амплификация наблюдалась во всех пробирках на ДНК-матрице всех исследуемых образцов. Это позволяет сделать вывод о том, что выделенную ДНК можно использовать для проведения молекулярно-генетических исследований.

Для определения принадлежности выросших колоний грибов к кластеру (кладе) видов C.acutatum или C.gloeosporioides был проведен молекулярно-генетический анализ на основе ПЦР с видоспецифичными праймерами к области межгенных спейсеров в кластерах генов рибосомальной РНК. Результаты электрофореза продуктов ПЦР представлены на рисунке 3.

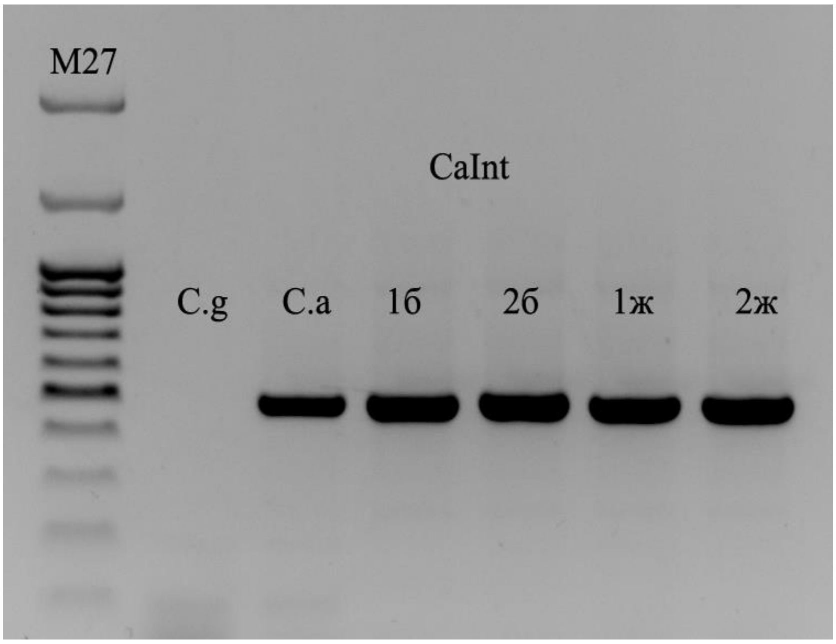


Рис. 3. Электрофорез продуктов ПЦР моноспоровых культур с праймерами на Colletotrichum acutatum.

При работе с праймерами на Colletotrichum acutatum (CaInt2 и ITS4) оказалось, что исследуемые образцы относятся к кластеру (кладе) видов C.acutatum.

Проведение ISSR – PCR полученных культур.

В ходе молекулярно-генетического исследования был проведен ISSR-PCR анализ образцов ДНК по четырем ISSR-праймерам: IS3, IS6, UBC810, B4. После ПЦР поводилось электрофоретическое разделение продуктов реакции в камере для горизонтального электрофореза (рис. 4).

В последующем данные профили использовали для определения длин полиморфных фрагментов, что необходимо для проведения филогенетического анализа, и сравнения генетического полиморфизма исследуемых изолятов.

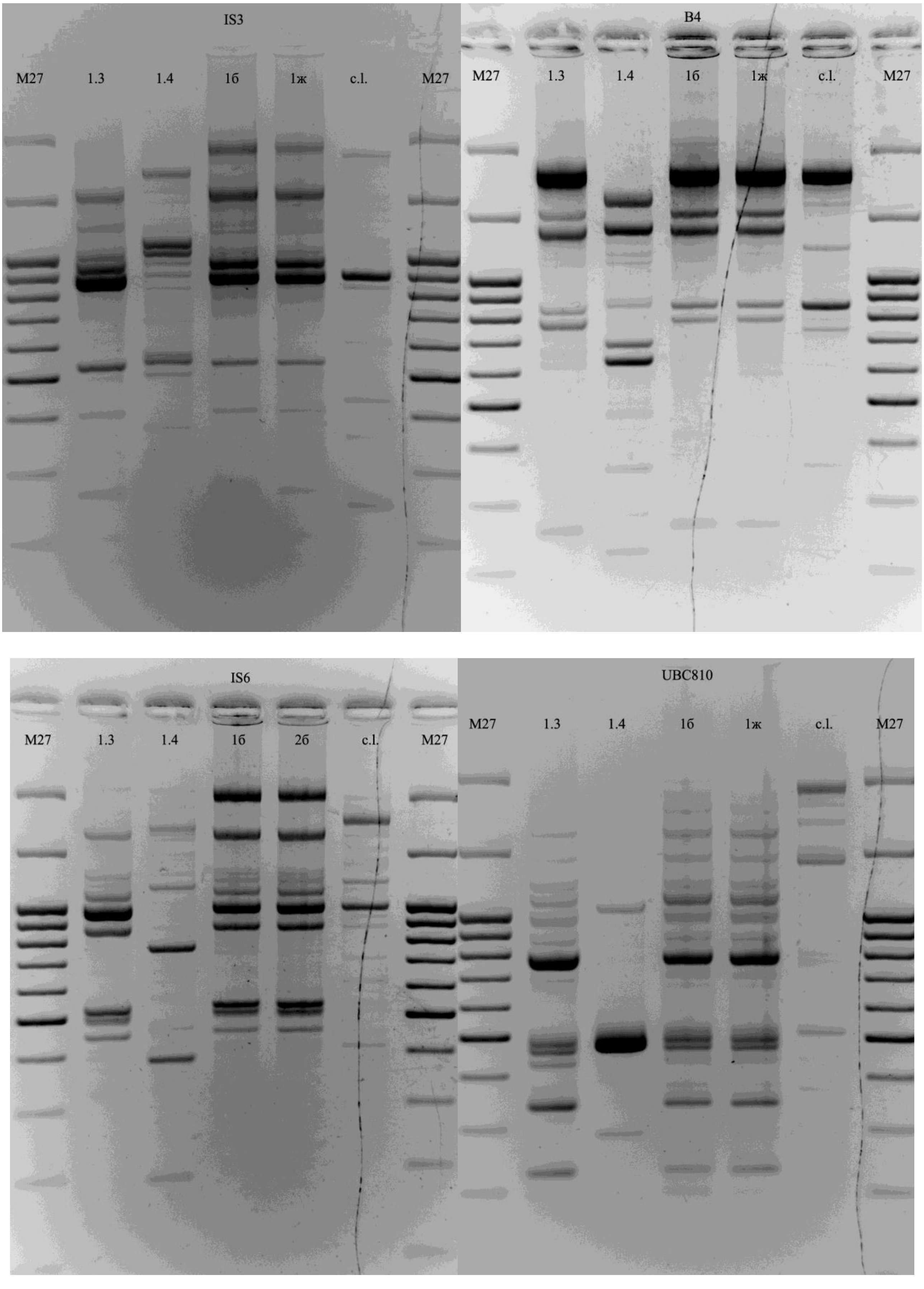


Рис. 4. Электрофорез продуктов ISSR-PCR выросших колоний грибов с четырьмя ISSR-праймерами (B4, IS3, IS6, UBS810)

На основе полученных электрофоретических профилей были составлены генетические формулы изолятов (таблица 7).

Таблица 7

Генетические формулы изолятов по четырем праймерам

Название образца	Общая формула полиморфных фрагментов полиморфных фрагментов
C.l., выделенный из люпина узколистного(1.3у)	A260 A630 A660 A797 A867 A1378 A1570 A2250 B273 B420 B555 B905 B990 B1070 B1300 B1600 C465 C525 C545 C890 C1010 C1130 C1240 C1300 C1850 D240 D355 D455 D488 D510 D800 D910D1020D1140D1250D1465D1850
C.l., выделенный из люпина узколистного (1.4у)	A230 A280 A360 A480 A630 A695 A867 A1140 A1220 A1378 A1750 B380 B520 B555 B580 B700 B780 B855 B930 B1020 B1070 B1150 B2050 C200 C395 C478 C773 C1180C2020 D300 D488 D1085
C.l., выделенный из люпина белого(1б)	A260 A797 A867 A1378 A1570 A2250 B273 B420 B555 B905 B990 B1070 B1240 B1300 B1600 B2700 C465 C525 C545 C890 C1010 C1130 C1240 C1300 C1850 C3000 D240 D355 D455 D488 D510 D800 D910 D1020 D1140 D1250 D1465 D1850 D2330
C.l., выделенный из люпина желтого(1ж)	A260 A797 A867 A1378 A1570 A2250 B273 B420 B555 B905 B990 B1070 B1240 B1300 B1600 B2700 C465 C525 C545 C890 C1010 C1130 C1240 C1300 C1850 C3000 D240 D355 D455 D488 D510 D800 D910 D1020 D1140 D1250 D1465 D1850 D2330
C.l.(белорусский штамм)	A360 A750 A797 A867 A1220 A1750 A2250 B250 B360 B445 B610 B855 B905 B1020 B1150 B2550 C420 C628 C730 C890 C1010 C1240 C2240 D380 D540 D1465 D2070 D2770

В ходе исследования были проверены четыре ISSR – праймера (IS3, IS6, UBS810, B4) для молекулярно генетического анализа. Данные праймеры могут применятся для установления уровня генетического полиморфизма и характеристики изолятов возбудителей антракноза люпина.

Анализ электрофоретических профилей

Анализ полученных электрофоретических профилей проводился с целью получения представлений о сходстве генетических структур изучаемых популяций. Определение длины полиморфных фрагментов проводили с использованием программного обеспечения ImageLab компании «Bio-Rad».

Для выявления сходства рассматриваемых культур C.lupini использовали коэффициент Сёренсена-Чекановского:

$$K = \frac{2c}{a+b}$$

где a– число полиморфных фрагментов одного образца; b– число полиморфных фрагментов другого образца; c – число общих фрагментов для обоих образцов. Пределы коэффициента – от 0 до 1.

На основе составленных генетических формул были рассчитаны коэффициенты сходства приведенные в таблице 8.

По данным таблицы видно, что изоляты из желтого и белого люпина имеют коэффициент сходства 1, то есть идентичны. Их сходство с изолятом 1.3у из узколистного люпина 0,92 тоже очень велико, вероятно они относятся к одному штамму. Изолят 1.4у из узколистного люпина сильно отличается от всех остальных изолятов и больше всего похож на образец полученный из Белоруси. Вероятно, изолят 1.4у может относится к другому штамму.

Таблица 8

Коэффициенты сходства.

	1.3у	1.4у	1б	1ж	c.l.
1.3у	1	0,173913	0,921053	0,921053	0,242424
1.4у	0,173913	1	0,140845	0,140845	0,229508
1б	0,921053	0,140845	1	1	0,235294
1ж	0,921053	0,140845	1	1	0,235294
c.l.	0,242424	0,229508	0,235294	0,235294	1

По данным ISSR-праймерам установлен уровень внутривидового молекулярно-генетического разнообразия пяти образцов Colletotrichum lupini из различных видов люпина. Полученные данные о геномном полиморфизме исследуемых образцов использованы для паспортизации и могут быть применены в дальнейшем селекционном процессе.

ПЦР – анализ растительного материала люпина желтого и белого для обнаружения C.lupini.

ПЦР-анализ семенного материала люпина.

Для проверки возможности проведения диагностики C.lupini в семенном материале было проведено выделение геномной ДНК из семян люпина белого и желтого и проведен ПЦР-анализ (рис. 5).

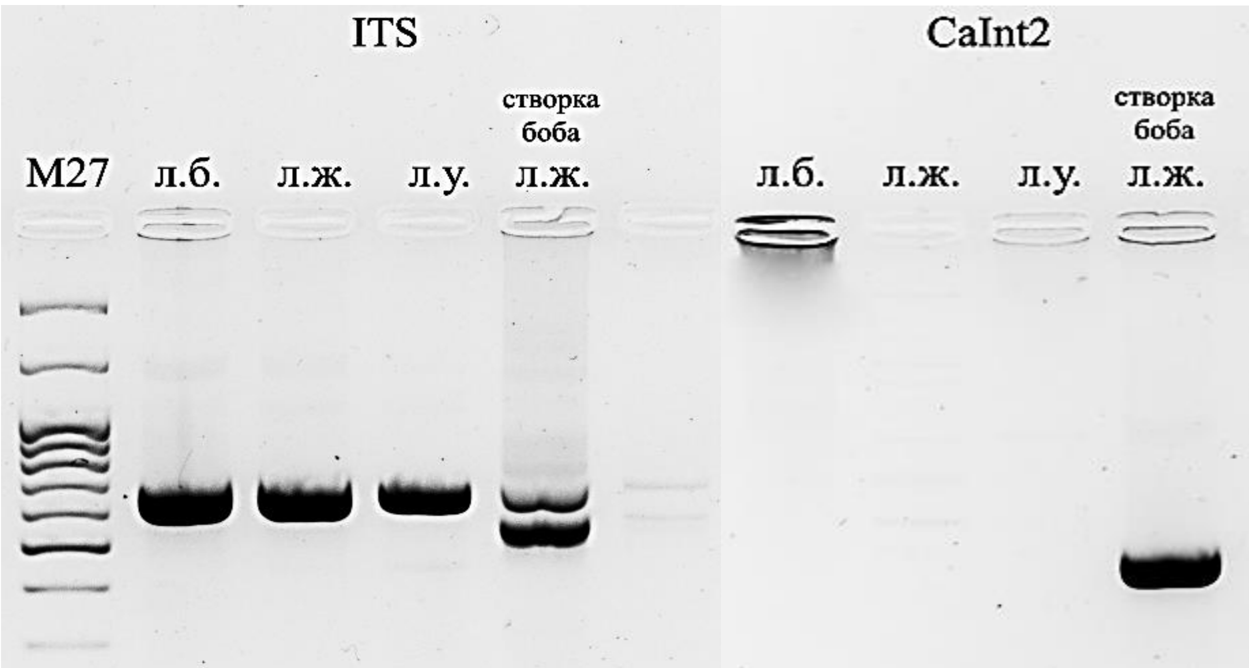


Рис. 5. Электрофорез продуктов ПЦР семян люпина с праймерами на ITS-область (ITS1, ITS4) и на Colletotrichum acutatum.

Видно, что возбудитель антракноза обнаруживается в створке пораженного боба, хотя проба материала для анализа отбиралась с участка створки без признаков заболевания.

В сухих семенах C.lupini не обнаружен. Вероятно, это связано с особенностями его жизненного цикла.

ПЦР-анализ инфицированных проростков люпина.

По морфологическим признакам из 6 проростков люпина узколистного, выращенных с использованием конидиальной взвеси Colletotrichum acutatum, 5 растений заражены антракнозом (рис.6). Из чего можно сделать вывод, что в полевых условиях здоровые растения могут поражаться антракнозом при поглощении воды, содержащей споры возбудителей антракноза.

Рис. 6. Проявление антракноза на шестидневных проростках после искусственного заражения. А) контроль; Б) пораженные антракнозом растения

Для точного определения зараженности выросших проростков люпина антракнозом была выделена ДНК и проведен молекулярно-генетический анализ на основе ПЦР с видоспецифичными праймерами к области межгенных спейсеров в кластерах генов рибосомальной РНК. Результаты электрофореза представлены на рисунках 7-8.

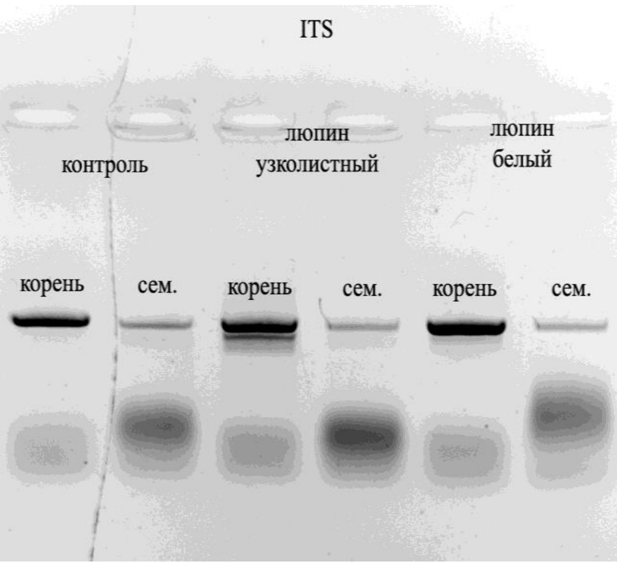


Рис. 7. Электрофорез продуктов ПЦР ДНК люпина на ITS-область

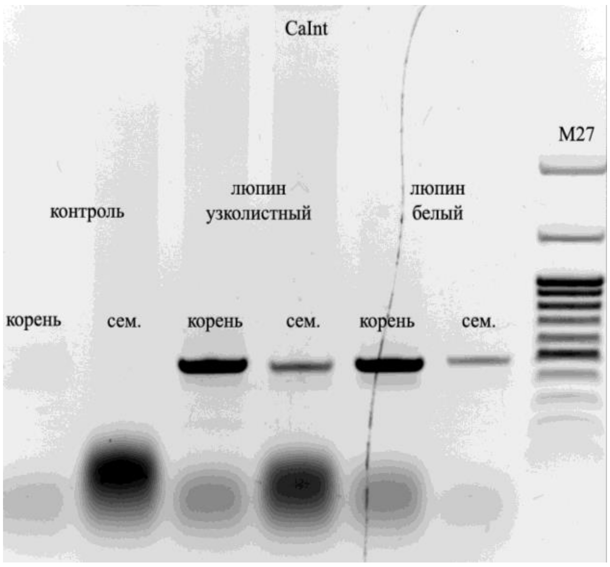


Рис. 8. Электрофорез продуктов ПЦР ДНК люпина с праймерами на Colletotrichum acutatum

Праймеры ITS1 и ITS4 амплифицируют участок определенной длины у всех изучаемых образцов. Амплификация наблюдалась во всех пробирках на ДНК-матрице всех исследуемых образцов. Это позволяет сделать вывод о том, что выделенную ДНК можно использовать для проведения молекулярно-генетических исследований.

Из результатов электрофореза следует, что люпин – контроль не поражен возбудителем антракноза C.acutatum, о чем говорит отсутствие специфических полос. Корни и семядоли зараженных растений содержат генетический материал C.acutatum, так как в дорожках на электрофореграмме присутствуют полосы различной интенсивности.

Список литературы

1. Купцов Н.С., Такунов И.П. Люпин – генетика, селекция, гетерогенные посевы. Брянск, Клинцы: Изд-во ГУП «Клинцовская городская типография», 2006. 576 с.

2. Таранухо Г.И. Состояние и перспективы люпиносеяния в Беларусии // Состояние и перспективы развития люпиносеяния в XXI веке. Брянск: РАСХН, ВНИИ люпина, 2001. С. 19-21.

Сведения об авторах

Степкина В.В. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: stepkina.varvara@yandex.ru.

Ахмедов Р. Б. – аспирант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: roma.akhmedov.91@mail.ru.

MOLECULAR GENETIC ANALYSIS OF THE CAUSATIVE AGENTS OF ANTHRACNOSE OF YELLOW AND WHITE LUPINE

V.V. Stepkina, R.B. Akhmedov

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

ITS-region of phytopathogenic fungi was investigated by PCR-analysis. There was demonstrated that all pathogen isolates from Russia belong to species colletotrichum lupine and clade colletotrichum acutatum as well as American and European isolates.

Keywords: *Antracnose of lupine, molecular-genetic analysis, ITS-region, PCR, Colletotrichum lupine.*

References

1. Merchants N.S. Takunov I. P. Lupin – genetics, breeding, heterogeneous crop. Bryansk, Klintsy: publishing house of the GUP "Klintsy city printing house", 2006. 576 p.

2. Taranuha G. I. Status and prospects of luminosity in Belarus // the State and prospects of development of luminosity in the twenty-first century. Bryansk: the RAAS, all-Russian research Institute of lupine, 2001. P. 19-21.

About authors

Stepkina V.V – Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: stepkina.varvara@yandex.ru.

Akhmedov R.B. – Postgraduate of Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: roma.akhmedov.91@mail.ru.

ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

УДК 591.4

МОРФОФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПОЧЕК ДОМАШНИХ ПТИЦ

М.Н. Салина, Е.Н. Зайцева, М.И. Ежикова, Е.В. Зайцева
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского

В статье рассматривается литературный обзор морфофизиологии почек домашних птиц и анатомические особенности данного органа. Произведен анализ современной научной литературы, позволяющий обобщить и систематизировать данные по строению сердца у сельскохозяйственных птиц.
Ключевые слова: *морфофизиология, птицеводство, анатомическое строение, мочевыделительная система птиц, почки птиц.*

Введение. Почки домашних птиц – достаточно крупные парные органы удлиненной формы, мягкой консистенции, у взрослой птицы красно-коричневого, у молодняка бледно-розового цвета, расположенные на внутренней поверхности задней брюшной стенки, в поясничной области, между поясничными мышцами и пристенным листком брюшины. Изучение морфологии выделительной системы позволяет не только раскрыть вопрос об особенностях возрастной морфологии, топографии развития данной системы у домашних птиц, но и до настоящего времени остается актуальным [9].

Методика исследования. Был проведен анализ современной научной литературы по вопросам особенностей морфологии мочевыделительной системы птиц. Были обобщены и систематизированы исследования современных авторов

Мочевыделительная система птиц состоит из двух почек и мочеточников, протоки которых отводят мочу и впадают в уродеум клоаки [3,9].

Важными морфологическими особенностями мочевыделительной системы у птиц являются: 1) мальпигиевый клубочек мало разветвлен; 2) нет извитых канальцев второго порядка, почечных сосочков; 3) нефроны расположены как в корковом, так и в мозговом слое; 4) почечная лоханка отсутствует; нет мочевого пузыря; 5) мочеточники начинаются в собирательных протоках и заканчиваются в клоаке [3].

Почки домашних птиц – достаточно крупные парные органы удлиненной формы, мягкой консистенции, у взрослой птицы красно-коричневого, у молодняка бледно-розового цвета, расположенные на внутренней поверхности задней брюшной стенки, в поясничной области, между поясничными мышцами и пристенным листком брюшины.

У курицы обе почки лежат на одном уровне от пятого грудного до двенадцатого пояснично-крестцового сегмента, а у гуся – от восьмого грудного до четырнадцатого пояснично-крестцового костного сегмента. Отделены почки друг от друга телами и вентральными гребнями поясничных и крестцовых позвонков. Краниально они достигают легких, каудально – прямой кишки. Вентральная поверхность почек бугристая, обращена к внутренностям, покрыта брюшиной и в значительной части брюшными воздухоносными мешками, которые образуют воздушную подушку, дорсальная поверхность почек гладкая [3,6,9].

За счет того, что у птиц, кроме почек, отсутствуют другие органы, выполняющие функцию выделения продуктов метаболизма, в организме происходит интенсивность выделительных процессов. В связи с этим почки у птиц имеют большую относительную величину. Например, у водоплавающих птиц почки относительно крупнее, чем у сухопутных птиц и масса обеих почек составляет примерно 1% живой [3,7].

Каждая почка делится на переднюю, среднюю и заднюю доли. Передняя доля лежит в пределах от пятого до третьего пояснично-крестцового сегмента, средняя – между третьим и девятым, а задняя – между девятым и двенадцатым сегментами [2,8]. Каждая из долей, покрытая снаружи соединительной капсулой и серозной оболочкой, в свою очередь состоит из корковых и мозговых зон, нечетко разграниченных между собой в сравнении с млекопитающими [9].

Корковая зона шире, состоит из нескольких участков, направлена к периферии, состоит из нефронов и выполняет мочеобразующую функцию. Мозговая зона более узкая, состоит из собирательных трубок, расположенных в центре органа. Ее функция – мочеотделительная. Конечные продукты собирательных трубочек проникают в корковое вещество почки. В центре корковой дольки имеется внутридольковая вена и концевые ветви почечных артерий [5].

Одной из главных составных частей почечной паренхимы являются почечные канальца, которые расположены в долях почки. Соединяясь друг с другом, почечные канальца образуют нефрон. Нефрон – структурная и функциональная единица почки. В почке содержится около миллиона нефронов. Это система прямых и извитых канальцев. Длина канальцев каждого нефрона различна, от 18 до 50 мм, а всех нефронов около 100 см [3].

В строении нефрона различают: капсулу почечного тельца или капсулу Шумлянского, проксимальные канальца, петлю нефрона или петлю Генле, состоящую из нисходящей и восходящей частей, извитой дистальный (вставочный) каналец, который переходит в собирательную трубочку [3]. Нефроны, расположенные в корковом веществе называются корковыми, они продуцируют гипотоническую мочу, а нефроны с длинными петлями, опускающимися в мозговое вещество, называются мозговыми, вырабатывают гипертоническую мочу.

Капсула Шумлянского имеет два листка, каждый из которых состоит из одного слоя клеток плоского эпителия. Между наружным и внутренним листками капсулы имеется щелевидная полость. Клетки внутреннего листка капсулы отросчатые, примыкают к эндотелию капилляров. Через поры в эндотелии и межклеточные щели в полость капсулы просачиваются составные части плазмы крови, образуя первичную мочу. Капсула Шумлянского тесно связана с капиллярами, образующими сосудистый клубочек. Эпителиальная стенка клубочка образована подоцитами. Подоцит состоит из крупного клеточного тела с ядром в основе его, содержит митохондрии, тельца Гольджи и другие включения [1]. Цитоплазма образует так называемые трабекулы – это длинные отростки, от них проходят педикулы – малые отростки, упирающиеся на базальную мембрану своим внешним концом [9].

Сосудистый клубочек и капсула Шумлянского образуют почечное тельце. Располагаются почечные тельца корковых и мозговых нефронов в разных частях доли. Почечные тельца корковых нефронов расположены в середине дольки, обычно ближе к междольковой вене. Почечные тельца мозговых нефронов, в свою очередь, лежат в верхушечной части корковой дольки у места слияния корковых собирательных протоков. За толстым отделом петли следует утолщенная вставочная часть, которая, извиваясь, снова возвращается к почечному тельцу, а потом переходит в тонкую, короткую и прямую связующую часть [3,4]. Почечные тельца птиц, в отличии от млекопитающих, имеют значительно меньшую величину, но зато они превосходят числом: в 1 мм3 коркового вещества у млекопитающих содержится 4 – 15 почечных телец, а у птиц от 90 до 500. Общее количество почечных телец у птиц следующее: курица массой 2,5кг – 0,3 млн., утка 5,7кг – 2 млн., гусь 5,4кг – 1,7 млн. В онтогенезе количество и размеры почечных телец увеличиваются [3].

В паренхиме почек проходят корни и ветви нервов пояснично-крестцового сплетения. Иннервация почек птиц принимают участие: соматические нервы, отходящие от спинного мозга в области поясницы и крестца, два нервных стволика, отходящих от надпочечного сплетения в области надпочечной железы; одиночные нервы, отходящие от узлов или межузловых ветвей симпатического ствола [9]. Крупные нервы, идущие к ногам, проходят между тазом и почками или даже через сами почки. Поэтому при поражениях почек, у птицы может развиться паралич ног [10].

Кровеносная система почки начинается почечной артерией, которая, входя в ворота почки, распадаются на более мелкие артерии – междолевые (терминальные).

У птиц каждая доля почек в отличие от млекопитающих, снабжена приносящей и отводящей почечными венами. Сплетение дугообразных лимфатических сосудов формирует сети – футляры по ходу междольковых артерий и вен, собирая лимфу от коркового и мозгового вещества почки [9].

По данным многих авторов почки птиц образуются не сразу в виде сформированного и функционирующего органа, а проходят три последовательных стадии развития и характеризуются последовательной сменой трех форм: образование предпочки, первичной почки, а затем дефинитивные (постоянные) или тазовые почки [7].

У млекопитающих окончательная почка образуется из метанефротического зачатка. Первые же две дают начало элементам структуры половой системы и, частично, мочевыводящих путей.

Предпочки у птиц являются рудиментарным образованием, они закладываются в области ножек первичных сегментов из так называемой нефрогенной ткани на уровне 5-15 пары передних сомитов. Предпочки из слепо заканчивающихся мочевых канальцев и нескольких «оголенных» клубочков. По прошествии некоторого времени предпочки рассасываются. Каудальнее предпочек закладываются первичные почки, которые развиваются из нефрогенной ткани на 13-30 пары сомитов. В нефрогенной ткани формируются мочевые канальцы, прилегающие к целомическому эпителию в виде непрерывных тяжей клеток. У куриных зародышей закладка первичных почек происходит к концу вторых суток инкубации. У гусиных и утиных зародышей закладка первичных почек происходит к концу третьих суток. На пятые – седьмые сутки эмбрионального развития первичная почка представляет собой вытянутый в длину парный орган, расположенный на поверхности аорты вдоль формирующегося позвоночника. Образование мочевых канальцев происходит путем впячивания пузырька с последующим уплощением клеток на одном его конце. Из уплощенных клеток образуется капсула, куда со стороны аорты, прилегающей к первичной почке, врастают капилляры, и образуется почечное тельце. Часть пузырька разрастается, вытягивается в длину, формируя мочевой каналец. Строма первичной почки на ранних стадиях развития состоит из нежной эмбриональной соединительной ткани. По мере взросления зародыша строма почки уплотняется. Появляются фибриллярные структуры.

Первичная почка сдавлена с боков и сужена в передней и задней частях, прилегает к сосудистой стенке (аорте) и легко от нее отделяется. Поверхность почки имеет гладкую структуру, блестящая, овальной формы.

Окружена первичная почка очень тонкой соединительнотканной оболочкой, состоящей из рыхлой, отчасти волокнистой ткани. Сквозь эту оболочку просвечивает паренхима почки [3].

Постоянная почка формируется при участии двух зачатков: метанефрогенная бластема, которая является производной нефротомов и вырост, отходящий от вольфова протока, который преобразуется в мочеточник. Отделившийся от вольфова протока мочеточник образует выросты, которые направляются в сторону формирующихся мочевых канальцев. В процессе развития эмбриона, сформированные мочевые канальцы соединяются с выростами, отходящими от мочеточника. Постоянная почка начинает функционировать у куриных эмбрионов на 16-17 сутки инкубации, у гусиных и утиных эмбрионов – на 22 – 23 сутки инкубации [8]. По окончании периода эмбрионального развития процессы формирования постоянной почки не заканчиваются. На ранних стадиях постэмбриональной жизни образуются новые почечные тельца [3].

Список литературы

1. Александровская О.В., Радостина Т.Н., Козлов Н.А. Цитология, гистология и эмбриология. М.: Агропромиздат. 1987. 448с.
2. Вракин В.Ф., Сидорова М.В. Анатомия и гистология домашней птицы. М.: Колос. 1984. 285 с.
3. Донкова Н.В. Закономерности возрастной дифференцировки нефронов у кур в постнатальном онтогенезе // Морфология сельскохозяйственных животных. Л., 1987. С. 21-26.
4. Иванов И.Ф., Ковальский П.А. Цитология, гистология и эмбриология. М.: Колос. 1976. 445 с.
5. Комаров А.В. Анатомическое вскрытие и изучение особенностей строения тела домашних птиц. Елгава: ЛСХА, 1981. 19 с.
6. Крок Г.С. Морфологические особенности сельскохозяйственных птиц в конце эмбриогенеза и в ранние периоды постэмбрионального онтогенеза // Закономерности индивидуального развития сельскохозяйственных животных. М., 1962. С.11-14.
7. Макрушин П.В., Демкин Г.П. Изменение веса и строение почек и связь их с живым весом и ростом цыплят // Сборник научных трудов Саратовского сельскохозяйственного института. 1976. Вып. 56. С. 83–89.
8. Селянский, В.М. Анатомия и физиология сельскохозяйственной птицы. М.: Колос. 1980. 280 с.
9. Харлан А.Л., Крикливый Н.Н., Тельцов Л.П. Критические периоды развития внутренних органов сельскохозяйственной птицы / Научные труды Южного филиала Национального университета биоресурсов и природопользования Украины Крымский агротехнологический университет. Серия: Ветеринарные науки. 2012. № 148. С. 52-58.
10. Яглов В.В. Основы гистологии. М.: МГАВМиБ им. Скрябина. 2001. С.30.

Сведения об авторах

Салина М.Н. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: masan4ik1@yandex.ru.

Зайцева Е.Н. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: kafzoo_bgu@mail.ru.

Ежикова М.И. – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: kafzoo_bgu@mail.ru.

Зайцева Елена Владмировна – доктор биологических наук, профессор кафедры биологии Брянского государственного университета И.Г. Петровского, e-mail: z_ev11@mail.ru

MORPHOLOGICAL AND PHYSIOLOGICAL FEATURES OF KIDNEYS IN DOMESTIC BIRDS

M.N. Salina, E.N. Zaitseva, M.I. Ezhikova, E.V. Zaitseva
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

The article discusses the literary review of morphophysiology kidney poultry and anatomic features of this organ. The analysis of the current scientific literature, allowing compiling and organizing data on heart structure in farm birds.

Keywords: *morphophysiology, poultry, the anatomical structure of the urinary system in birds, the kidneys of birds.*

References

1. Aleksandrovskaya O. V., Radostina T. N., Kozlov N.A. Cytology, histology and embryology. M.: Agropromizdat. 1987. 448 p.

2. Vraken V. F., Sidorova M. V. Anatomy and histology of poultry. Moscow: Kolos. 1984. 285 p.

3. Donkova N.A. In. Patterns of age differentiation of the nephrons from the hens in postnatal ontogeny // Morphology of farm animals. L., 1987. P. 21-26.

4. Ivanov I. F., Kowalski P. A. Cytology, histology and embryology. Moscow: Kolos. 1976. 445 p.

5. Komarov A. V. Anatomical dissection and study of the characteristics of body composition of poultry. Jelgava: LSHA, 1981. 19 p.

6. Krok G. S. Morphological characteristics of poultry at the end of embryogenesis and early postembryonic periods of ontogenesis // Regularities of individual development of agricultural animals. M., 1962. P. 11-14.

7. Makrushin P. V., Demkin, G. P. weight Change and the structure of the kidney and their relationship with live weight and growth of chickens // Collection of scientific works of the Saratov agricultural Institute. 1976. Vol. 56. P. 83-89.

8. Selyans'ka V. M. Anatomy and physiology of poultry. Moscow: Kolos. 1980. 280 p.

9. Kharlan A.L., Krikliviy N.N., Teltsov L.P. Critical periods in the development of the internal organs of poultry / Proceedings of the Southern Branch of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine Crimean Agriculture technology university. Series: Veterinary Science. 2012. № 148. S. 52-58.

10. Yaglov V. V. Fundamentals of histology. M.: Mgavmib them. Scriabin. 2001. P.30.

About authors

Salina M.N. – Undergraduate Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: masan4ik1@yandex.ru.

Zaitseva E.N. – Undergraduate Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: kafzoo_bgu@mail.ru.

Ezhikova M.I. – Undergraduate Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: kafzoo_bgu@mail.ru.

Zaytseva E.V. – Doctor of Biological sciences, professor of the Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: z_ev11@mail.ru

ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ В РЕЦЕНЗИРУЕМОМ ЭЛЕКТРОННОМ НАУЧНОМ ЖУРНАЛЕ «УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА» («УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ БГУ»)

Требования к содержанию статей.

В журнале «Ученые записки БГУ» публикуются статьи теоретического и прикладного характера, содержащие оригинальный материал исследований автора (соавторов), ранее нигде не опубликованный и не переданный в редакции других журналов. Материал исследований должен содержать научную новизну и/или иметь практическую значимость. К публикации принимаются только открытые материалы на русском, английском или немецком языках. Статьи обзорного, биографического характера, рецензии на научные монографии и т.п. пишутся, как правило, по заказу редколлегии журнала.

Требования к объему статей.

Полный объем статьи, как правило, не должен превышать 1 Мб, включая иллюстрации и таблицы.

Общие требования к оформлению статей.

Статьи представляются в электронном виде, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (Word 97/2000, Word XP/2003) и разбитые на страницы размером А4. См. образец с настроенными стилями.

Все поля страницы – по 2 см, верхний и нижний колонтитулы – по 1,5 см. Текст набирается шрифтом Times New Roman, 12 pt, межстрочный интервал - одинарный, красная строка (абзац) - 1,25 см, выравнивание по ширине, включен режим принудительного переноса в словах. Страницы не нумеруются.

Если статья выполнена при поддержке гранта или на основе доклада, прочитанного на конференции, то необходимо сделать соответствующее упоминание в конце статьи.

К статье должна быть приложена авторская справка, содержащая следующую информацию по каждому автору: фамилию, имя, отчество (при наличии), научную степень, ученое звание, место работы, должность, точный почтовый адрес места работы (домашний адрес указывать недопустимо), контактный телефон – рабочий или сотовый (домашний телефон указывать недопустимо), e-mail, согласие на обработку указанных данных и размещение их в журнале. См. образец авторской справки.

В статье следует использовать только общепринятые сокращения.

Редакция не принимает к рассмотрению рукописи статей, оформленные не по установленным правилам.

Требования к структуре статей.

Статья формируется из отдельных структурных составляющих в следующей последовательности:

1) первая строка: номер УДК (стиль «УДК»);

2) вторая строка: название статьи (стиль «Название»);

3) пропустив одну строку: фамилии и инициалы авторов (стиль «Автор»);

4) наименование организации(й), которую представляют авторы (стиль «Организация»);

5) пропустив одну строку: аннотация на русском языке (стиль «Аннотация»);

6) ключевые слова (стиль «Ключевые слова»);

7) пропустив одну строку: основной текст статьи (стиль «Текст») с иллюстрациями (стиль «Подрисуночная надпись») и таблицами (стили «Номер таблицы» и «Название таблицы»);

8) пропустив одну строку: список литературы (стили «Список литературы» и «Источники»);

9) пропустив одну строку: сведения об авторах (стили «Об авторах» и «Сведения»);

10) пропустив одну строку: название статьи на английском языке (стиль «Название»);

11) пропустив одну строку: фамилии и инициалы авторов на латинице (стиль «Автор»);

12) наименование организации(й), которую представляют авторы, на латинице (стиль «Организация»);

13) пропустив одну строку: аннотация на английском языке (стиль «Аннотация»);

14) ключевые слова на английском языке (стиль «Ключевые слова»);

15) пропустив одну строку: список литературы на английском языке (стиль «Список литературы» и «Источники»);

16) пропустив одну строку: сведения об авторах на английском языке (стили «Об авторах» и «Сведения»).

Указанные структурные составляющие статьи являются обязательными.

Требования к оформлению структурных составляющих статей.

Аннотация на русском языке, в которой отражается краткое содержание статьи, должна иметь объем, как правило, не более 8 строк. Аннотация на английском языке должна содержать не менее 100-250 слов, быть информативной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований) и оригинальной (не быть калькой аннотации на русском языке).

Количество ключевых слов на русском и английском языках не должно превышать 15 слов (для каждого языка).

Оптимальной считается следующая структура статьи: «Введение» с указанием актуальности и цели научной работы, «Постановка задачи», «Результаты», «Выводы или заключение», «Литература», «Приложение». В «Приложении» при необходимости могут приводиться математические выкладки, не вошедшие в основной текст статьи и иной вспомогательный материал). В тексте статьи допускается использование систем физических единиц СИ (предпочтительно) и/или СГСЭ. В обязательном порядке статья должна завершаться выводами или заключением.

Все иллюстрации и таблицы – не редактируемые файлы в формате jpg, которые должны быть вставлены в текст. Дополнительно иллюстрации прилагаются отдельными файлами в формате jpg. Рисунки встраиваются в текст через опцию «Вставка-Рисунок-Из файла» с обтеканием «В тексте» с выравниванием по центру страницы без абзацного отступа. Иные технологии вставки и обтекания не допускаются. Все рисунки и чертежи выполняются четко, в формате, обеспечивающем ясность понимания всех деталей; это особенно относится к фотокопиям и полутоновым рисункам. Рисунки, выполненные карандашом, не принимаются. Рисунки, выполненные в MS Word, недопустимы. Язык надписей на рисунках (включая единицы измерения) должен соответствовать языку самой статьи. Поясняющие надписи следует по возможности заменять цифрами и буквенными обозначениями, разъясняемыми в подписи к рисунку или в тексте. Авторов, использующих при подготовке рисунков компьютерную графику, просим придерживаться следующих рекомендаций: графики делать в рамке; штрихи на осях направлять внутрь; по возможности использовать шрифт Times New Roman; высота цифр и строчных букв должна соответствовать высоте букв в тексте статьи.

Формулы должны быть набраны только в редакторе формул (Microsoft Equation). Высота шрифта 12 pt, крупных индексов - 8 pt, мелких индексов – 5 pt, крупных символов – 18 pt, мелких символов – 12 pt. Формулы, внедренные как изображение, не допускаются! Статья должна содержать лишь самые необходимые формулы, от промежуточных выкладок желательно отказаться. Векторные величины выделяются прямым полужирным шрифтом. Все сколько-нибудь громоздкие формулы выносятся на отдельные строки. Формулы должны быть вставлены по центру в таблицу с невидимыми контурами, состоящей из двух колонок. Левая широкая колонка используется для размещения самой формулы, а правая узкая колонка – для номера формулы. Номер формулы ставится в скобках и располагается по центру ячейки таблицы. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте статьи.

В список литературы включаются только те источники, на которые в тексте статьи имеются ссылки. Желательно шире использовать иностранные источники. Список формируется либо в порядке цитирования, либо в алфавитном порядке (вначале источники на русском языке, затем на иностранных языках). Ссылки на литературу по тексту статьи необходимо давать в квадратных скобках. Библиографические описания цитируемых источников в списке литературы оформляются в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008 «Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Ссылки на работы, находящиеся в печати, не допускаются. Список литературы должен быть продублирован на латинице (см. Написание русских символов латиницей). Рекомендации по представлению ссылок в списке литературы на латинице, удовлетворяющего требованиям поисковых систем международных баз данных, – см. Представление источников на латинице.

Сведения об авторах должны включать следующую информацию (на русском и английском языках): фамилию и инициалы автора, ученую степень и ученое звание (при их наличии), должность с указанием места работы (полное название организации, без сокращения), адрес электронной почты. В англоязычном варианте желательно (но не обязательно) также привести дополнительную информацию, в частности, указать дату рождения, назвать законченные учебные заведения и полученные в них научные степени или квалификацию, указать область научных интересов и др.

Требования к составу присылаемого в редакцию комплекта документов.

В комплект документов, присылаемых в редакцию журнала, должны входить:

1) файл с расширением .doc, содержащий полностью подготовленную к публикации согласно вышеперечисленным требованиям журнала статью (включая размещенные в ее тексте рисунки), название которого складывается из фамилий всех авторов (например, «Иванов И.И.,Петров П.П.doc»);

2) файлы с расширением .jpg, содержащие по одному рисунку статьи, название которых соответствует номерам рисунков (например, «Рисунок 01.jpg»);

3) файлы с расширением .pdf, содержащие по одной авторской справке с подписью автора, название которых соответствует фамилии автора (например, «Иванов И.И.doc»).

К статьям, выполненными аспирантами или соискателями научной степени кандидата наук, необходимо приложить рекомендацию, подписанную научным руководителем (если научный руководитель не входит в число соавторов данной статьи).

Каждая статья в обязательном порядке проходит процедуру закрытого рецензирования. Порядок рецензирования установлен документом «Порядок рецензирования рукописей». По результатам рецензирования редколлегия оставляет за собой право либо вернуть автору статью на доработку, либо отклонить ее публикацию в журнале.

Редакция журнала оставляет за собой право на редактирование статей с сохранением авторского варианта научного содержания.

В опубликованной статье указывается дата поступления рукописи статьи в редакцию. В случае существенной переработки рукописи статьи указывается дата получения редакцией окончательного текста статьи.

Статьи публикуются бесплатно.

Все материалы отправлять по адресу:

241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д.20, каб. 101

Телефон: +7 (4832) 666-758

E-mail: enibgu@mail.ru

Изменения и дополнения к правилам оформления статей можно посмотреть на официальном сайте журнала: ***http://www. scim-brgu.ru***

СЕТЕВОЕ ИЗДАНИЕ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ / ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

Учредитель и издатель:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

Свидетельство о регистрации средства массовой информации выдано
Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Эл № ФС77-62799 от 18.08.2015

Адрес учредителя:
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»
241036, г. Брянск, Бежицкая, 14

Адрес редакции и издателя:
РИО ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»
241036, г. Брянск, Бежицкая, 20

Дата размещения сетевого издания в сети Интернет на официальном сайте http://scim-brgu.ru – 27.12.2016

16+