

**Ученые записки**  
Брянского  
государственного  
университета

№ 3  
2016

Физико-математические науки/ Биологические науки/  
Ветеринарные науки

Ученые записки Брянского государственного университета: физико-математические науки/ биологические науки/ ветеринарные науки. №3 (2016). Брянск: РИО БГУ, 2016. 88 с. Точка доступа: <http://scim-brgu.ru>  
Размещено на официальном сайте журнала: 19.12.2016

**Председатель редакционной коллегии:** *Антюхов Андрей Викторович* – ректор ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», доктор филологических наук, профессор.  
**Главный редактор журнала:** *Зайцева Елена Владимировна* – доктор биологических наук, профессор.  
**Ответственный секретарь:** *Родикова Евгения Геннадьевна* – кандидат физико-математических наук, доцент

Редакционная коллегия:

*Шамоян Файзо Агитович*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Новиков Владимир Васильевич*, доктор физико-математических наук, профессор, директор учебно-исследовательского центра «Брянская физическая лаборатория».

*Попов Павел Аркадьевич*, доктор физико-математических наук, доцент, профессор, ведущий научный сотрудник учебно-исследовательского центра «Брянская физическая лаборатория».

*Расулов Карим Магомедович*, доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета.

*Будько Сергей Леонадьевич*, кандидат физико-математических наук, профессор Iowa State University.

*Сорокина Марина Михайловна*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Родикова Евгения Геннадьевна*, кандидат физико-математических наук, доцент, ответственный секретарь.

*Булохов Алексей Данилович*, доктор биологических наук, профессор, заслуженный работник высшего профессионального образования РФ, заведующий кафедрой биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Зайцева Елена Владимировна*, доктор биологических наук, профессор, и.о. декана естественно-географического факультета Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского, главный редактор журнала.

*Нам Ирина Ян-Гуовна*, доктор биологических наук, профессор кафедры химии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Любимов Валерий Борисович*, доктор биологических наук, профессор кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Анищенко Лидия Николаевна*, доктор биологических наук, профессор кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Заякин Владимир Васильевич*, доктор биологических наук, профессор Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Мельников Игорь Владимирович*, кандидат биологических наук, доцент Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Семенюченко Юрий Алексеевич*, кандидат биологических наук, доцент Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского, ответственный секретарь.

*Тельцов Леонид Петрович*, доктор биологических наук, профессор Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева, действительный член Российской Академии Естествознания, Академии ветеринарных наук.

*Зенкин Алексей Сергеевич*, доктор биологических наук, профессор Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева, действительный член Российской Академии Естествознания, Академии ветеринарных наук.

*Селезнев Сергей Борисович*, доктор ветеринарных наук, профессор РУДН, заслуженный деятель науки РФ (г. Москва).

*Лебедев Егор Яковлевич*, доктор сельскохозяйственных наук, профессор, почетный работник высшего профессионального образования РФ, Брянского Государственного аграрного университета.

*Пронин Валерий Васильевич*, доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой нормальной, патологической анатомии и ветсанэкспертизы Ивановской государственной сельскохозяйственной академии (г. Иваново).

*Черный Николай Васильевич*, доктор ветеринарных наук, профессор Харьковской государственной зооветеринарной академии (Украина, г. Харьков).

*Иванов Николай Петрович*, доктор ветеринарных наук, профессор, главный научный сотрудник ТОО «Казахский научно-исследовательский ветеринарный институт», академик.

*Муканов Касым Касенович*, доктор ветеринарных наук, профессор, заместитель генерального директора РГП «Национального центра биотехнологии» Комитета науки МОН Республики Казахстан.

*Бильяна Райдойичич*, доктор ветеринарных наук, профессор Белградского университета.

*Харлан Алексей Леонидович*, кандидат биологических наук, заместитель декана естественно-географического факультета Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского, ответственный секретарь.

В этом выпуске электронного журнала «Ученые записки Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского» представлены материалы по основным направлениям исследований. Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов. Ответственность за точность фактологического материала, используемого в статьях, несут авторы.

The Bryansk  
State  
University  
**Memoirs**

№ 3  
2016

Physics and Mathematics/ Biology/ Veterinary

**Editor-in-chief:** *Andrey Viktorovich Antyukhov*, Rector of the BSU, Doctor of Philology, professor.  
**Executive editor:** *Elena Vladimirovna Zaitseva*, Doctor of Biological sciences, professor of the BSU.  
**Associate Editor:** *Evgeniya Gennadevna Rodikova*, Candidate of Physical and Mathematical Science, assistant professor.

Editorial board:

**Shamoyan F. A.**, doctor of Physical and Mathematical Science, professor, head of mathematical analysis department at the BSU.

**Novikov V. V.**, doctor of Physical and Mathematical Science, professor, Director of the Training and Research Center "Bryansk Physical Laboratory".

**Popov P.A.**, doctor of Physical and Mathematical Science, assistant professor, professor, leading researcher of the Training and Research Center "Bryansk Physical Laboratory".

**Rasulov K.M.**, doctor of Physical and Mathematical Science, professor, Honored Worker of Higher School of the Russian Federation, head of mathematical analysis department at Smolensk State University.

**Budko S.L.**, candidate of Physical and Mathematical Science, the research associate of National laboratory in Ames, university of the State of Iowa, the USA.

**Sorokina M.M.**, candidate of Physical and Mathematical Science, associate professor, department of Algebra and Geometry at the BSU.

**Rodikova E.G.**, candidate of Physical and Mathematical Science, associate professor.

**Bulokhov A.D.**, doctor of biological sciences, professor BSU, Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, head of biological department.

**Zaitseva E.V.**, doctor of biological sciences, professor BSU, Dean of the Faculty of Natural Sciences and Geography at the BSU.

**Nam I. Ja.**, doctor of biological sciences, professor of chemistry department at the BSU.

**Lyubimov V.B.**, doctor of biological sciences, professor, Department of geography, ecology and land management at the BSU.

**Anischenko L. N.**, doctor of biological sciences, professor, Department of geography, ecology and land management at the BSU.

**Zayakin V.V.**, doctor of biological sciences, professor of the BSU.

**Melnikov I.V.**, candidate of biological sciences, associate professor at the BSU.

**Semenischenkov Ju. A.**, candidate of biological sciences, associate professor at the BSU.

**Teltsov L.P.**, doctor of biological sciences, Professor of Mordovia State University by N.P. Ogarev, member of the Russian Academy of Natural Sciences, the Academy of Veterinary Science.

**Zenkin A.S.**, doctor of biological sciences, professor of Professor of Mordovia State University by N.P. Ogarev, member of the Russian Academy of Natural Sciences, the Academy of Veterinary Science.

**Seleznev S.V.**, doctor of veterinary sciences, professor RUDN, Honored Worker of Science of the Russian Federation.

**Lebedko E.Ja.**, doctor of agricultural sciences, professor, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Bryansk Agricultural University.

**Pronin V.V.**, doctor of biological sciences, head of the department of normal, pathological anatomy and veterinary sanitary inspection of the Ivanovo State Agricultural Academy.

**Chernyi N.V.**, doctor of veterinary sciences, professor of Kharkiv State Academy of Animal Health.

**Ivanov N.P.**, doctor of veterinary sciences, professor, chief scientific officer of LLC "Kazakh Research Veterinary Institute", academician.

**Mukanov K.K.**, doctor of veterinary sciences, professor, deputy general director of RSE "National Center for Biotechnology" MES Committee of science of the Kazakhstan Republic.

**Bilyana Raidoyichich**, doctor of veterinary sciences, professor, University of Belgrade.

**Kharlan A.L.**, candidate of biological sciences, Deputy Dean of the Faculty of Natural Sciences and Geography of the Bryansk State University.

## СОДЕРЖАНИЕ

## ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

|                                                                                                                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Беднаж В.А., Горбачев В.И., Малинников С.Г., Родикова Е.Г.<br>НАУЧНАЯ ШКОЛА Ф.А. ШАМОЯНА В БРЯНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ<br>УНИВЕРСИТЕТЕ .....                                                                            | 7  |
| Антоненкова О.Е., Часова Н.А.<br>ТЕОРЕМЫ ДЕЛЕНИЯ НА ВНУТРЕННЮЮ ФУНКЦИЮ В АНИЗОТРОПНЫХ<br>КЛАССАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ .....                                                                               | 13 |
| Гладышев Ю.А.<br>ОБОБЩЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО<br>ПЕРЕМЕННОГО И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В<br>АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ .....                                                                         | 18 |
| Глушак А.В.<br>О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО<br>УРАВНЕНИЯ МАЛЬМСТЕНА .....                                                                                                                | 22 |
| Куриленко С.М., Шамоян Р.Ф.<br>ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА БЕРГМАНА В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ<br>НАД СВЕТОВЫМИ КОНУСАМИ БУДУЩЕГО .....                                                                                    | 31 |
| Лишанский А.А.<br>ГИПЕРЦИКЛИЧНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА .....                                                                                                                                                          | 38 |
| Охлупина О.В.<br>О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В<br>КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ДЛЯ КОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕВАНЛИННЫ<br>ПРИНАДЛЕЖИТ $L^p$ - ВЕСОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ ( $0 < p \leq +\infty$ ) .....            | 41 |
| Родикова Е.Г.<br>ОПИСАНИЕ ГЛАВНЫХ ЧАСТЕЙ МЕРОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С<br>ХАРАКТЕРИСТИКОЙ Р.НЕВАНЛИННЫ ИЗ $L^p$ -ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ .....                                                                           | 45 |
| Шамоян Р.Ф., Махина Н. М.<br>ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В<br>ТРУБЧАТЫХ И ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ .....                                                                                       | 49 |
| Шамоян Ф.А., Беднаж В.А.<br>ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА В СОБОЛЕВЫХ<br>ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ .....                                                                                                          | 52 |
| Шамоян Ф.А., Тасоева Е.В.<br>РАЗЛОЖЕНИЕ УИТНИ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В ВЕСОВЫХ<br>ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ .....                                                                                              | 57 |
| Шокиров Ф.Ш.<br>БРИЗЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ $O(3)$ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ..                                                                                                                                         | 61 |
| Шубабко Е.Н.<br>ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА .....                                                                                                                                             | 68 |
| Shamoyan R.F., Osadchy A.<br>ON TRACES IN HARDY TYPE ANALYTIC SPACES IN THE UNIT BALL<br>BOUNDED STRICTLY PSEUDOCONVEX DOMAINS AND IN TUBULAR<br>DOMAINS OVER SYMMETRIC CONES .....                                  | 74 |
| ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ<br>ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ В РЕЦЕНЗИРУЕМОМ ЭЛЕКТРОННОМ НАУЧНОМ ЖУРНАЛЕ<br>«УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»<br>(«УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ БГУ»)..... | 85 |

## CONTENT

### FUNDAMENTAL AND APPLIED MATHEMATICS

|                                                                                                                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Bednazh V.A., Gorbachev V.I., Malinnikov S.G., Rodikova E.G.<br>SCIENTIFIC SCHOOL OF F.A. SHAMOYAN IN BRYANSK STATE UNIVERSITY..                                                                               | 7  |
| Antonenkova O. E., Chasova N.A.<br>DIVISION THEOREMS BY INNER FUNCTION IN ANISOTROPIC SPACES OF<br>HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN THE POLYDISK .....                                                                 | 13 |
| Gladyshev Yu. A.<br>GENERALIZED METHODS OF THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX<br>VARIABLE AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF TRANSPORT THEORY IN<br>AN ANISOTROPIC MEDIUM .....                                  | 18 |
| Glushak A.V.<br>ON SOLVABILITY OF NON-LOCAL PROBLEM FOR MALMSTEN ABSTRACT<br>EQUATION .....                                                                                                                    | 22 |
| Kurilenko S.M., Shamoyan R.F.<br>BERGMAN TYPE INTEGRAL OPERATORS IN A TUBULAR DOMAIN OVER THE<br>LIGHT CONE .....                                                                                              | 31 |
| Lishanskii A.A.<br>HYPERCYCLICITY OF TOEPLITZ OPERATORS.....                                                                                                                                                   | 38 |
| Okhlupina O.V.<br>ABOUT REPRESENTATION OF SOME CLASSES SUBHARMONIC FUNCTIONS<br>IN THE UNIT DISK FOR WHICH THE NEVANLINNA'S CHARACTERISTIC<br>BELONGS TO THE $L_p$ -WEIGHT SPACES $(0 < p \leq +\infty)$ ..... | 41 |
| Rodikova E.G.<br>ON PRINCIPAL PARTS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISK<br>WITH THE NEVANLINNA CHARACTERISTIC FROM $L_p$ -SPACES.....                                                                    | 45 |
| Shamoyan R.F., Makhina N.M.<br>EMBEDDING THEOREMS FOR CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS<br>IN TUBULAR AND PSEUDOCONVEX DOMAINS.....                                                                                | 49 |
| Shamoyan F.A., Bednazh V.A.<br>ON BOUNDED TOEPLITZ OPERATOR IN THE SOBOLEV SPACE OF<br>FUNCTIONS.....                                                                                                          | 52 |
| Shamoyan F.A., Tasoeva E.V.<br>EMBEDDING THEOREMS IN WEIGHTED SPACES OF FUNCTIONS.....                                                                                                                         | 57 |
| Shokirov F.Sh.<br>BREATHING SOLUTIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL $O(3)$ NONLINEAR<br>SIGMA MODEL.....                                                                                                              | 61 |
| Shubabko E.N.<br>ABOUT ONE CLASS OF ENTIRE FUNCTION OF INFINITE ORDER.....                                                                                                                                     | 68 |
| Shamoyan R.F., Osadchyi A.<br>ON TRACES IN HARDY TYPE ANALYTIC SPACES IN THE UNIT BALL<br>BOUNDED STRICTLY PSEUDOCONVEX DOMAINS AND IN TUBULAR<br>DOMAINS OVER SYMMETRIC CONES .....                           | 74 |
| REQUIREMENTS TO THE CONTENTS AND PAPERS OFFERED FOR PUBLICATION in<br>peer-reviewed electronic scientific journals "Scientific notes of Bryansk State University"<br>("Scientific notes of BSU").....          | 85 |

## НАУЧНАЯ ШКОЛА Ф.А. ШАМОЯНА В БРЯНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

**Беднаж В.А., Горбачев В.И., Малинников С.Г., Родикова Е.Г.**  
Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского  
enibgu@mail.ru

Содержанием настоящего номера «Ученых записок Брянского университета» выступают исследования авторов в области комплексного и функционального анализа, представленные на научно-практической конференции «Комплексный анализ и приложения», проведенной 23-24 ноября 2016 года в Брянском государственном университете имени акад. И.Г. Петровского.

Материалы конференции отражают результаты работы научной лаборатории комплексного и функционального анализа института фундаментальных и прикладных исследований, коллектива преподавателей кафедры математического анализа БГУ.

Научным руководителем лаборатории комплексного и функционального анализа является заведующий кафедрой математического анализа, математик с мировым именем, доктор физико-математических наук, профессор Файзо Агитович Шамоян.

Представленные в материалах конференции анонсы и публикуемые в журнале статьи членов лаборатории комплексного и функционального анализа выполнены в рамках выполнения проектной части государственного задания №1.1704.2014К Минобрнауки РФ в сфере научно-исследовательской деятельности (руководитель Ф.А. Шамоян).

Файзо Агитовича Шамояна как профессионального математика, выдающегося педагога, организатора научных исследований в Брянском государственном университете характеризуют следующие результаты его многогранной деятельности.

### Научная деятельность

Шамоян Ф.А. закончил механико-математический факультет Ереванского государственного университета экстерном, с отличием. Свою научную деятельность Шамоян Ф.А. начал еще в качестве студента, а затем продолжил в качестве аспиранта Ленинградского университета и научного сотрудника Института математики АН АрмССР. В 1971 г. в Ленинградском университете Шамоян Ф.А. защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.01 «Математический анализ», в 1983 г. в ЛОМИ АН СССР – диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Шамоян Ф.А. более 20 лет проработал в Институте математики АН АрмССР, с 1993 г. является заведующим кафедрой математического анализа Брянского государственного университета, ведет научную работу, соответствующую профилю кафедры.



Научные исследования Шамояна Ф.А. посвящены, главным образом, трем направлениям комплексного и функционального анализа:

- 1) факторизационным представлениям и описанию корневых множеств весовых классов голоморфных функций и приложениям полученных результатов к исследованию замкнутых идеалов в алгебрах аналитических функций;
- 2) вопросам весовых полиномиальных приближений в среднем при наличии аналитического веса;
- 3) исследованию свойств рядов и преобразований Фурье функций ограниченного вида.

В аспирантские годы Шамоян Ф.А. со своим научным руководителем Хавиным В.П. доказал фундаментальную теорему о падении гладкости аналитической функции по сравнению с гладкостью ее модуля. Один из ведущих математиков западной Европы и России, профессор Барселонского университета К.М. Дьяконов назвал эту теорему «жемчужиной теории функций комплексного переменного». Отмеченный результат породил дальнейшие исследования в указанном направлении (работы Н.А. Широкова, К.М. Дьяконова, Г.Я. Бомаш и др.). В вопросах факторизации функций, аналитических в заданной односвязной области и гладких вплоть до ее границы, Шамоян Ф.А. предложил своеобразный подход, основанный на методах теории теплицевых операторов в пространствах голоморфных функций указанного типа. Результаты Шамояна Ф.А. в теории теплицевых операторов в дальнейшем применялись к решению других проблем комплексного и функционального анализа. Так, например, французский математик Ж.П. Кахан применял их в задачах аппроксимации (1974 г.)

К этому же кругу вопросов относятся его исследования по теории идеалов в алгебрах функций, аналитических в круге и гладких вплоть до его границы. Из этих результатов Шамояна Ф.А. легко следуют классические теоремы Т. Карлемана, У. Рудина, Г.Е. Шилова о замкнутых идеалах диск-алгебры. В 1996 г. в работах американского математика У. Росса (W.Ross) и немецкого математика А. Алемана (A. Aleman) результаты Шамояна Ф.А. применялись для описания инвариантных подпространств оператора сопряженного сдвига в пространствах Дирихле и Бергмана.

Серия работ Шамояна Ф.А. связана с классическими работами финского математика Р. Неванлинны о корневых множествах голоморфных в круге функций, логарифм которых суммируем со степенным весом. Задача характеристики корней плоских классов Неванлинны возникла в конце 30-х годов XX столетия. Р. Неванлинна получил лишь частное ее решение. Известным математикам М.М. Джрбашяну (1948 г.), М. Цудзи (M. Tsuji, 1956 г.) также полностью решить проблему не удалось. Лишь в 1978 г. Ф.А. Шамоян предложил конструктивное решение данной задачи, на основе которого Ф.А. Шамояном и его учениками было создано новое направление в комплексном анализе – теория  $L^p$ -весовых классов мероморфных функций.

Шамоян Ф.А. окончательно решил задачу, возникшую в 1964 г. в работах американского математика А. Берлинга: было получено полное описание тех весов, при которых каждый замкнутый идеал в соответствующей алгебре аналитических функций определяется своими нулями. К этому же направлению относятся результаты Шамояна Ф.А. о корневых множествах целых и аналитических в круге функции, допускающих произвольный рост при приближении к множеству особых точек (так называемое условие Линделефа). Здесь систематически применяются методы геометрической теории функций комплексного переменного, устанавливаются довольно тонкие свойства корневых множеств аналитических функций.

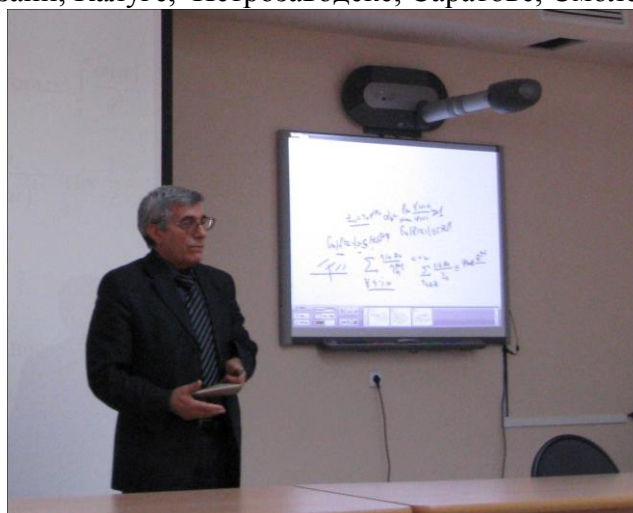
Другое направление работ Ф.А. Шамояна связано с задачами весовой полиномиальной аппроксимации в среднем. Еще в 1945 г. в известной работе М.В. Келдыша о весовой аппроксимации аналитических функций многочленами было установлено, что существуют веса, представляющие модули аналитических функций, не обращающихся в



нуль, и в то же время полнота систем многочленов при наличии указанных весов отсутствует. В современной терминологии это эквивалентно тому, что функция может не обращаться в нуль, но не быть слабо обратимой. В 60-70-х гг. прошлого столетия в связи с интенсивным развитием теории весовых приближений и тем, что эти вопросы играют важную роль во многих разделах комплексного и функционального анализа (теория операторов, теория ортогональных многочленов, случайные гауссовские процессы и т.д.), в работах Н.К. Никольского и американского математика А. Шильдса независимо друг от друга была поставлена проблема: следует ли из сильной обратимости функций в заданном пространстве голоморфных функций ее слабая обратимость? В начале 80-х гг. Шамояном Ф.А. была построена серия банаховых пространств голоморфных функций, в которых существуют сильно обратимые функции, не обладающие слабой обратимостью. Тем самым получен отрицательный ответ на поставленный вопрос Никольского-Шильдса. Шамоян Ф.А. впервые в многомерном комплексном анализе начал исследования по проблематике весовой аппроксимации в среднем и получил точные результаты. В частности, он получил полную характеристику тех радиальных весовых функций, при которых каждая ограниченная аналитическая функция в шаре и полидиске  $n$ -мерного комплексного пространства является слабо обратимым элементом в соответствующем весовом  $L_p$ -пространстве.

Шамоян Ф.А. также занимался вопросами, связанными с хорошо известным положением о том, что если функция принадлежит классу Харди  $H_p$  в единичном круге при каком-нибудь положительном  $p$ , и граничные значения на единичной окружности суммируемы, то все коэффициенты этой функции с отрицательным индексом равны нулю. Аналог этого утверждения для полуплоскости является содержанием классической теоремы Пэли-Винера. Однако, как заметил Шамоян Ф.А., для широких классов голоморфных функций, в частности, для функций ограниченного вида, указанное утверждение неверно. Шамоян Ф.А. установил, что если коэффициенты Фурье с отрицательными индексами функции ограниченного вида в круге с суммируемыми граничными значениями довольно сильно стремятся к нулю, то они тождественно равны нулю, при этом он получил полную характеристику указанной скорости. Соответствующий результат установлен и для преобразования Фурье функций ограниченного вида в полуплоскости. Эти результаты позволили Шамояну Ф.А. получить уточнение известной теоремы испанского математика Салинаса для квазианалитических классов функций.

Шамоян Ф.А. выступал с докладами на конференциях во многих научных центрах России и ближнего зарубежья: Москва, Санкт-Петербург, Черногловка, Киев, Харьков, Тбилиси, Львов, Ереван и др., а также во многих зарубежных центрах: Швеция, Норвегия, Германия, Венгрия, Италия и др. За последние 5 лет Ф.А. Шамоян и его ученики, сотрудники НИЛ приняли участие более, чем в 20 международных конференциях в Бордо, Брянске, Волгограде, Воронеже, Казани, Калуге, Петрозаводске, Саратове, Смоленске, Судаке.



Шамояном Ф.А. опубликовано более 150 научных работ, свыше 100 из них в ведущих отечественных и зарубежных изданиях, в том числе цитируемых в Web of Science, Scopus: «Доклады АН СССР», «Математический сборник», «Известия РАН», «Алгебра и анализ», «Математические заметки», «Сибирский математический журнал», «Успехи математических наук», «Известия АН АрмССР», «Доклады АН АрмССР», «Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry», «Complex Analysis and Operator Theory», «Complex Variables and Elliptic Equations» и др.

В 1988 г. в Лейпциге была опубликована монография Шамояна Ф.А. (в соавторстве с его учеником А.Е. Джрбашяном) «Topics in the Theory of Ap-alpha-spaces» (Teubner-Verlag), определившая новые направления развития комплексного анализа. В рецензии известного немецкого математика В. Тучке (W.Tuchke) отмечено, что указанная монография «открывает новые перспективы исследования не только в комплексном анализе, но и в теории дифференциальных уравнений в частных производных». В 2009 г. издана монография Шамояна Ф.А. (в соавторстве с его аспирантом Шубабко Е.Н.) «Введение в теорию весовых  $L_p$ -пространств мероморфных функций», в 2014 г. – «Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой», в 2016 г. – «Весовые пространства аналитических функций в поликруге и шаре из  $\mathbb{C}^n$ ».

Более 10 лет Шамоян Ф.А. являлся ответственным редактором направления «Математика» серии «Точные и естественные науки» Вестника Брянского государственного университета, в настоящее время – ответственный редактор направления «Математика» сетевого издания «Ученые записки Брянского государственного университета».

В 1999 г. Шамояну Ф.А. было присвоено звание Соросовского профессора в знак признания выдающегося вклада в мировую науку и образование.

Шамоян Ф.А. многократно являлся руководителем и исполнителем проектов, поддержанных грантами РФФИ и Министерства образования и науки России, а также исполнителем проекта, выполняемого совместно с лабораторией математического анализа ПОМИ РАН. В 2014-2016 гг. Шамоян Ф.А. осуществляет руководство проектом «Современные проблемы комплексного и гармонического анализа», поддержанного субсидией Минобрнауки в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности. Общий объем финансирования исследований за последние 5 лет составил более 8 млн. рублей.

#### Список наиболее значимых публикаций за последние 5 лет

1. Шамоян Ф.А. Весовые пространства аналитических функций в поликруге и шаре из  $\mathbb{C}^n$ . --- Брянск: РИО БГУ, 2016.--- 250 с.
2. Шамоян Ф.А. Весовые пространства аналитических функций со смешанными нормами. --- Брянск: РИО БГУ, 2014.--- 250 с.
3. Шамоян Ф.А. Преобразование Фурье функции ограниченного вида в трубчатых областях // Сиб.матем.журнал, 2016. – Т.57, №6. – С. 1403-1421.
4. Bednazh V.A., Rodikova E.G., Shamoyan F.A. On Multiple Interpolation in the Class of Analytic Functions in the Unit Disk with the Nevanlinna Characteristic from  $L_p$ -spaces // Complex Analysis and Operator Theory, (2016), DOI 10.1007/s11785-016-0592-x
5. Shamoyan F.A. On polynomial approximation in anisotropic weighted spaces of holomorphic functions in a polydisc // Complex Analysis and Operator Theory. --- Basel: Birkhauser Verlag. - 2014. - DOI: 10.1007/s11785-014-0408-9.
6. Shamoyan F.A., Povprits E.V. Representation of continuous linear functionals in anisotropic weighted spaces of analytic functions in the polydisc with mixed norm // Complex Variables and Elliptic Equations. - UK: TaylorFrancis. - 2014. - V. 59, I. 4.- P. 462-483.
7. Shamoyan F.A., Povprits E.V. Diagonal mapping in anisotropic spaces of analytic functions

in polydisc with mixed norm // Complex Analysis and Operator Theory. - Basel: Birkhauser Verlag. - 2014. - V. 8, №6. - P. 1383-1403.

8. Shamoyan~F.A., Rodikova E.G. On interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Матем. и физ. --- Красноярск: Изд. СФУ, 2014.–Т.7.– Вып. 2 – С. 235-243.

9. Shamoyan F.A. On the Fourier coefficients of functions of bounded type on the unit torus // Recent trends in analysis: proceedings of the conference - Bucharest: The Theta Foundation, 2013. - P.177-186.

10. Шамоян Ф.А. Критерий ограниченности тёплицевых операторов в весовых соболевских пространствах голоморфных в поликруге функций// Сиб. матем. журн., 2012.–53:3. – С. 691–711.

### Опыт преподавательской деятельности

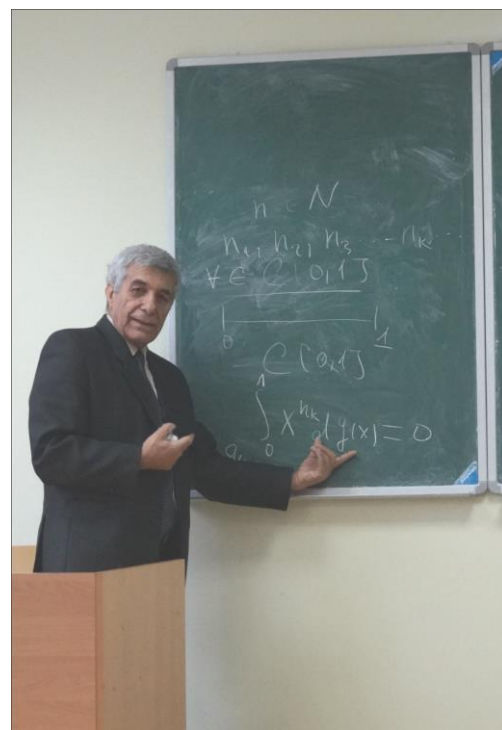
С 1971 г. Шамоян Ф.А. вел преподавательскую деятельность на кафедре теории функций и функционального анализа Ереванского государственного университета, сначала в качестве доцента (1971-1986 гг.), а затем и в качестве профессора (1987-1993 гг.) этой кафедры.

С 1993 г. Шамоян Ф.А. работает заведующим кафедрой математического анализа Брянского государственного университета им. ак. И.Г. Петровского. Шамоян Ф.А. впервые в Брянской области создал научную школу по такому важному направлению современной математики, каким является комплексный и функциональный анализ. Научная школа, созданная Шамояном Ф.А., имеет тесные творческие связи с крупными математическими центрами мира: МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ, ПОМИ РАН им. В.А. Стеклова, Ереванским государственным университетом, Институтом математики АН Армении, Бордо, Мичиганским, Барселонским университетами.

В 1994 г. в Брянском государственном университете по инициативе Шамояна Ф.А. была открыта аспирантура по специальности 01.01.01 «Математический анализ» (в настоящее время 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»). Под руководством Шамояна Ф.А. защитились 14 кандидатов физико-математических наук, среди его учеников 2 доктора физико-математических наук Аветисян К.Л. и Арутюнян А.В.

### Защиты диссертаций под руководством Ф.А. Шамояна за последние 5 лет

1. Охлупина О.В. Потенциалы типа Грина и интегральные представления весовых классов субгармонических функций, Саратов, СГУ, 21.05.2012.
2. Родикова Е.Г. Факторизация, характеристика корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций, Воронеж, ВГУ, 16.09.2014.
3. Повприц Е.В. Характеризация следов и преобразование Коши линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах аналитических функций со смешанными нормами, Воронеж, ВГУ, 02.06.2015.



Шамоян Ф.А. более 40 лет читает лекционные курсы бакалаврам и магистрантам по математическому анализу, теории функций комплексного переменного, функциональному анализу, современным проблемам математического анализа, а также ведет спецкурсы по теории функциональных пространств и функциональных алгебр, руководит научно-исследовательской работой магистров и аспирантов.

Ученики Шамояна Ф.А. неоднократно становились стипендиатами премий Президента и Правительства РФ (Родикова Е.Г.), Областной Думы Брянской области (Махина Н.М., Приходько О.В., Родикова Е.Г.), премии им. ак. И.Г. Петровского Брянского государственного университета (Антоненкова О.Е., Махина Н.М., Приходько О.В., Родикова Е.Г.); занимали призовые места на областных научных конкурсах (Беднаж В.А., Махина Н.М., Родикова Е.Г.), побеждали на областном конкурсе «Учитель года» (Быков С.В.). Кандидаты физико-математических наук, научным руководителем которых являлся Шамоян Ф.А., пополняют профессорско-преподавательские коллективы высших учебных заведений области, продолжают научную работу под его руководством.

### **Сведения об авторах**

Беднаж В.А., к.ф.-м.н., доцент, с.н.с. НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, verabednazh@mail.ru.

Горбачев В.И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор, директор Естественно-научного института, Брянский государственный университет, enibgu@mail.ru.

Малинников С.Г., к.ф.н., доцент, декан физико-математического факультета, Брянский государственный университет, priembgu@mail.ru.

Родикова Е.Г., к.ф.-м.н., м.н.с. НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, evheny@yandex.ru.

## **SCIENTIFIC SCHOOL OF F.A. SHAMOYAN IN BRYANSK STATE UNIVERSITY**

**Bednazh V.A., Gorbachev V.I., Malinnikov S.G., Rodikova E.G.**

Bryansk State University

### **About authors**

Bednazh V.A., Ph.D., assistant professor, senior researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, verabednazh@mail.ru.

Gorbachev V.I., Ph.D., professor, director of science Institute, Bryansk State University, enibgu@mail.ru.

Malinnikov S.G., Ph.D., assistant professor, the dean of faculty of physics and mathematics, Bryansk State University, priembgu@mail.ru.

Rodikova Eugenia Gennadevna, PhD, junior researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, evheny@yandex.ru.

УДК 517.53

# ТЕОРЕМЫ ДЕЛЕНИЯ НА ВНУТРЕННЮЮ ФУНКЦИЮ В АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

О. Е. Антоненкова, Н.А. Часова

Брянский государственный инженерно-технологический университет

**Аннотация.** На основе ограниченности теплицевых операторов в весовых анизотропных пространствах  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$  при  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = \overline{1, n}$ , исследованы вопросы деления на внутреннюю функцию в указанных пространствах.

**Ключевые слова:** голоморфная функция, поликруг, внутренняя функция, оператор Теплица, пространство  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ .

Пусть  $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| < 1, j = \overline{1, n}\}$  – единичный поликруг в  $n$ -мерном комплексном пространстве  $C^n$ , единичный тор  $T^n = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : |\zeta_j| = 1, j = \overline{1, n}\}$  – его осто́в,  $\Omega$  – множество измеримых неотрицательных на  $(0, 1)$  функций  $\omega$ , для которых существуют положительные числа  $m_\omega, M_\omega, q_\omega$ , причем  $m_\omega, q_\omega \in (0, 1)$ , такие, что  $m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$  при всех  $r \in (0, 1)$ ,  $\lambda \in [q_\omega, 1]$  (см. [1]).

Через  $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ ,  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $\omega_j \in \Omega$ ,  $j = \overline{1, n}$  (см. [2]), будем обозначать пространство измеримых на  $U^n$  функций  $f$ , для которых

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}(\vec{\omega})} = \|f\|_{L^{p_1, \dots, p_n}(\omega_1, \dots, \omega_n)} = \left( \int_U \omega_n(1 - |\zeta_n|) \dots \left( \int_U |f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)|^{p_1} \omega_1(1 - |\zeta_1|) dm_2(\zeta_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dm_2(\zeta_n) \right)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty,$$

$m_2$  – плоская мера Лебега в круге  $U = U^1$ .

Тогда пространство  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$  со смешанной нормой определим как подпространство  $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ , состоящее из голоморфных в  $U^n$  функций. Обозначим через  $H(U^n)$  и  $H^p(U^n)$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) множество всех голоморфных в  $U^n$  функций и класс Харди в  $U^n$  соответственно. Тогда  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega}) = H(U^n) \cap L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ .

Важную роль в теории классов Харди, а также в различных их приложениях играет известная факторизация на внешнюю и внутреннюю функции.

Напомним, что функция  $g \in H^\infty(U^n)$  называется внутренней, если ее радиальные предельные значения удовлетворяют условию  $|g^*(\omega)| = 1$  почти всюду на  $T^n$ . Внутренняя функция  $g \in H^\infty(U^n)$  называется хорошей, если наименьшая  $n$ -гармоническая мажоранта функции  $\log |g|$  тождественно равна нулю (см. [3]).

Говорят, что внутренняя функция  $I_1$  делит внутреннюю функцию  $I_2$ , если  $\frac{I_2}{I_1} \in H^\infty(U^n)$ .

Так, например, в одномерном случае (при  $n=1$ ) функция  $f \in H^p(U)$  тогда и только тогда, когда  $f$  допускает факторизацию (с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице):

$$f(z) = I_f Q_f, \quad (1)$$

где  $I_f = B(z_k, z) \exp\left(-\int_T \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\sigma(\zeta)\right)$  – внутренняя часть функции  $f$ , а

$$Q_f = \exp\left(\int_T \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \ln|f(\zeta)| dm(\zeta)\right) – \text{внешняя часть } f, \quad B(z_k, z) = z^s \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}, \quad z \in U –$$

произведение Бляшке с нулями  $z_k \in U$ ,  $s \in \mathbf{Z}_+$ ,  $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$  – последовательность, удовлетворяющая условию Бляшке,  $\sigma$  – неотрицательная сингулярная мера,  $m$  – нормированная мера Лебега на единичной окружности.

В многомерном случае (при  $n > 1$ ) с некоторыми ограничениями роль произведений Бляшке играют хорошие внутренние функции (см. [3]).

Одно из основных свойств факторизации (1) заключается в том, что если  $f \in H^p(U)$  и  $I$  делит внутреннюю часть функции  $f$ , то  $\frac{f}{I} \in H^p(U)$ .

Указанным свойством обладают не только функции из  $H^p(U)$ , но и более узкие классы функций (см. [4], [5] [6], [7]). Причем, как оказалось, проблема деления на хорошую внутреннюю функцию в рассматриваемых пространствах тесно связана со свойствами оператора Теплица.

Пусть  $g$  – голоморфная в  $U^n$  функция,  $g(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$  – разложение

Тейлора,  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$ , положим

$$D^\alpha g(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} a_k z^k, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j > -1, \quad j = \overline{1, n},$$

здесь  $\frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_j+1+k_j)}{\Gamma(\alpha_j+1)\Gamma(k_j+1)}$ ,  $\Gamma$  – функция Эйлера.

Обозначим через  $A_{\alpha}^{\bar{q}}(\vec{\omega}_{\alpha}) = \{g \in H(U^n) : D^{\alpha+1} g \in A^{\bar{q}}(\vec{\omega}_{\alpha})\}$ , где  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $q_j = \frac{p_j}{p_j - 1}$ ,

$1 < p_j < +\infty$ ,  $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$ ,  $\vec{\omega}_{\alpha} = (\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_n})$ ,  $\omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t) \left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)}\right)^{q_j}$ ,  $\omega_j \in \Omega$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Через  $\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ ,  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_j = 1$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , обозначим множество всех голоморфных в  $U^n$  функций  $g$ , для которых

$$\|g\|_{\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}} = \sup_{(z_1, \dots, z_n) \in U^n} \prod_{j=1}^n \frac{(1 - |z_j|)^{\alpha_j}}{\omega_j(1 - |z_j|)} |D^{\alpha+1} g(z)| < +\infty,$$

где  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$ ,  $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} + 1$ ,  $\omega_j \in \Omega$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Пусть  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , где  $p_j > 1$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $p_i = 1$ ,  $i = \overline{k+1, n}$  обозначим через  $\tilde{\lambda}_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$  множество всех голоморфных в  $U^n$  функций  $g$ , для которых

$$\|g\|_{\tilde{\lambda}_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}} = \sup_{(z_{k+1}, \dots, z_n) \in U^{n-k}} \prod_{i=k+1}^n \frac{(1-|z_i|)^{\alpha_i}}{\omega_i(1-|z_i|)} \|D^{\alpha+1} g(z)\|_{A^{q_1, \dots, q_k}(\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_k})} < +\infty,$$

где  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$ ,  $\omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t) \left( \frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)} \right)^{q_j}$ ,  $q_j = \frac{p_j}{p_j - 1}$ ,  $\omega_j \in \Omega$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $\alpha_i > \alpha_{\omega_i} + 1$ ,  $\omega_i \in \Omega$   $i = \overline{k+1, n}$ .

Если  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , где  $p_j = 1$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $p_i > 1$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ , то через  $\tilde{\lambda}_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$  обозначим множество всех голоморфных в  $U^n$  функций  $g$ , для которых

$$\|g\|_{\tilde{\lambda}_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}} = \left\| \sup_{(z_1, \dots, z_k) \in U^k} \prod_{j=1}^k \frac{(1-|z_j|)^{\alpha_j}}{\omega_j(1-|z_j|)} \|D^{\alpha+1} g(z)\|_{A^{q_{k+1}, \dots, q_n}(\omega_{\alpha_{k+1}}, \dots, \omega_{\alpha_n})} \right\| < +\infty,$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$ ,  $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} + 1$ ,  $\omega_j \in \Omega$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $\omega_{\alpha_i}(t) = \omega_i(t) \left( \frac{t^{\alpha_i}}{\omega_i(t)} \right)^{q_i}$ ,  $q_i = \frac{p_i}{p_i - 1}$ ,  $\omega_i \in \Omega$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ .

Тогда через  $\Lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$  будем обозначать множество всех голоморфных в  $U^n$  функций  $g$ , которое совпадает с  $A_{\alpha}^{\vec{q}}(\vec{\omega}_{\alpha})$ , если  $1 < p_j < +\infty$   $j = \overline{1, n}$ ; с  $\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ , если все  $p_j = 1$ ,  $j = \overline{1, n}$ ; с  $\tilde{\lambda}_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ , если  $p_j > 1$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $p_i = 1$ ,  $i = \overline{k+1, n}$  и с  $\tilde{\lambda}_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ , если  $p_j = 1$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $p_i > 1$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ .

Основным результатом работы является следующее утверждение:

**Теорема 1.** Пусть  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $\omega_j \in \Omega$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $f \in A^{\vec{p}}(\vec{\omega}) \cap H^1(U^n)$  и  $f = g \cdot F$ , где  $g$  – хорошая внутренняя функция, являющаяся мультипликатором пространства  $\Lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ , тогда  $F \in A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ .

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на ограниченность теплицевых операторов в пространствах  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ , при  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = \overline{1, n}$ , которая ранее была установлена авторами в работах [4], [8] и [9].

Оператором Теплица с символом  $h \in L^1(T^n)$  называется интегральный оператор вида:

$$T_h(f)(z) = \int_{T^n} \frac{f(\zeta) h(\zeta)}{1 - z\zeta} dm_n(\zeta),$$

где  $\frac{1}{1 - z\zeta} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - z_j \zeta_j}$ ,  $f \in C(U^n \cup T^n) \cap H(U^n)$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$ .

Поскольку множество  $C(U^n \cup T^n) \cap H(U^n)$  всюду плотно в пространстве  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ , то, исследуя теплицевы операторы на пространствах  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ , естественно, сначала рассматривать их на указанных множествах.

Если  $\|T_h(f)\|_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})} \leq \text{const} \|f\|_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})}$ , для всех  $f \in C(U^n \cup T^n) \cap H(U^n)$ , то в этом случае будем говорить, что оператор  $T_h(f)$  ограниченно действует в пространстве  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ . Понятно, что тогда оператор  $T_h(f)$  имеет единственное расширение на всем пространстве  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Скажем, что суммируемая на  $T^n$  функция  $h$  принадлежит классу  $RP$ , если коэффициенты Фурье функции  $h$  равны нулю вне множества  $Z_+^n \cup (-Z_+^n)$ .

Опишем те символы  $h$ , при которых операторы  $T_h(f)(z)$  действуют в пространствах  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ , при  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Имеет место следующее утверждение:

**Теорема 2.** Пусть  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = \overline{1, n}$  и суммируемая на  $T^n$  функция  $h \in RP$  представима в виде  $h = h_1 + \bar{h}_2$ , где  $h_1 \in H^\infty(U^n)$ ,  $h_2$  – мультипликатор пространства  $\Lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ . Тогда оператор  $T_h(f)$  действует в пространстве  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ .

**Доказательство теоремы 1.**

Так как  $f \in H^1(U^n)$ , то  $F \in H^1(U^n)$  (см. [7]). Запишем формулу Коши для функции  $F$ :

$$F(z) = \int_{T^n} \frac{F(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} dm_n(\zeta),$$

тогда

$$F(z) = \int_{T^n} \frac{F(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} dm_n(\zeta) = \int_{T^n} \frac{F(\zeta)g(\zeta)\overline{g(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}} dm_n(\zeta) = \int_{T^n} \frac{f(\zeta)\overline{g(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}} dm_n(\zeta) = T_g f(z).$$

Поскольку  $f \in A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ , то по теореме 2  $F \in A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ .

Что и требовалось доказать.

### Список литературы

1. Сенета Е. Правильно изменяющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 141 с.
2. Shamoian F.A., Yaroslavtseva O.V. Continuous projections, duality and the diagonal map in weighted spaces of holomorphic functions with mixed norm// Investigations on linear operators and function theory. 25, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 247, POMI, St. Petersburg.– 1997.– pp. 268-275.
3. Рудин У. Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
4. Антоненкова О.Е., Часова Н.А. Теплицевы операторы и вопросы деления в некоторых классах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой// Вестник Брянского государственного университета. – № 3(2015): Естественные и точные науки. – Брянск: РИО БГУ, 2015. – С. 341-345.
5. Harutyunyan A. V. Topelitz operators and division theorems in anisotropic spaces of holomorphic functions in the polydisk// Complex Variables – 2003– Vol. 48, no. 4, pp. 347-363.
6. Шамоян Ф.А. Критерий ограниченности теплицевых операторов в весовых соболевских пространствах голоморфных в поликруге функций // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т.53. – №3. – С. 691-711.
7. Шамоян Ф. А. Теплицевы операторы и деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций // Докл. АН АрмССР. 1983. Т. 76, № 3. С. 215–219.
8. Антоненкова О.Е. Теплицевы операторы в весовых пространствах аналитических в поликруге функций со смешанной нормой // Вестник Брянского государственного университета. – № 4(2007): Естественные и точные науки. – Брянск: РИО БГУ, 2007. – С. 5-8.
9. Часова Н.А. О теплицевых операторах в пространствах аналитических в поликруге функций со смешанной нормой // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. – Казань. – 2002. – Т. 14.
10. Шамоян Ф.А., Арутюнян А.В. Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Доклады АН Армении. – 1990. – Т. 91. – № 4. – С. 147-151.



## References

1. Seneta E. Regularly varying functions. – M.: Nauka, 1985. – 141 p. (in Russian)
2. Shamoyan F.A., Yaroslavtseva O.V. Continuous projections, duality and the diagonal map in weighted spaces of holomorphic functions with mixed norm // Investigations on linear operators and function theory. 25, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 247, POMI, St. Petersburg.– 1997.– pp. 268-275. (in Russian)
3. Rudin W. Function theory in polydisk. – M.: Mir, 1974. – 160 p. (in Russian)
4. Antonenkova O.E., Chasova N.A. References Toeplitz operators and division questions in some classes of holomorphic functions in a polydisk with mixed norm // Vestnik Bryanskogo universiteta. - № 3, 2015. Bryansk, 2015. - P. 341-345. (in Russian)
5. Harutyunyan A. V. Toeplitz operators and division theorems in anisotropic spaces of holomorphic functions in the polydisk // Complex Variables – 2003– Vol. 48, no. 4, pp. 347-363.
6. Shamoyan F.A. A boundedness criterion for Toeplitz operators in weighted Sobolev spaces of holomorphic functions on the polydisk // Sib.mat.zhurnal. – 2012. – V.53. – №3. – P. 691-711. (in Russian)
7. Shamoyan F.A. Toeplitz operators and division by an inner function in some spaces of analytic functions // Dokl. AN ArmSSR. 1983. V. 76, № 3. P. 215–219. (in Russian)
8. Antonenkova O.E. Toeplitz operators in weighted spaces of analytic functions in a polydisk with mixed norm // Vestnik Bryanskogo universiteta.– № 4 (2007) – P. 5-8.
9. Chasova N.A. On Toeplitz operators in spaces of analytic functions in a polydisk with mixed norm // Trudy mat. tcentra Lobachevskogo – Kazan. – 2002. – V. 14. (in Russian)
10. Shamoyan F.A., Harutyunyan A. V. Toeplitz operators in anisotropic spaces of holomorphic functions in the polydisk // Doklady N Armenii. – 1990. – V. 91. – № 4. – С. 147-151. (in Russian)

## Сведения об авторах

Антоненкова Ольга Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент, Брянский государственный инженерно-технологический университет, anto-olga@yandex.ru;  
 Часова Наталья Александровна, к.ф.-м.н., доцент, Брянский государственный инженерно-технологический университет, chasnat@bk.ru.

## DIVISION THEOREMS BY INNER FUNCTION IN ANISOTROPIC SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN THE POLYDISK

O. E. Antonenkova, N.A. Chasova

Bryansk State engineering-technological University

Abstract. Investigated the questions of division by inner function in weighted anisotropic spaces  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ , on the basis of the boundedness of Toeplitz operators on mentioned spaces.

**Key words:** holomorphic function, polydisk, inner function, Toeplitz operator, space  $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ .

## About authors

Antonenkova O.E., PhD, assistant professor, Bryansk State engineering-technological University, anto-olga@yandex.ru;  
 Chasova N.A., PhD, assistant professor, Bryansk State engineering-technological University, chasnat@bk.ru.

УДК 517.53/.55

# ОБОБЩЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Ю. А. Гладышев

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского.

Аннотация. Дано решение первой краевой задачи для круговой области уравнения, описывающего процесс переноса в анизотропной среде. Для решения задачи использованы обобщенные методы теории функций комплексного переменного.

**Ключевые слова:** процесс переноса, сопряженные комплексные переменные, анизотропная среда.

На основе коммутативной и ассоциативной алгебры, определенной двумя сопряженными единицами  $j_1, j_2$  со свойствами

$$j_i^2 + \alpha_1 j_i + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in R, \quad j_1 + j_2 = -\alpha_1, \quad j_1 j_2 = \alpha_2, \quad (1)$$

была построена теория функций вида  $f(z) = \Phi + j_1 \Psi$  [1] во многом аналогичная ТФКП.

После введения переменных  $z_1, z_2$ , определенных как

$$z_1 = x + j_1 y, \quad z_2 = x + j_2 y, \quad (2)$$

по обычным правилам дифференцирования по  $x, y$  получены операторы

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{j_1 - j_2} \left( -j_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{j_2 - j_1} \left( -j_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Эти операторы, очевидно, обобщают операторы дифференцирования по комплексным переменным  $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ , если положить  $j_1 = i, j_2 = -i$ . Операторы (3) действуют на функции

$$f(z_1, z_2) = f^*(x, y) = \Phi(x, y) + j\Psi(x, y), \quad (4)$$

которые предполагаем непрерывно дифференцируемыми по  $x, y$  в заданной области. Условия независимости функций  $f(z_1, z_2)$  от  $z_2$  запишем как

$$\frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} = 0. \quad (5)$$

В развернутом виде это условие приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

которая обобщает систему Коши-Римана. Если  $\Phi, \Psi$  имеют вторые непрерывные производные по  $x, y$ , то система (6) приводит к двум уравнениям второго порядка

$$\frac{\partial f}{\partial z_1 \partial z_2} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left( \alpha_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + j_1 \left( \alpha_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right] \quad (7)$$

Многие результаты ТФКП могут быть переформулированы для функций параметрического комплексного переменного  $z_1$ .

Основной интерес для дальнейшего имеют степенные функции

$$f(z_1) = z_1^n C = (x + j_1 y)^n C. \quad (8)$$

Было показано, что в развернутом виде коэффициенты при  $x, y$  в (8) выражены через полиномы Чебышева второго рода  $U_k$  от комбинации параметров  $\alpha_1, \alpha_2$  [2], а именно

$$j^k = \alpha_2^{\frac{k-1}{2}} U_{k-1} \left( \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}} \right) - j \alpha_2^{\frac{k}{2}} U_{k-2} \left( \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}} \right).$$

В полярной системе координат степени  $z_1^n$  представимы в разделяющихся по  $r, \varphi$  функциями и имеют вид

$$z_1^n C = \frac{r^n}{2^n} ((1 - ij)e^{i\varphi} + (1 + ij)e^{-i\varphi})^n C \quad (9)$$

Однако часть, зависящая от  $\varphi$  имеет вид тригонометрического многочлена и не образует ортогональной системы. В работе [3] была построена система многочленов, обозначенных  $Dor^{(n)}(z_1)$ , действительная часть которых  $Dor^{(n)}(z_1)$  т.е. часть без  $j_1$ , на окружности заданного радиуса  $r_0$  выходит на выражения

$$Dor^{(n)}(z_1)C|_{r=r_0} = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad (10)$$

т.е. выражены членами ряда Фурье.

Напомним, что, согласно [3], многочлен  $Dor^{(n)}(z_1)$  представим в виде линейной комбинации степеней  $z_1^i$  вида

$$Dor^{(n)}(z_1) = \sum_{k=0}^p z_1^{n-2k} 2^{-2k} r_0^{2k} a^k \bar{a}^k S_n^{(k)}$$

при  $a = 1 + ij, \bar{a} = 1 - ij$  и числа  $S_n^{(k)}$  определены из рекуррентных соотношений. Например, для  $n = (1, 4)$  запишем

$$Dor^{(1)}(z_1) = z_1, \quad Dor^{(2)}(z_1) = z_1^2 - \frac{1}{2} r_0^2 a \bar{a},$$

$$Dor^{(3)}(z_1) = z_1^3 - \frac{3}{4} r_0 a \bar{a} z_1, \quad Dor^{(4)}(z_1) = z_1^4 - r_0^2 a \bar{a} z_1^2 + 2^{-3} r_0^4 a_2 \bar{a}_2.$$

Значения этих многочленов легко вычисляются.

Очевидно, что на окружности радиуса  $r_0$  многочлены  $Dor^{(n)}(z)C$  образуют ортогональную систему.

Если ввести обозначения

$$(1 + ij)^n = (p_1^{(n)} + ip_2^{(n)} + j(q_1^{(n)} + iq_2^{(n)})), \quad (11)$$

$$C_n = C_{n1} + jC_{n2}, \quad (12)$$

то коэффициенты  $C_{n1}, C_{n2}$  найдем через заданные значения  $a_n, b_n$

$$\begin{cases} C_{n1} = \frac{2^{n-1}}{r_0^n \Delta} (-a_n q_2^{(n)} + b_n p_1^{(n)}), \\ C_{n2} = \frac{2^{n-1}}{r_0^n \Delta} (p_1^{(n)} b_n - p_2^{(n)} a_n) \end{cases} \quad (13)$$

при

$$\Delta = \alpha_2(-p_1^{(n)} q_2^{(n)} + p_2^{(n)} q_1^{(n)}). \quad (14)$$

Это открывает возможность решения первой краевой задачи, если только заданная окружности функция  $g(\varphi)$  представлена рядом Фурье.

$$g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (15)$$

Таким образом, ряд

$$f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} z_1^n C_n \quad (16)$$

дает решение краевой задачи (11), где коэффициенты  $C_n$  линейно выражены через  $a_n$ ,  $b_n$ , как это показано (13), (14).

Укажем, что путем некоторого аффинного преобразования уравнение (7) можно привести к обычным уравнениям Лапласа, но вид границы области при этом изменяется и окружность переходит в эллипс.

Покажем, что система (6) и (7) определяет потенциал и функцию тока для процесса переноса в анизотропной среде.

Система для двумерного стационарного физического процесса переноса, где выполнен закон линейной связи плотности потока и компонент градиента потенциала, для потенциала и функции потока  $\Psi_c$  имеет вид [4]

$$\lambda_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_c}{\partial y}, \quad \lambda_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi_c}{\partial x}, \quad (17)$$

где  $\lambda_{ik}$  компоненты тензора проводимости.

В матричной форме систему (17) запишем

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{12} & 1 \\ \lambda_{22} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi_c \end{pmatrix} \quad (18)$$

Введем новую функцию  $\Psi$  с помощью преобразования

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda_{21} & \lambda_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}.$$

Совершив ряд преобразований над (18) придем к системе

$$(-j \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})(\Phi + j\Psi) = 0, \quad (19)$$

где  $j$  - матрица вида

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}} \\ 1 & -\frac{\lambda_{11} + \lambda_{21}}{\lambda_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Эта матрица удовлетворяет условию (1). Таким образом, показано, что любая функция параметрического комплексного переменного  $z_1$  дает решение двумерной задачи переноса в анизотропной среде.

Введение функций  $f(z_1, z_2)$  позволяет получить класс решений для трехмерных задач теории переноса в анизотропной среде. Очевидно, что полученные результаты могут быть

использованы при решении задач электро- и магнитостатики.

### Литература

1. Мирович И. С. Алгебраические методы при решении некоторых классов дифференциальных уравнений. // Математика в современном мире: материалы 2-й Российской научно-практической конференции 8-9 октября 2004 года, Калуга/ Под ред. Ю.А.Дробышева. - Калуга: Издательство КГПУ им.К.Э.Циолковского, 2004. — С. 112-117.
2. Гладышев Ю. А. Об использовании полиномов П.Л. Чебышева при построении степенных функций сопряженных параметрических комплексных переменных // Вестник Калужского университета . — 2016. —№ 2. —С. 16–17.
3. Гладышев Ю. А. Об одной последовательности многочленов обобщённого комплексного переменного // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016» — Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. — С. 81–84.
4. Мучник Г. Ф. Методы теории теплообмена: учебное пособие для вузов : в 3 ч. / Г. Ф. Мучник, И. Б. Рубашов. — Москва: Высш. шк., 1970.

### References

1. Mironovich I. S. Algebraicheskie metody pri reshenii nekotoryh klassov differentsialnyh uravnenij. // Matematika v sovremennom mire: materialy 2 Rossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii 8-9 oktyabrya 2004 goda, Kaluga/ Yu.A.Drobyshev. - Kaluga: Izdatelstvo KGPU im.K.E.Tsiolkovskogo, 2004. — P. 112-117.
2. Gladyshev Yu. A. Ob ispolzovanii polinomov P.L. CHEbyshyova pri postroenii stepennyh funkciy sopryazhennyh parametricheskih kompleksnyh peremennyh // Vestnik Kaluzhskogo universiteta . — 2016. —N 2. —P. 16–17.
3. Gladyshev Yu. A. Ob odnoj posledovatelnosti mnogochlenov obobshchyonnogo kompleksnogo peremennogo // Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternyh tekhnologij: sb. tr. IX mezhdunar. konf. «PMTUKT-2016» — Voronezh: «Nauchnaya kniga», 2016. — P. 81–84.
4. Muchnik G. F. Metody teorii teploobmena: uchebnoe posobiye dlya vtuzov: v 3 ch. / G. F. Muchnik, И. Б. Rubashov. — Moscow: Vyssh. shk., 1970.

### Сведения об авторе

Гладышев Юрий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского.

### GENERALIZED METHODS OF THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF TRANSPORT THEORY IN AN ANISOTROPIC MEDIUM

Yu.A. Gladyshev

Tsiolkovsky Kaluga State University

Abstract. The solution of first boundary problem for equation of transfer process in anisotropic media is given. for solution of this problem the generalized methods of theory of functions of a complex variable is applied.

**Key words:** transfer process, conjugate complex variables, anisotropic media.

### About authors

Gladyshev Yuriy Aleksandrovich, doctor physics and mathematics, associated professor, Tsiolkovsky Kaluga State University, v572264@yandex.ru.

УДК 517.983

**О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ МАЛЬМСТЕНА <sup>1</sup>****А.В. Глушак**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. Для абстрактного дифференциального уравнения Мальмстена найдены условия однозначной разрешимости задачи, содержащей оператор Эрдеи-Кобера в дополнительном нелокальном условии.

**Ключевые слова:** нелокальное условие, уравнение Мальмстена, однозначная разрешимость, оператор Эрдеи-Кобера.

Пусть  $A$  — замкнутый оператор в банаховом пространстве  $E$  с плотной в  $E$  областью определения  $D(A)$ . На интервале  $(0, 1]$  рассмотрим дифференциальное уравнение Мальмстена

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) + \frac{l}{t^2}u(t) = t^m Au(t), \quad k, l, m \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Будем искать решение  $u(t) \in C^2([0, 1], E) \cap C((0, 1], D(A))$  уравнения (1), удовлетворяющее нелокальному интегральному условию

$$\lim_{t \rightarrow 1} I_{\sigma, \nu}^{\beta} u(t) = u_1, \quad (2)$$

где  $\beta > 0$ ,  $I_{\sigma, \nu}^{\beta}$  — оператор Эрдеи-Кобера, определяемый равенством (см. [1], с. 246)

$$I_{\sigma, \nu}^{\beta} u(t) = \frac{\sigma}{\Gamma(\beta) t^{\sigma(\beta+\nu)}} \int_0^t s^{\sigma\nu+\sigma-1} (t^{\sigma} - s^{\sigma})^{\beta-1} u(s) ds.$$

Задача (1), (2) с нелокальным условием (2), вообще говоря, не является корректной. В настоящей работе устанавливаются условия, налагаемые на оператор  $A$  и элемент  $u_1 \in E$ , обеспечивающие её однозначную разрешимость.

Среди публикаций, посвящённых исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральным условием для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка отметим работы [2] и [3]. Критерий единственности решения установлен в [4]. Что касается нелокальной задачи (1), (2), то она рассматривается впервые.

Наряду с уравнением Мальмстена (1), при  $k > 0$  рассмотрим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (частный случай уравнения Мальмстена при  $l = m = 0$ )

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t \in (0, 1]. \quad (3)$$

Как следует из результатов работ [5, 6], корректная постановка начальных условий для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (3) состоит в задании в точке  $t = 0$  начального значения

$$u(0) = u_0 \in D(A), \quad (4)$$

и условия

$$u'(0) = 0, \quad (5)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197 А-2016

которое не ставится (снимается) при  $k \geq 1$ , что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при  $t = 0$ .

В работах [5, 6] приводятся также и условия на оператор  $A$ , обеспечивающие корректную разрешимость задачи (3) – (5). Множество операторов  $A$ , с которыми задача (3) – (5) равномерно корректна, обозначим через  $G_k$ .

В частности, если оператор  $A$  ограничен, то  $A \in G_k$  и решение задачи (3) – (5) имеет вид

$$u(t) = Y_k(t)u_0 = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j} A^j u_0}{j! \Gamma((k+1)/2 + j)} = {}_0F_1\left(\frac{k+1}{2}; \frac{t^2}{4} A\right) u_0, \quad u_0 \in E, \quad (6)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция,  ${}_pF_q(\cdot)$  — обобщённая гипергеометрическая функция.

В случае неограниченного оператора  $A \in G_k$  при  $u_0 \in D(A)$  решение задачи (3) – (5) имеет вид (см. [5, 6])

$$u(t) = Y_k(t)u_0 = \frac{2^{(k-1)/2} \Gamma((k+1)/2)}{i\pi t^{(k-1)/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{(3-k)/2} I_{(k-1)/2}(t\lambda) R(\lambda^2) u_0 d\lambda, \quad \sigma > \omega, \quad (7)$$

где  $I_\nu(\cdot)$  — модифицированная функция Бесселя,  $\lambda^2$  при  $\operatorname{Re} \lambda > \omega \geq 0$  принадлежит резольвентному множеству  $\rho(A)$  оператора  $A$ , а  $R(\lambda^2) = (\lambda^2 I - A)^{-1}$  — его резольвента.

В формулах (6), (7) через  $Y_k(t)$  обозначена операторная функция Бесселя (ОФБ) — разрешающий оператор задачи (3) – (5).

В работе [7] было показано, что ОФБ  $Y_k(t)$  может быть использована для построения решений весовых задач Коши для абстрактного уравнения Мальмстена (1) (классическое уравнение Мальмстена рассмотрено в [8], с. 113) и доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\mu = \sqrt{(k-1)^2 - 4l}/(m+2) \geq 0$ ,  $u_0 \in D(A)$  и оператор  $A \in G_{2\mu+1}$ . Тогда функция

$$u(t) = t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) u_0, \quad \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2} \quad (8)$$

является единственным решением уравнения Мальмстена (1), удовлетворяющим начальному условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{(k-1-\nu(m+2))/2} u(t) = u_0. \quad (9)$$

Следует заметить, что при сделанных в теореме 1 предположениях, для рассматриваемого дифференциального уравнения (1), также как и для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (3) в случае  $k \geq 1$ , второе начальное условие при  $t = 0$  не ставится.

Исследования, касающиеся разрешимости задачи (1), (2) состоят в нахождении начального элемента  $u_0$  в условии (9) по нелокальному условию (2), при этом важную роль будет играть целая функция

$$\chi(k, l, m, \beta, \sigma, \nu; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1 + ((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)) (\lambda/(m+2)^2)^{2j}}{j! \Gamma(\mu+1+j) \Gamma(\beta+\nu+1 + ((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma))},$$

которая называется характеристической функцией нелокального условия (2) и которую в дальнейшем будем обозначать  $\chi(\varpi; \lambda)$ , где  $\varpi = (k, l, m, \beta, \sigma, \nu)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\beta > 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $2\sigma(\nu+1) + \mu(m+2) + 1 - k > 0$ ,  $A$  — ограниченный оператор и  $u_1 \in E$ . Для того, чтобы задача (1), (2) имела единственное

решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре  $\sigma(A)$  оператора  $A$  выполнялось условие

$$\chi(\varpi; \lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(A). \quad (10)$$

**Доказательство.** Для нахождения входящего в равенство (9) начального элемента  $u_0$  к определяемой равенствами (8) и (6) функции  $u(t)$  применим оператор Эрдейи-Кобера  $I_{\sigma, \nu}^{\beta}$ . После элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} I_{\sigma, \nu}^{\beta} u(t) &= I_{\sigma, \nu}^{\beta} t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) u_0 = \left( \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2} \right) \\ &= \frac{\sigma}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{t^{\sigma(\beta+\nu)}} \int_0^t s^{\sigma\nu+\sigma-1+(1-k+\mu(m+2))/2} (t^\sigma - s^\sigma)^{\beta-1} Y_{2\mu+1} \left( \frac{2s^{(m+2)/2}}{m+2} \right) u_0 ds = \\ &= \frac{\sigma}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{t^{\sigma(\beta+\nu)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Au_0/(m+2)^2)^j}{j! \Gamma(\mu+1+j)} \int_0^t s^{\sigma\nu+\sigma-1+(1-k+\mu(m+2))/2} (t^\sigma - s^\sigma)^{\beta-1} ds. \end{aligned}$$

Вычисляя последний интеграл, в силу условия (2), приходим к уравнению

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1+((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)) (Au_0/(m+2)^2)^j}{j! \Gamma(\mu+1+j) \Gamma(\beta+\nu+1+((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma))} = u_1. \quad (11)$$

Пусть  $\Omega$  — открытое множество комплексной плоскости, содержащее спектр  $\sigma(A)$  ограниченного оператора  $A$ , и граница которого  $\partial\Omega$  состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда, записывая для оператора, стоящего в левой части (11), представление через резольвенту, перепишем уравнение (11) в виде

$$Bu_0 \equiv \int_{\partial\Omega} \chi(\varpi; \lambda) R(\lambda) u_0 d\lambda = u_1. \quad (12)$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1), (2) с ограниченным оператором  $A$  является разрешимость уравнения (12), т.е. отсутствие в спектре  $\sigma(B)$  оператора  $B$  точки  $\lambda = 0$ . Равенство (12) означает, что оператор  $B$  является аналитической функцией оператора  $A$ ,  $B = \chi(\varpi; A)$ . По теореме об отображении спектра ограниченного оператора  $\sigma(B) = \chi(\varpi; \sigma(A))$ . Таким образом, значение  $\lambda = 0$  не является точкой спектра оператора  $B$  только тогда, когда на спектре  $\sigma(A)$  не обращается в нуль функция  $\chi(\varpi; \lambda)$  или, что тоже самое, выполнено условие (10).

При выполнении условия (10) начальный элемент  $u_0 = B^{-1}u_1$ , а решение задачи (1), (2) с ограниченным оператором  $A$  определяется равенствами (8) и (6). *Теорема доказана.*

В случае, когда параметры  $\sigma$  и  $\nu$  подобраны специальным образом, а именно:  $\sigma = m+2$ ,  $\nu = \mu/2 + (k-1)/(2m+4)$  и  $z = 2\sqrt{\lambda}/(m+2)$ , то

$$\chi(\varpi; \lambda) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+1)} {}_0F_1 \left( \beta+\mu+1; \frac{z^2}{4} \right) = \Gamma(\mu+1) \left( \frac{2}{z} \right)^{\beta+\mu} I_{\beta+\mu}(z),$$

где  $I_{\beta+\mu}(z)$  — модифицированная функция Бесселя, и справедливо утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $\mu \geq 0$ ,  $\sigma = m+2$ ,  $\nu = \mu/2 + (k-1)/(2m+4)$ ,  $A$  — ограниченный оператор,  $u_1 \in E$ . Для того, чтобы нелокальная задача (1), (2) при указанных значениях параметров имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на



спектре  $\sigma(A)$  оператора  $A$  выполнялось условие

$$I_{\beta+\mu} \left( \frac{2\sqrt{\lambda}}{m+2} \right) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(A). \quad (13)$$

Если выполнены условия теоремы 3 и, кроме того,  $k \geq 1$ ,  $l = m = 0$ , то нелокальная задача (1), (2) для уравнение Мальмстена превращается в нелокальную задачу для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, которая исследована в [9], а соответствующая характеристическая функция в этом случае имеет вид

$$\chi(\varpi; \lambda) = \Gamma \left( \frac{k+1}{2} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \right)^{(k-1)/2+\beta} I_{(k-1)/2+\beta} (\sqrt{\lambda}).$$

Поэтому распределение и асимптотика нулей  $\lambda_j = \lambda_j((k-1)/2 + \beta)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  функции  $\chi(\varpi; \lambda)$  известны (см. [8], гл. 15), а именно, все нули простые, отрицательные и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j}{j^2} = -\pi^2. \quad (14)$$

Из доказанной теоремы 2 следует, что расположение нулей функции  $\chi(\varpi; \lambda)$  определяет однозначную разрешимость задачи (1), (2) с ограниченным оператором  $A$ . Для уравнения (1) с неограниченным оператором  $A$  условие вида (10) уже не будет достаточным условием однозначной разрешимости, хотя расположение нулей также играет важную роль.

Установим далее необходимое условие единственности решения обратной задачи (1), (2) с неограниченным оператором  $A$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\mu \geq 0$ ,  $A$  — линейный замкнутый оператор в  $E$ . Предположим, что нелокальная задача (1), (2) имеет решение  $u(t)$ . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  целой функции  $\chi(\varpi; \lambda)$  не являлся собственным значением оператора  $A$ .

*Доказательство.* Предположим, что некоторый нуль  $\lambda_0$  из счётного множества нулей функции  $\chi(\varpi; \lambda)$  является собственным значением оператора  $A$  с собственным вектором  $h_0 \neq 0$ . Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\vartheta(t; \lambda_0) = t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) = t^{(1-k+\mu(m+2))/2} {}_0F_1 \left( \mu+1; \frac{\lambda_0 \tau^2}{4} \right), \quad \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2}$$

является решением скалярной задачи

$$\vartheta''(t; \lambda_0) + \frac{k}{t} \vartheta'(t; \lambda_0) + \frac{l}{t^2} \vartheta(t; \lambda_0) = \lambda_0 t^m \vartheta(t; \lambda_0), \quad t \in (0, 1],$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} I_{\sigma, \nu}^\beta \vartheta(t; \lambda_0) = 0.$$

Отметим лишь, что имеет место именно нулевое нелокальное условие, поскольку  $\lambda_0$  — нуль функции  $\chi(\varpi; \lambda)$ . Поэтому функция  $u(t) = \vartheta(t; \lambda_0) h_0$  является ненулевым решением однородной ( $u_1 = 0$ ) нелокальной задачи (1), (2). Тем самым решение задачи (1), (2) будет заведомо неединственным, если оно будет существовать. *Теорема доказана.*

Переходим теперь к достаточному условию однозначной разрешимости задачи (1), (2) с неограниченным оператором  $A$ . Также как и при доказательстве теоремы 2, нам предстоит

найти начальный элемент  $u_0$  из уравнения

$$\lim_{t \rightarrow 1} I_{\sigma, \nu}^{\beta} t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) u_0 = u_1, \quad \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2}, \quad (15)$$

где ОФБ  $Y_{2\mu+1}(\tau)$  определяется равенством (7).

После элементарных преобразований левую часть уравнения (15) представим в виде

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} I_{\sigma, \nu}^{\beta} t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) u_0 &= \frac{\sigma}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 s^{\sigma\nu+\sigma-1} (1-s^\sigma)^{\beta-1} \times \\ &\times \frac{2^\mu}{i\pi} \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^\mu} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{1-\mu} I_\mu(\xi\lambda) R(\lambda^2) u_0 d\lambda ds = \left( \xi = \frac{2s^{(m+2)/2}}{m+2} \right) \\ &= \frac{\sigma}{i\pi} \frac{(m+2)^\mu}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{1-\mu} R(\lambda^2) u_0 \times \\ &\times \int_0^1 s^{\sigma\nu+\sigma-k/2-1/2} (1-s^\sigma)^{\beta-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda s^{m/2+1}/(m+2)^2)^{2j+\mu}}{j! \Gamma(\mu+1+j)} ds d\lambda = \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda R(\lambda^2) u_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1 + ((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)) (\lambda/(m+2))^{2j}}{j! \Gamma(\mu+1+j) \Gamma(\beta+\nu+1 + ((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma))} d\lambda = \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \chi(\varpi; \lambda^2) \lambda R(\lambda^2) u_0 d\lambda. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая представление (16), уравнение (15) перепишем в виде

$$Bu_0 \equiv \frac{1}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \chi(\varpi; \lambda^2) \lambda R(\lambda^2) u_0 d\lambda = u_1. \quad (17)$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1), (2) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора  $B : D(A) \rightarrow E$ , заданного соотношением (17) и продолженного по непрерывности на  $E$ , обратного оператора, определённого на некотором подмножестве из  $D(A)$ .

Как уже отмечалось ранее, при доказательстве достаточного условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) с неограниченным оператором  $A$  важную роль играют распределение и асимптотика нулей функции  $\chi(\varpi; \lambda)$ , поэтому мы рассмотрим частный случай, когда распределение и асимптотика нулей функции  $\chi(\varpi; \lambda)$  известны.

**Условие 1.** Пусть  $\mu \geq 0$ ,  $\sigma = m+2$ ,  $\nu = \mu/2 + (k-1)/(2m+4)$ , а каждый нуль  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  функции

$$\chi(\varpi; \lambda) = \Gamma(\mu+1) \left( \frac{m+2}{\sqrt{\lambda}} \right)^{\beta+\mu} I_{\beta+\mu} \left( \frac{2\sqrt{\lambda}}{m+2} \right) \quad (18)$$

принадлежит резольвентному множеству  $\rho(A)$  оператора  $A$  и существует такое  $d > 0$ , что

$$\sup_{j=1,2,\dots} \|R(\lambda_j)\| \leq d.$$

Будем считать условие 1 выполненным. Поскольку каждый нуль  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  определяемой равенством (18) функции  $\chi(\varpi; \lambda)$  принадлежит  $\rho(A)$ , то он принадлежит  $\rho(A)$  вместе с круговой окрестностью  $\Omega_j$  радиуса  $1/d$ , границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим  $\gamma_j$ . Пусть  $\Upsilon_0$  — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой  $\operatorname{Re} z = \sigma_0 > \omega$ ,  $\Upsilon_0^2$  — парабола, образ  $\Upsilon_0$  при отображении

$$w = z^2 \quad (z \in \Upsilon_0, \quad w \in \Upsilon_0^2), \quad \Xi = \Upsilon_0^2 \bigcup_{j=1,2,\dots} \gamma_j.$$

Возьмём  $\lambda_0 \in \rho(A)$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_0 > \sigma > \sigma_0$  и выберем  $n \in \mathbb{N}$  так, чтобы

$$n > \max\{(k + 2\beta + 2\mu + 3)/4, (\beta + \mu + 5/2)/2\}. \quad (19)$$

Введём в рассмотрение ограниченный оператор

$$Hv = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Xi} \frac{R(z) v \, dz}{\chi(\varpi; z)(z - \lambda_0)^n}, \quad H : E \rightarrow E. \quad (20)$$

Покажем, что интеграл в (20) при выполнении условия 1 абсолютно сходится. Действительно, в силу выбора контура  $\Upsilon_0^2$ , неравенства (см. [5, 6])

$$\|\lambda^{1-k/2} R(\lambda^2)\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{k/2+1}}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega$$

и асимптотического поведения модифицированной функции Бесселя

$$I_\nu(\lambda) = \frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad |\arg \lambda| < \pi/2$$

интеграл

$$\int_{\Upsilon_0^2} \frac{R(z) \, dz}{\chi(\varpi; z)(z - \lambda_0)^n} = \frac{2}{(m+2)^{\beta+\mu} \Gamma(\mu+1)} \int_{\Upsilon_0} \frac{\lambda^{(k+1)/2+\beta+\mu} \lambda^{1-k/2} R(\lambda^2) \, d\lambda}{\sqrt{\lambda} I_{\beta+\mu}(2\lambda/(m+2)) (\lambda^2 - \lambda_0)^n}$$

абсолютно сходится, поскольку, как следует из (19),  $2n > (k+1)/2 + \beta + \mu + 1$ .

Рассмотрим теперь интеграл по  $\bigcup_{j=1,2,\dots} \gamma_j$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\bigcup_{j=1,2,\dots} \gamma_j} \frac{R(z) \, dz}{\chi(\varpi; z)(z - \lambda_0)^n} &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R(\lambda_j)}{\chi'(\varpi; \lambda_j) (\lambda_j - \lambda_0)^n} = \\ &= - \frac{(m+2)^{1-\beta-\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^{(\beta+\mu)/2+3/4} R(\lambda_j)}{\lambda_j^{1/4} I_{\beta+\mu+1}(2\sqrt{\lambda_j}/(m+2)) (\lambda_j - \lambda_0)^n}, \end{aligned}$$

и абсолютная сходимость полученного ряда вытекает из условия 1, асимптотического

поведения модифицированной функции Бесселя и асимптотики (14) нулей модифицированной функции Бесселя, поскольку, как следует из (19),  $2n > \beta + \mu + 5/2$ .

**Теорема 5.** Пусть выполнено условие 1 и  $A \in G_{2\mu+1}$ . Если  $u_1 \in D(A^{n+1})$ , где число  $n \in \mathbb{N}$  выбрано так, чтобы выполнялось неравенство (19), то задача (1), (2) имеет единственное решение.

*Доказательство.* Как уже было отмечено, существование единственного решения задачи (1), (2) сводится к существованию обратного у ограниченного оператора  $B$ , определяемого равенствами (17) и (18). Покажем, что оператор  $B$  имеет обратный оператор  $B^{-1} : D(A^n) \rightarrow E$ .

Пусть  $v \in D(A)$ ,  $\sigma_0 < \sigma < \operatorname{Re} \xi$ . Тогда, подставляя определяемый равенством (17) оператор  $B$  в (20) и применяя тождество Гильберта

$$R(z)R(\xi^2) = \frac{R(z) - R(\xi^2)}{\xi^2 - z},$$

получим равенство

$$\begin{aligned} HBv &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Xi} \frac{R(z)}{\chi(\varpi; z)(z - \lambda_0)^n} \frac{1}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \chi(\varpi; \xi^2) \xi R(\xi^2) v \, d\xi dz = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\Xi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left( \frac{\xi \chi(\varpi; \xi^2) R(z) v}{\chi(\varpi; z) (z - \lambda_0)^n (\xi^2 - z)} - \frac{\xi \chi(\varpi; \xi^2) R(\xi^2) v}{\chi(\varpi; z) (z - \lambda_0)^n (\xi^2 - z)} \right) d\xi dz. \end{aligned} \quad (21)$$

Интеграл в (21) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} HBv &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\Xi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\xi \chi(\varpi; \xi^2) R(z) v \, d\xi dz}{\chi(\varpi; z) (z - \lambda_0)^n (\xi^2 - z)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi \chi(\varpi; \xi^2) R(\xi^2) v \int_{\Xi} \frac{dz}{\chi(\varpi; z) (z - \lambda_0)^n (\xi^2 - z)} d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Если контур интегрирования  $\Upsilon_0^2$  замкнуть влево, не пересекая  $\bigcup_{j=1,2,\dots} \gamma_j$ , то внутренний интеграл во втором слагаемом (22) обратится в нуль в силу выбора контура  $\Xi$  и теоремы Коши для многосвязной области. А для вычисления интегралов в первом слагаемом (22), используем интегральную формулу Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{aligned} HBv &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\Xi} \int_{\Upsilon} \frac{\xi \chi(\varpi; \xi^2) R(z) v \, d\xi dz}{\chi(\varpi; z) (z - \lambda_0)^n (\xi^2 - z)} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Xi} \int_{\Upsilon^2} \frac{\chi(\varpi; \lambda) R(z) v \, d\lambda dz}{\chi(\varpi; z) (z - \lambda_0)^n (\lambda - z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Xi} \frac{R(z) v \, dz}{(z - \lambda_0)^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon_0^2} \frac{R(z) v \, dz}{(z - \lambda_0)^n} = \\ &= \frac{-1}{(n-1)!} R^{(n-1)}(\lambda_0) v = (-1)^n R^n(\lambda_0) v. \end{aligned}$$

Коммутирующие операторы  $H$ ,  $B$ ,  $R^n(\lambda_0)$  ограничены и область определения  $D(A)$

плотна в  $E$ , поэтому равенство  $HBv = (-1)^n R^n(\lambda_0)v$  справедливо и для  $v \in E$ , и при этом  $HB : E \rightarrow D(A^n)$ . Отсюда следует, что оператор  $B^{-1}v = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n H v$  при  $v \in D(A^n)$  является обратным по отношению к  $B$ ,  $B^{-1} : D(A^n) \rightarrow E$ . Действительно,

$$BB^{-1}v = (-1)^n B(\lambda_0 I - A)^n H v = (-1)^n BH(\lambda_0 I - A)^n v = R^n(\lambda_0)(\lambda_0 I - A)^n v = v, \quad v \in D(A^n),$$

$$B^{-1}Bv = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n HBv = (\lambda_0 I - A)^n R^n(\lambda_0)v = v, \quad v \in E.$$

Возвращаясь к задаче (1), (2), определим принадлежащий  $D(A)$  начальный элемент  $u_0 = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n H u_1$ , где  $u_1 \in D(A^{n+1})$ , оператор  $H$  задан равенством (20),  $\lambda_0 \in \rho(A)$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_0 > \sigma_0 > \omega$ . Тогда единственное решение  $u(t)$  задачи (1), (2) имеет вид

$$u(t) = t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) u_0, \quad \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2},$$

где ОФБ  $Y_{2\mu+1}(\tau)$  определена равенством (7). Теорема доказана.

### Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.
2. Тихонов И.В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Диф. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 841 – 843.
3. Сильченко Ю.Т. Уравнение параболического типа с нелокальными условиями. СМФН. 2006. Т. 17. С. 5 – 10.
4. Тихонов И.В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений. Изв. РАН. Сер. матем. 2003. **67**: 2. 133 – 166.
5. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя. ДАН. 1997. **352**: 5, С. 587 – 589.
6. Глушак А. В., Покручин О. А. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Диф. уравнения. 2016. Т. 52, № 1. С. 41 – 59.
7. Глушак А.В., Покручин О.А. О свойствах весовых задач Коши для абстрактного уравнения Мальмстена. Научные Ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2011. № 17(112). Вып. 24. С. 102 – 110.
8. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Иностранная литература. 1949.
9. Глушак А.В. Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, Изв. вузов. Матем. 2016, № 6. С. 27 -- 35.

### References

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach Sciencch Publishers, Switzerland. 1993.
2. Tikhonov I.V. On the solvability of the problem with a nonlocal condition for a differential equation in a Banach space. Differ. Uravn. 1998, 34, no. 6, pp. 841 -- 843.
3. Sil'chenko Yu.T. A parabolic equation with nonlocal conditions. Journal of Mathematical Sciences. 2008, 149:6, pp. 1701–1707.
4. Tikhonov I.V. Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations. Izvestiya: Mathematics. 2003, 67:2, pp. 333 -- 363.
5. Glushak A.V. The Bessel Operator Function. Dokl. Ross. Akad. Nauk. 1997, vol. 352, no. 5, pp. 587–589.
6. Glushak A.V., Pokruchin O.A. Criterion for the solvability of the cauchy problem for an abstract Euler–Poisson–Darboux equation. Differential Equations. 2016, Vol. 52, no. 1, pp. 39 – 57.

7. *Glushak A.V., Pokruchin O.A.* About Cauchy weight problem properties for an abstract Malmsten equation. Scientific Bulletin of BelSU. Ser. Mathematics. Physics. 2011. 17 (112). Iss. 24. Pp. 102 – 110 (in Russian).
8. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 1945.
9. *Glushak A.V.* Abstract Euler-Poisson-Darboux equation with nonlocal condition. Russian Mathematics. 2016. Vol. 60, № 6. Pp. 21–28.

#### Сведения об авторе

Глушак Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, aleglu@mail.ru

#### ON SOLVABILITY OF NON-LOCAL PROBLEM FOR MALMSTEN ABSTRACT EQUATION

**A.V. Glushak**

Belgorod State University

Abstract. The conditions concerning the unique solvability of nonlocal problems for Malmsten abstract differential equation were found. The non-local conditions contain either Erdeyi-Kober operator.

**Keywords:** *nonlocal condition, the unique solvability of Malmsten equation, Erdeyi-Kober operator.*

#### About author

Alexander V. Glushak, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Belgorod State University, aleglu@mail.ru.

УДК 517.55.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА БЕРГМАНА В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ НАД СВЕТОВЫМИ КОНУСАМИ БУДУЩЕГО <sup>2</sup>

С. М. Куриленко, Р. Ф. Шамоян

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Аннотация. В работе приводятся некоторые новые утверждения об интегральных операторах типа Бергмана, действующих в новых пространствах Бергмана на полупроизведении трубчатых областей над световыми конусами будущего (труб будущего).

**Ключевые слова:** оператор типа Бергмана, труба будущего.

Утверждение о том, что проектор Бергмана является ограниченным оператором в аналитических пространствах типа Бергмана является фундаментальным фактом теории аналитических пространств в единичном круге (см. [5], [6], [7]). Этот факт имеет много приложений в теории функций одного комплексного переменного, а также в теории операторов и смежных областях. Различные аналоги и обобщения этого результата на случай областей более высокой размерности также хорошо известны в литературе (см. [5], [6], [7]).

Трубой будущего  $T_\Omega$  называется неограниченная область, имеющая вид

$$T_\Omega = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n : (Im z_1)^2 > (Im z_2)^2 + \dots + (Im z_n)^2, Im z_1 > 0\}$$

Иными словами, труба будущего является трубчатой областью над световым конусом будущего

$$\Omega = \{x \in R^n : x_1^2 > x_2^2 + \dots + x_n^2, x_1 > 0\}.$$

Детерминантом этого конуса будем называть величину (см. [8])

$$\Delta(x) = x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2.$$

Область  $T_\Omega$  играет важную роль в математической физике, особенно в аксиоматической квантовой теории поля, будучи естественной областью определения голоморфных релятивистских полей. Эти особенности трубы будущего лежали в основе ее изучения как математиками, так и физиками (см. например [8]).

Через  $H(T_\Omega)$  будем обозначать пространство аналитических функций в трубе будущего.

Определим функциональные пространства Бергмана при  $1 \leq p, q < \infty$ ,  $\gamma > \frac{n}{2} - 1$ . Пусть

$$(A_\gamma^{p,q})(T_\Omega) = \left\{ f \in H(T_\Omega) : \left( \int_\Omega \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} (\Delta^{\gamma-\frac{n}{2}}(y)) dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

При  $p = q$  имеем (см. [1])

$$A_\nu^{p,q}(T_\Omega) = A_\nu^p(T_\Omega).$$

Это классическое весовое пространство Бергмана в трубе будущего  $T_\Omega$ . Подобные классы интенсивно изучались в последние годы (см., например, [1]).

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1704.2014К)

Пусть далее  $1 \leq p < \infty$ ,  $f = f(z_1, \dots, z_m)$ ,  $z_j \in T_\Omega$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Рассмотрим аналитические подпространства  $H(T_\Omega^m)$ ,  $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ ,  $\nu_j > \frac{n}{2} - 1$ ,  $\nu > \frac{n}{2} - 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Это пространства  $(A_\nu^p)_1$ ,  $(A_\nu^p)_2$ ,  $(A_\nu^p)_3$  с нормами

$$\|f\|_{(A_\nu^p)_1}^p = \int_{T_\Omega} \dots \int_{T_\Omega} |f(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|^p \prod_{j=1}^m \Delta^{\nu_j - \frac{n}{2}}(y_j) dx_j dy_j < \infty$$

$$\|f\|_{(A_\nu^p)_2}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} |f(x_1 + iy, \dots, x_m + iy)|^p \Delta^{\nu - \frac{n}{2}}(y) \prod_{j=1}^m dx_j dy < \infty$$

$$\|f\|_{(A_\nu^p)_3}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} |f(x + iy_1, \dots, x + iy_m)|^p \prod_{j=1}^m \Delta^{\nu_j - \frac{n}{2}}(y_j) dx dy_j < \infty$$

Очевидно что в частном случае  $m = 1$  имеем классическое пространство Бергмана в трубчатой области  $T_\Omega$ , то есть  $A_\gamma^p(T_\Omega)$ .

Возникает естественная проблема: найти связь между этими нормами и доказать теоремы вложения для данных пространств  $(A_\nu^p)_1$ ,  $(A_\nu^p)_2$ ,  $(A_\nu^p)_3$ . В случае единичного круга эта проблема решена в [3], [4].

Обозначим для  $g \in L^1(T_\Omega^m)$

$$(V_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} g)(\vec{w}) = \underbrace{\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega}}_m \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(x + iy_1, \dots, x + iy_m) (\Delta y_1)^{\beta_1} \dots (\Delta y_m)^{\beta_m}}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\alpha_j} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} dx dy_1 \dots dy_m$$

$$(U_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} g)(\vec{w}) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n}}_m \int_{\Omega} \frac{g(x_1 + iy, \dots, x_m + iy) (\Delta y)^{\beta}}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\alpha_j} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} dy dx_1 \dots dx_m$$

$w = (w_1, \dots, w_m)$ ,  $w_j \in T_\Omega$ ,  $j = 1 \dots m$ ,  $\beta_j > \frac{n}{2} - 1$ ,  $\beta > \frac{n}{2} - 1$ ,  $\alpha_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  или  $\vec{\beta} = (\beta, \dots, \beta)$ .

Пусть также для  $g \in L^1(T_\Omega^m)$

$$[G_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}(g)](x + iy_1, \dots, x + iy_m) = \int_{T_\Omega} \frac{g(w) [\Delta^\beta(Im w)] dv(w)}{\left[ \prod_{j=1}^m \Delta^{\alpha_j} \left( \frac{w - (\bar{x} + i\bar{y}_j)}{i} \right) \right]};$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_j \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\alpha_j > 0$ ,  $\beta > \frac{n}{2} - 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

$$[\tilde{G}_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}(g)](x_1 + iy, \dots, x_m + iy) = \int_{T_\Omega} \frac{g(w) [\Delta^\beta(Im w)] dv(w)}{\left[ \prod_{j=1}^m \Delta^{\alpha_j} \left( \frac{w - (\bar{x}_j + i\bar{y})}{i} \right) \right]};$$

$$\beta > \frac{n}{2} - 1, j = 1, \dots, m; \alpha_j > 0,$$

$x_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $y \in \Omega$ .

Здесь  $dv$  обозначает меру Лебега на  $T_\Omega$ . Ядро Бергмана с весом  $B_\nu$  в  $T_\Omega$  задается как обычно следующим образом

$$B_\nu(w, z) = (d_\nu) \Delta \left( \frac{w - \bar{z}}{i} \right)^{-\nu - \frac{n}{2}}.$$



Ниже приведены некоторые известные оценки для интегралов, содержащих детерминанты и ядро Бергмана. Они доказаны в [1] для более общего случая симметрических конусов.

**Лемма 1.** (оценки  $\Delta^t$  функции и ядра Бергмана, см. [1].

1) Зафиксируем  $\lambda > \frac{n}{2} - 1$ . Тогда  $\Delta(y + y') \geq \Delta(y)$ ;  $\forall y, y' \in \Omega$ ,  $|\Delta^{-\lambda}(\frac{x+iy}{i})| \leq (\Delta(y))^{-\lambda}$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ;  $y \in \Omega$ .

2) Пусть  $\alpha, \beta$  - действительное число, тогда

$$I_{\alpha, \beta}(t) = \int_{\Omega} (\Delta^{\alpha}(y+t))(\Delta^{\beta}(y)) dy < \infty$$

если  $\beta > -1$ ,  $\alpha + \beta < (-n + 1)$ , и

$$I_{\alpha, \beta}(t) = (c_{\alpha, \beta}) \Delta^{\alpha + \beta + \frac{n}{2}}(t) \quad (1)$$

Более того

$$I_{\alpha}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{-\alpha}(\frac{x+iy}{i})| dx < \infty$$

если  $\alpha > n - 1$ , то

$$I_{\alpha}(y) = c_{\alpha} (\Delta^{-\alpha + \frac{n}{2}}(y)) \quad (2)$$

где  $y \in \Omega$ .

3) При  $\beta > -1$ ,  $\alpha > \frac{n}{2} - 1$ ,  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,  $w, z \in T_{\Omega}$  имеем

$$\int_{T_{\Omega}} (\Delta^{\beta}(y)) |B_{\alpha + \beta + \frac{n}{2}}(z, w)| dv(z) \leq c \Delta^{-\alpha}(v), v \in \Omega \quad (3)$$

В [2] нами доказаны в частности следующие утверждения (все параметры ниже предполагаются положительными):

**Теорема 1.** Для  $1 \leq p < \infty$ , некоторых  $\alpha_j \in (\alpha_0, \alpha'_0)$ ;  $\beta_j \in (\beta_0, \beta'_0)$ ,  $\beta \in (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}'_0)$ ,  $\nu_j > (\frac{n}{2} - 1)$ ,  $\tau_j > (\frac{n}{2} - 1)$ ,  $j = 1, \dots, t$ , для некоторых фиксированных  $\alpha_0^j, (\alpha_0^j)', \beta_0^j, (\beta_0^j)', \tilde{\beta}_0^j, (\tilde{\beta}_0^j)'$ ,  $j = 1, \dots, t$  верны следующие оценки

1)  $\|G_{\tilde{\alpha}, \beta}(g)\|_{(A_{\vec{\nu}}^p)_3} \leq c_1 \|g\|_{(A_{\vec{\tau}}^p)(T_{\Omega})}$ ; для некоторых  $\vec{\nu}$  и  $\tau$ .

2)  $\|\tilde{G}_{\tilde{\alpha}, \beta}(g)\|_{(A_{\vec{\nu}}^p)_2} \leq c_2 \|g\|_{(A_{\vec{\tau}}^p)(T_{\Omega})}$ ; для некоторых  $\nu$  и  $\tau$ .

где  $\alpha_0^j, \dots, (\beta_0^j)'$  зависит от  $\nu_j, \tau_j, p, n, \nu, \tau$ ,  $j = 1, \dots, t$  и где  $c_1, c_2$  - некоторые константы зависящие от параметров.

**Теорема 2.** Для  $1 \leq p < \infty$ , некоторых  $\alpha_j \in (\alpha_0, \alpha'_0)$ ;  $\beta_j \in (\beta_0, \beta'_0)$ ,  $\beta \in (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}'_0)$ ,  $\nu_j > (\frac{n}{2} - 1)$ ,  $\tau_j > (\frac{n}{2} - 1)$ ,  $j = 1, \dots, t$ , для некоторых фиксированных  $\alpha_0^j, (\alpha_0^j)', \beta_0^j, (\beta_0^j)', \tilde{\beta}_0^j, (\tilde{\beta}_0^j)'$ ,  $j = 1, \dots, t$  верны следующие оценки

1)  $\|V_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(g)\|_{(A_{\vec{\nu}}^p)_1} \leq c_3 \|g\|_{(A_{\vec{\tau}}^p)_3(T_{\Omega})}$ ; для некоторых  $\nu$  и  $\vec{\tau}$ .

2)  $\|U_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(g)\|_{(A_{\vec{\nu}}^p)_1} \leq c_4 \|g\|_{(A_{\vec{\tau}}^p)_2(T_{\Omega})}$ ; для некоторых  $\nu$  и  $\vec{\tau}$ .

где  $\alpha_0^j, \dots, (\beta_0^j)'$  зависит от  $\nu_j, \tau_j, p, n, \nu, \tau$ ,  $j = 1, \dots, t$  и где  $c_3, c_4$  - некоторые константы зависящие от параметров.

**Примечание.** Конкретные ограничения на  $\nu$  и  $\vec{\tau}$  задаются следующим образом  $-\sum_{j=1}^m \nu_j + \tau = \beta(1 + \frac{p}{p'}) - p \sum_{j=1}^m \alpha_j + \frac{n}{2}(1 + \frac{2p}{p'})$  (для оператора  $G$ ) и  $-\nu + \tau = \beta(1 + \frac{p}{p'}) - p \sum_{j=1}^m \alpha_j + n/2(m + \frac{2p}{p'})$  (для оператора  $\tilde{G}$ ).

Положим теперь

$$(T_\beta h)(\vec{w}) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n}}_m \int_{\Omega} \frac{h(x_1 + iy, \dots, x_m + iy) \Delta^\beta(y)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\frac{\beta+n/2+mn/2}{m}}(\frac{\bar{x}_j + i\bar{y} - w_j}{i})} dy dx_1 \dots dx_m,$$

где  $\vec{w} = \{w_1, \dots, w_m\} = \{\zeta_1 + i\eta, \dots, \zeta_m + i\eta\} \in T_\Omega$

$$(\tilde{T}_{\vec{\beta}} h)(\vec{w}) = \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(x + iy_1, \dots, x + iy_m) \Delta^{\beta_1}(y_1) \dots \Delta^{\beta_m}(y_m)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\beta_j + \frac{n/2+mn/2}{m}}(\frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i})} dx dy_1 \dots dy_m$$

где  $\vec{w} = \{w_1, \dots, w_m\} = \{\zeta + i\eta_1, \dots, \zeta + i\eta_m\} \in T_\Omega$  и  $\vec{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ , где  $\beta > \frac{n}{2} - 1$ ,  $\beta_j > \frac{n}{2} - 1$ ,  $j = 1 \dots m$ ,  $h \in L^1(T_\Omega^m)$ .

Нами получены также следующие результаты.

**Теорема 3.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\beta > m\frac{n}{2} - m - \frac{n}{2} + \frac{mnp}{2(p-1)}$ ,  $\tau > (p-1)(mn - m - \frac{n}{2}) - 1$  и  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 1$ ,  $\tau - p\beta < 1 - \frac{n}{2}$  тогда

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n}}_m \int_{\Omega} |(T_\beta h)(\vec{w})|^p \Delta^\tau(\eta) d\eta d\zeta_1 \dots d\zeta_m \leq \\ & \leq c \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n}}_m \int_{\Omega} |h(\vec{z})|^p \Delta^\tau(y) dy dx_1 \dots dx_m, \end{aligned}$$

где  $\vec{w} = \{w_1, \dots, w_m\} = \{\zeta_1 + i\eta, \dots, \zeta_m + i\eta\} \in T_\Omega^m$ ,

$\vec{z} = \{z_1, \dots, z_m\} = \{x_1 + iy, \dots, x_m + iy\} \in T_\Omega^m$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\beta_j > \frac{n}{2} - 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\beta_j > 2 + \frac{n}{2} - \frac{n}{p} - \frac{3}{m} - \frac{2}{p} + \frac{n}{2mp} + \frac{2}{mp}$ ,  $\tau_j > \frac{n}{2}p - p - \frac{n}{2}$ ,  $\tau_j - p\beta_j < 1 - \frac{n}{2}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} |(\tilde{T}_{\vec{\beta}} h)(\vec{w})|^p \Delta^{\tau_1}(\eta_1) \dots \Delta^{\tau_m}(\eta_m) d\zeta d\eta_1 \dots d\eta_m \leq \\ & \leq c \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} |h(\vec{z})|^p \Delta^{\tau_1}(y_1) \dots \Delta^{\tau_m}(y_m) dx dy_1 \dots dy_m, \end{aligned}$$

где  $\vec{w} = \{\zeta + i\eta_1, \dots, \zeta + i\eta_m\}$ ,  $\vec{z} = \{z_1, \dots, z_m\} = \{x + iy_j, \dots, z_m + iy_j\}$ ,  $\vec{z} \in T_\Omega^m$ ,  $\vec{w} \in T_\Omega^m$ .

В качестве модельного случая приведем краткую схему доказательства теоремы 4. Остальные результаты доказываются аналогично.

Обозначим

$$I = \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} |(\tilde{T}_{\vec{\beta}} h)(\vec{w})|^p \Delta^{\tau_1}(\eta_1) \dots \Delta^{\tau_m}(\eta_m) d\zeta d\eta_1 \dots d\eta_m; \quad M = |(\tilde{T}_{\vec{\beta}} h)(\vec{w})|^p$$

Прибавим и вычтем  $2 + \varepsilon$  в степени знаменателя:

$$M = \left| \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(x + iy_j, \dots, x + iy_j) \Delta^{\beta_1}(y_1) \dots \Delta^{\beta_m}(y_m)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\beta_j + \frac{n/2 + mn/2}{m} - 2 - \varepsilon} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} dx dy_1 \dots dy_m \right|^p$$

Применив неравенство Гельдера с показателем  $p$ , получим  $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

$$\begin{aligned} M &\leq \left( \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h(x + iy_j, \dots, x + iy_j)|^p \Delta^{p\beta_1}(y_1) \dots \Delta^{p\beta_m}(y_m)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{(\beta_j + \frac{n/2 + mn/2}{m} - 2 - \varepsilon)p + 2} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} dx dy_1 \dots dy_m \right)^{p/p} \times \\ &\times \left( \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx dy_1 \dots dy_m}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\varepsilon p' + 2} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} \right)^{p/p'} \leq \left( \int_{\Omega^m} \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\Delta^{m\varepsilon p' + 2m} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \right. \\ &\left. \times dy_1 \dots dy_m \right)^{p/p'} \end{aligned}$$

Из (1) и (2) при некотором ограничении на  $\varepsilon$  следует

$$\begin{aligned} &\left( \int_{\Omega^m} \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\Delta^{m\varepsilon p' + 2m} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} \right)^{\frac{1}{m}} dy_1 \dots dy_m \right)^{p/p'} = \\ &= c \Delta^{(-\varepsilon p' - 2 + n/(2m) + n/2)p/p'}(\eta_1) \dots \Delta^{(-\varepsilon p' - 2 + n/(2m) + n/2)p/p'}(\eta_m) \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} I &\leq c_1 \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^{(-\varepsilon p' - 2 + n/(2m) + n/2)p/p' + \tau_1}(\eta_1) \dots \\ &\dots \Delta^{(-\varepsilon p' - 2 + n/(2m) + n/2)p/p' + \tau_m}(\eta_m) \times \\ &\times \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h(x + iy_j, \dots, x + iy_j)|^p \Delta^{p\beta_1}(y_1) \dots \Delta^{p\beta_m}(y_m)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{(\beta_j + \frac{n/2 + mn/2}{m} - 2 - \varepsilon)p + 2} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} \\ &dx dy_1 \dots dy_m d\zeta d\eta_1 \dots d\eta_m \end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования, а также применив (1), (2) и неравенство Гельдера снова, получим

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta^{(-\varepsilon p' - 2 + n/(2m) + mn/2)p/p' + \tau_1}(\eta_1) \dots \Delta^{(-\varepsilon p' - 2 + n/(2m) + mn/2)p/p' + \tau_m}(\eta_m)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{(\beta_j + \frac{n/2 + mn/2}{m} - 2 - \varepsilon)p + 2} \left( \frac{\bar{x} + i\bar{y}_j - w_j}{i} \right)} \times \\ &\times d\zeta d\eta_1 \dots d\eta_m \leq c_2 \prod_{j=1}^m \Delta^{\tau_j - p\beta_j}(y_j); y_j \in \Omega, j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

где  $\beta_j$  и  $\tau_j$  удовлетворяют условиям теоремы.

Таким образом:

$$I \leq c_3 \int_{\Omega^m} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x + iy_j, \dots, x + iy_j)|^p \Delta^{\tau_1}(y_1) \dots \Delta^{\tau_m}(y_m) dx dy_1 \dots dy_m$$

Теорема доказана.

### Список литературы

1. *D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, C. Nana, M. Peloso and F. Ricci*, Lecture notes on Bergman projectors in tube domain over cones, an analytic and geometric viewpoint // Proceeding of the International Workshop on Classical Analysis **2** (2001), p. 1–75.
2. *S. Kurilenko, R. Shamoyan*, Bergman-type integral operators on semiproducts of the tube domains over symmetric cones and multifunctional analytic spaces // Kragujevac Journal of Mathematics, Vol. 40 No. 2 (2016), p. 194–222
3. *R. Shamoyan and O. Mihic*, Analytic spaces on expanded disk and bergman-type integral operators on them // Journal of Inequalities and Applications, Article ID 353801, 22 p.
4. *R. Shamoyan and O. Mihic*, On traces of analytic functions in polyballs // AADM (2009), p. 38–48.
5. *K. Zhu*, Theory of function spaces in the unit ball // Graduate Text in Mathematics, 2005, 271 pages.
6. *F. Shamoyan. A. Djrbashian*, Topics in the theory of spaces // Teubner Texte zur Mathematics, Leipzig, 1988.
7. *W. Rudin*, Theory of functions in the unit polydisk, NY, 1969.
8. *Владимиров В.С., Сергеев А.Г.*, Комплексный анализ в трубе будущего // Комплексный анализ – многие переменные – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 8, ВИНТИ, М., 1985, с. 191–266

### References

1. *D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, C. Nana, M. Peloso and F. Ricci*, Lecture notes on Bergman projectors in tube domain over cones, an analytic and geometric viewpoint // Proceeding of the International Workshop on Classical Analysis **2** (2001), p. 1–75.
2. *S. Kurilenko, R. Shamoyan*, Bergman-type integral operators on semiproducts of the tube domains over symmetric cones and multifunctional analytic spaces // Kragujevac Journal of Mathematics, Vol. 40 No. 2 (2016), p. 194–222
3. *R. Shamoyan and O. Mihic*, Analytic spaces on expanded disk and bergman-type integral operators on them // Journal of Inequalities and Applications, Article ID 353801, 22 p.
4. *R. Shamoyan and O. Mihic*, On traces of analytic functions in polyballs // AADM (2009), p. 38–48.
5. *K. Zhu*, Theory of function spaces in the unit ball // Graduate Text in Mathematics, 2005, 271 pages.
6. *F. Shamoyan. A. Djrbashian*, Topics in the theory of spaces // Teubner Texte zur Mathematics, Leipzig, 1988.
7. *W. Rudin*, Theory of functions in the unit polydisk, NY, 1969.
8. *V.S. Vladimirov*, Complex analysis in the future tube, / V. S. Vladimirov, A. G. Sergeev//Complex analysis—several variables – 2, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 8, VINITI, Moscow, 1985, -p. 191–266

### Сведения об авторах

Шамоян Роми Файзоевич, старший научный сотрудник НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, rsham@mail.ru;

Куриленко Сергей Михайлович, лаборант-исследователь НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, SergKurilenko@gmail.com.

### BERGMAN TYPE INTEGRAL OPERATORS IN A TUBULAR DOMAIN OVER THE LIGHT CONE

**S.M. Kurilenko, R.F. Shamoyan**

Bryansk State University

Abstract. We present some new result about Bergman type integral operators, acting in the new Bergman spaces on the future tube.

**Keywords:** *Bergman type operator, light cone.*

### About authors

Shamoyan Romi Faizoevich – PhD, senior researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, rsham@mail.ru.

Kurilenko Sergey Mihaylovich – assistant researcher, Research laboratory of complex and function analysis, SergKurilenko@gmail.com

УДК 517.984

ГИПЕРЦИКЛИЧНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА<sup>3</sup>

А. А. Лишанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. В работе приведены необходимые, а также достаточные условия гиперциклическости операторов Теплица в пространстве Харди с полиномиальной антианалитической частью.

**Ключевые слова:** гиперциклические операторы, операторы Теплица.

Динамика линейных операторов в банаховых или топологических векторных пространствах — интенсивно развивающаяся в последние 25 лет область теории операторов, которой посвящено значительное число работ (см. [1,2]). Особую роль в линейной динамике играет понятие гиперциклического оператора — оператора, у которого существует вектор, имеющий всюду плотную орбиту.

Пусть  $X$  — сепарабельное банахово пространство (или пространство Фреше). Непрерывный линейный оператор  $T$  в пространстве  $X$  называют *гиперциклическим*, если найдется такой вектор  $x \in X$ , что множество  $\{T^n x, n \in \mathbb{N}_0\}$  всюду плотно в  $X$  (здесь  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ).

Оказывается, многие естественные операторы в функциональных пространствах (дифференциальные операторы, операторы композиции, операторы Теплица) обладают свойством гиперциклическости.

Далее, пусть  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  — единичный круг, а  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  — единичная окружность. Обозначим через  $H^2 = H^2(\mathbb{D})$  стандартное пространство Харди в  $\mathbb{D}$ , то есть пространство всех функций вида  $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ , где  $\{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ . Для функции  $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$  оператор Теплица  $T_\psi$  с символом  $\psi$  определяется как  $T_\psi f = P_+(\psi f)$ , где  $P_+$  обозначает ортогональную проекцию из  $L^2(\mathbb{T})$  на  $H^2$ .

Операторы Теплица с антианалитическими символами представляют собой один из основных примеров гиперциклических операторов. Так, С. Ролевич [3] показал, что оператор  $T_{\lambda z}$  (т.е., с точностью до умножения на константу, оператор обратного сдвига) гиперциклический при  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| > 1$ , а Ж. Годфруа и Дж. Шапиро [4] показали, что для голоморфной и ограниченной в  $\mathbb{D}$  функции  $\varphi$  оператор  $T_\varphi$  гиперциклический тогда и только тогда, когда  $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ . В то же время, ясно, что не существует гиперциклических операторов Теплица с аналитическими символами (т.е. операторов умножения на аналитическую функцию).

Тем не менее, феномен гиперциклическости для операторов Теплица общего вида является гораздо менее изученным, и здесь критерии гиперциклическости не известны. Эта задача была явно сформулирована С. Шкариным [5], описавшим гиперциклические операторы Теплица с символами вида  $\Phi(z) = a\bar{z} + b + cz$  (т.е. операторы Теплица с трехдиагональной матрицей в стандартном базисе пространства  $H^2$ ).

В работе [6] исследована гиперциклическость операторов Теплица достаточно общего вида. Даны необходимые, а также достаточные условия гиперциклическости оператора  $T_\Phi$  в случае

$$\Phi(z) = p\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi(z), \quad (1)$$

<sup>3</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МД-5758.2015.1.

где  $p$  — полином, а функция  $\varphi$  лежит в  $H^\infty$  (иногда мы будем предполагать, что  $\varphi$  лежит в диск-алгебре  $A(\mathbb{D})$ ). В случае  $p(z) = \gamma z$  (т. е.  $\Phi \in \bar{z}H^\infty$ ) зазор между необходимыми и достаточными условиями становится особенно малым. Новой в этих условиях является роль однолистности или  $N$ -листности (где  $N$  — степень полинома  $p$ ) символа.

В дальнейшем будем обозначать символом  $\bar{\mathbb{D}}$  замкнутый единичный круг и положим  $\hat{\mathbb{D}} = \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ .

Следующий результат работы [6] применим к случаю, когда антианалитическая часть символа имеет степень 1.

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $\varphi \in H^\infty$  и  $\Phi(z) = \frac{\gamma}{z} + \varphi(z)$ .

1. Если оператор  $T_\Phi$  — гиперциклический, то

- (a) функция  $\Phi$  однолистка в  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ;
- (b)  $\bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$  и  $\hat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ .

2. Предположим, что  $\phi \in A(\bar{\mathbb{D}})$  и

- (a') функция  $\Phi$  однолистка в  $\bar{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ ;
- (b')  $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$  и  $\hat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ .

Тогда оператор  $T_\Phi$  — гиперциклический.

Зазор между необходимыми и достаточными условиями относится только к граничному поведению  $\Phi$ . В то время как необходимо, чтобы отображение  $\Phi$  было однолистно в  $\bar{\mathbb{D}}$ , в достаточном условии мы требуем однолистности вплоть до границы.

В нашем втором результате  $p$  будет полиномом степени  $N$ . Напомним, что аналитическая функция  $h$  в области  $D$  называется  $N$ -листной в  $D$ , если уравнение  $h(z) = w$  имеет не более  $N$  решений в  $D$  с учетом кратности. Заметим, что  $\Phi(z) \sim c_N z^{-N}$ ,  $z \rightarrow 0$ , и поэтому  $\Phi(z) = w$  имеет ровно  $N$  решений при достаточно большом  $|w|$ . Положим

$$\Phi(\mathbb{D}, N) = \{w \in \mathbb{C} : \text{уравнение } \Phi(z) = w \text{ имеет ровно } N \text{ решений в } \mathbb{D}\},$$

где решения берутся с учетом кратности.

**Теорема 2.** Пусть  $p$  — многочлен степени  $N \geq 1$ ,  $\varphi \in H^\infty$ , а функция  $\Phi$  определена равенством (1).

1. Если оператор  $T_\Phi$  — гиперциклический, то

- (a) функция  $\Phi$  будет  $N$ -листка в  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ;
- (b)  $\bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)) \neq \emptyset$  и  $\hat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)) \neq \emptyset$ .

2. Предположим, что  $\varphi \in A(\bar{\mathbb{D}})$ , и

- (a') для любого  $w \in \Phi(\bar{\mathbb{D}} \setminus \{0\})$  уравнение  $\Phi(z) = w$  имеет ровно  $N$  решений в  $\bar{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ ;
- (b')  $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ , и  $\hat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ .

Тогда оператор  $T_\Phi$  — гиперциклический.

Заметим, что из условия (a') следует, в частности, что  $\Phi(\mathbb{D}) = \Phi(\mathbb{D}, N)$ .

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на применении критерия гиперциклическости Годфруа–Шапиро [4] в сочетании с некоторыми результатами об аппроксимации в пространстве  $H^2$  полиномами от однолистной функции.

### Список литературы

1. Bayart F., Matheron E. Dynamics of Linear Operators — Cambridge University Press, 2009. — 352 с.
2. Grosse-Erdmann K.-G., Peris Manguillot A. Linear Chaos — Springer, Berlin, 2011. — 388 с.
3. Rolewicz S. On orbits of elements // Studia Math. — 1969. — Т. 32 — С. 17–22.

4. *Godefroy G., Shapiro J. H.* Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds // J. Funct. Anal. — 1991. — Т. 98 — С. 229–269.
5. *Shkarin S.* Orbits of coanalytic Toeplitz operators and weak hypercyclicity // arXiv:1210.3191.
6. *Baranov A., Lishanskii A.* Hypercyclic Toeplitz operators // Results Math. — 2016. — Т. 70, Вып. 3 — С. 337–347.

#### Сведения об авторе

Лишанский Андрей Александрович, инженер-исследователь, Санкт-Петербургский государственный университет, lishanskiyaa@gmail.com.

### HYPERCYCLICITY OF TOEPLITZ OPERATORS

**A.A. Lishanskii**

Saint Petersburg State University

Abstract. In this work we give separately necessary and sufficient conditions of hypercyclicity of Toeplitz operators with polynomial antianalytic part on the Hardy space.

**Keywords.** *Hypercyclic operators, Toeplitz operators.*

#### About author

Lishanskii Andrei Alexandrovich, research engineer, Saint Petersburg State University, lishanskiyaa@gmail.com.



УДК 517.53

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ДЛЯ КОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕВАНЛИННЫ ПРИНАДЛЕЖИТ $L^p$ - ВЕСОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ $(0 < p \leq +\infty)$

О.В. Охлупина

ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет»

В работе установлено полное описание класса субгармонических в круге функций, характеристика Неванлинны которых имеет степенной рост вблизи границы области и описан класс субгармонических функций в единичном круге, характеристика Неванлинны которых принадлежит весовым  $L^p$  - пространствам  $(0 < p < +\infty)$  при достаточно общих условиях на весовую функцию.

**Ключевые слова:** субгармоническая функция, мера, гармоническая функция, характеристика Неванлинны.

Введем следующие обозначения. Пусть  $D = \{z : |z| < 1\}$  - единичный круг на комплексной плоскости,  $\Gamma$  - его граница. Пусть  $SH(D)$  - множество субгармонических в  $D$  функций.

Рассмотрим также характеристику Неванлинны  $T(r, u)$  субгармонической функции  $u(z)$  (см. [1]). Если  $u \in SH(D)$ , то  $T(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\phi}) d\phi$ , где  $u^+(z) = \max\{0, u(z)\}$ .

В первой части работы существенную роль играют факторы бесконечного произведения М.М. Джрбашяна, введенные им еще в 1945 году в работе [2]. Свойства этих бесконечных произведений приведены в монографии [3].

Пусть  $\alpha > 0$ . Рассмотрим класс  $SH_\alpha(D)$  функций  $u$ , субгармонических в единичном круге  $D$ , для которых справедлива следующая оценка  $T(r, u) \leq \frac{C_u}{(1-r)^\alpha}$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $C_u$  - некоторая положительная константа, зависящая только от  $u$ .

При  $\alpha = 0$  по классическому результату И.И. Привалова класс  $SH_0(D)$  совпадает с классом функций  $u$ , допускающих в единичном круге  $D$  представление

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_D \ln \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \right| d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi)+r^2} d\psi(\theta),$$

где  $\mu(\zeta)$  - произвольная неотрицательная борелевская мера в единичном круге, для которой  $\int_D (1-|\zeta|) d\mu(\zeta) < +\infty$ ,  $\psi$  - произвольная функция конечной вариации на  $[-\pi; \pi]$  (см. [4]).

При  $\alpha > 0$  метод, применяемый И.И. Приваловым при доказательстве представления класса  $SH_0(D)$ , не проходит, так как функции класса  $SH_\alpha(D)$  могут не иметь граничных значений на единичной окружности. Подход, применяемый в работе [5], позволяет получить аналог вышеуказанного представления класса  $SH_0(D)$  на всю шкалу  $SH_\alpha(D)$  при всех  $\alpha > 0$ . Для этого сначала введем хорошо известный класс О. Бесова  $B_s^{1,\infty}$  на единичной окружности  $\Gamma$ :

$$B_s^{1,\infty} = \left\{ \psi \in L_1[-\pi; \pi] : \int_0^1 \frac{\|\Delta_t^2 \psi\|_{L_1}}{t^s} dt < +\infty \right\},$$

где  $\Delta_t^2 \psi(e^{i\theta}) = \psi(e^{i(\theta+t)}) - 2\psi(e^{i\theta}) + \psi(e^{i(\theta-t)})$ ,  $\theta \in [-\pi; \pi]$ ,  $t \in [0; 1]$ ,  $0 < s < 2$ .

Для фиксированных  $z, \zeta \in D$ ,  $\zeta \neq 0$ ,  $\beta > -1$  будем обозначать через  $A_\beta(z, \zeta)$  фактор в произведении М.М. Джрбашяна.

Основным результатом первой части работы является теорема

**Теорема 1.** *Класс функций  $SH_\alpha(D)$  совпадает с классом функций  $u$ , допускающих следующее представление в  $D$ :*

$$u(z) = \int_D \ln |A_\beta(z, \zeta)| d\mu(\zeta) + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}) d\theta}{(1 - e^{-i\theta} z)^{\beta+1}} \right\},$$

где  $z \in D$ ,  $\psi(e^{i\theta})$  - произвольная вещественнозначная функция из класса  $B_{\beta-\alpha+1}^{1,\infty}$ ,  $\beta > \alpha$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\mu(\zeta)$  - неотрицательная борелевская мера в  $D$ , удовлетворяющая условию:

$$n(r) \leq \frac{C_1}{(1-r)^{\alpha+1}},$$

где  $n(r) = \mu(D_r)$ .

Напомним, что  $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ .

Доказательство Теоремы 1 основано на применении вспомогательных лемм 1 и 2.

**Лемма 1.** *Пусть  $u \in SH_\alpha(D)$ ,  $D_r = \{z : |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ ,  $n(r) = \mu(D_r)$ . Тогда  $n(r)$*

*удовлетворяет оценке  $n(r) \leq \frac{C_1}{(1-r)^{\alpha+1}}$ . При этом интеграл  $\int_0^R (1-t)^{\beta+2} dn(t) < +\infty$ , при всех*

*$0 < R \leq 1$ ,  $\beta > \alpha + 1$ .*

**Лемма 2.** *Пусть  $A_\beta(z, \zeta)$ ,  $z, \zeta \in D$ , - фактор произведения М.М. Джрбашяна,  $u$  - произвольная субгармоническая функция в  $D$ , допускающая представление:*

$$u(z) = \int_D \ln |A_\beta(z, \zeta)| d\mu(\zeta) + h(z),$$

где  $\mu(\zeta)$  - неотрицательная борелевская мера в  $D$ ,  $n(r) = \mu(D_r)$ , удовлетворяющая усло-

вию  $n(r) \leq \frac{C}{(1-r)^{\alpha+1}}$ ,  $\beta > \alpha$ ,  $\alpha > -1$ ,  $D_r = \{z : |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ ,  $h(z)$  - гармоническая функ-

ция, для которой справедлива оценка  $\int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{C}{(1-r)^\alpha}$ . Тогда  $u \in SH_\alpha(D)$ .

Во второй части работы полностью описан класс субгармонических функций в единичном круге, характеристика Неванлинны которых принадлежит весовым  $L^p$  ( $0 < p < +\infty$ ) - пространствам.

Пусть  $z = re^{i\varphi}$ ,  $|z| = r$ .  $\Omega$ - множество измеримых положительных суммируемых функций  $\omega$  на  $(0;1)$ , для которых существуют числа  $m_\omega, M_\omega, q_\omega$ , причём  $m_\omega, q_\omega \in (0;1)$  удовлетворяют оценке  $m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$ ,  $r \in (0;1)$ ,  $\lambda \in [q_\omega;1]$ .

Функция  $\omega(t)$  имеет вид:  $\omega(t) = \exp \int_t^1 \frac{\varepsilon(x)}{x}$ , где  $-\alpha_\omega \leq \varepsilon(x) \leq \beta_\omega$ ,  $0 \leq \beta_\omega < 1$ ,

$0 \leq \alpha_\omega < +\infty$ .

Такие функции называют ещё медленно изменяющимися функциями. Важным частным случаем функции из  $\Omega$  является степенная функция  $\omega(t) = t^\alpha$ ,  $\alpha > -1$  (см. [3]).

Введём также в рассмотрение следующий класс субгармонических функций:

$$SH_\omega^p(D) = \left\{ u \in SH(D) : \left( \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi}) d\varphi \right)^p dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}, \quad 0 < p < +\infty.$$

$L_{p,\omega}(D)$  - обычное весовое  $L^p$  - пространство, т.е.:

$$L_{p,\omega}(D) = \left\{ \psi : \left( \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

В данной части работы мы получим параметрическое представление класса функций  $u$ , вообще говоря, не имеющих ограниченную характеристику Неванлинны  $T(r,u)$ , но, принадлежащих пространству  $L_{p,\omega}(D)$ , т.е. класса функций  $u$  для которых:

$$\int_0^1 T^p(r,u) \omega(1-r) dr < +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad \omega \in \Omega.$$

**Теорема 2.** Для того, чтобы субгармоническая функция  $u$  принадлежала классу  $SH_\omega^p(D)$ ,  $0 < p < +\infty$ ,  $\omega \in \Omega$ , необходимо и достаточно, чтобы в  $D$   $u$  допускала представление

$$u(z) = \int_D \ln |A_\beta(z, \zeta)| d\mu(\zeta) + h(z),$$

где  $\beta$  - достаточно большое положительное число, зависящее только от  $\omega$ :  $\beta > 1 + \frac{\alpha_\omega}{p}$ ,

$0 \leq \alpha_\omega < +\infty$ ,  $\mu(\zeta)$  - произвольная борелевская неотрицательная мера в  $D$ , для которой:

$$\int_0^1 \omega(1-r) (1-r)^p n^p(r) dr < +\infty,$$

где  $n(r) = \mu(D_r)$ ,  $D_r = \{z : |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ ,  $h(z)$  - гармоническая функция в  $D$ , удовлетворяющая условию:

$$\int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr < +\infty.$$

### Список литературы

1. Хейман, У., Кеннеди П. Субгармонические функции / У. Хейман, П. Кеннеди. - М.: Мир, 1980. – 304 с.
2. Джрбашян М.М. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций / М.М. Джрбашян // ДАН Арм.ССР. - 1945. - Т. 3, № 1.- С. 3-4.
3. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых  $L^p$ -классов мероморфных функций / Ф.А. Шамоян, Е.Н. Шубабко. – Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009. – 153 с.
4. Привалов И.И. Обобщение формулы Jensen. I / И.И. Привалов // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математики и естественных наук, 1935. - № 6-7. – С. 837-847.
5. Шамоян Ф.А. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и Характеризация нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста / Ф.А. Шамоян // Известия АН Арм. ССР, математика. - Т. 13, №5. - 1978. - С. 405-422.

### References

1. Heyman, W., Kennedy P. Subharmonic functions / W. Hayman, P. Kennedy. - M.: Mir, 1980. – 304 p.
2. Jrbashyan M. M., On canonical representation of meromorphic in the unit circle functions / M. M. Jrbashyan, DOKL Arm.SSR. - 1945. Vol. 3, No. 1.- Pp. 3-4.
3. F. A. Shamoyan, E. N. Shubabko. Introduction to the theory of the weight classes of meromorphic functions / F. A. Shamoyan, E. N. Shubabko. – Bryansk, 2009. 153 p.
4. Privalov I. I. Generalization of the formula Jensen. I / I. I. Privalov // news of Academy-criminal code of the USSR. VII series. Department of mathematics and natural Sciences, 1935. No. 6-7. – P. 837-847.
5. Shamoyan, F. A. Factorization theorem of M. M. Jrbashyan and Characterization of zeros of analytic functions with a majorant of finite growth / F. A. Shamoyan / Izvestiya an Arm. SSR, matematika. - Vol. 13, No. 5. - 1978. - Pp. 405-422.

### Сведения об авторе

Охлупина Ольга Валентиновна, к. ф.-м. н., доцент, ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет», helga131081@yandex.ru.

### ABOUT REPRESENTATION OF SOME CLASSES SUBHARMONIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISK FOR WHICH THE NEVANLINNA'S CHARACTERISTIC BELONGS TO THE $L^p$ -WEIGHT SPACES ( $0 < p \leq +\infty$ )

**O.V. Okhlupina**

Bryansk state engineering-technological University

In this paper received a full description of the class of subharmonic functions in the unit disk, the Nevanlinna's characteristic of which has a power growth near the boundary region and describes the class of subharmonic functions in the unit disk, Nevanlinna's characteristic of which belongs to the  $L^p$ -weight-spaces under rather general conditions on the weight function.

**Keywords:** subharmonic function, measure, harmonic function, Nevanlinna's characteristic.

### About authors

Okhlupina Olga Valentinovna, candidate of Ph.D., associate Professor, Bryansk state engineering-technological University, helga131081@yandex.ru.

УДК 517.53.

**ОПИСАНИЕ ГЛАВНЫХ ЧАСТЕЙ МЕРОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ Р.НЕВАНЛИННЫ ИЗ  $L^p$ -ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ**<sup>4</sup>**Е.Г. Родикова**

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Аннотация. В работе получено описание главных частей мероморфных в круге функций с характеристикой Р.Неванлинны из  $L^p$ -весовых пространств при условии, что полюсы находятся в конечном числе углов Штольца.

**Ключевые слова:** мероморфные функции, характеристика Неванлинны, главные части, интерполяция, угол Штольца.

Пусть  $\mathbb{C}$  — комплексная плоскость,  $D$  — единичный круг на  $\mathbb{C}$ ,  $H(D)$  — множество всех функций, аналитических в  $D$ ,  $M(D)$  — множество всех функций, мероморфных в  $D$ . Для любых  $\alpha > -1$ ,  $0 < p < +\infty$  определим класс  $S_\alpha^p$  (см. [5]):

$$S_\alpha^p := \left\{ f \in M(D) : \int_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r, f) dr < +\infty \right\},$$

где  $T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi + N(r, f)$  — характеристика Р. Неванлинны функции  $f$  (см. [2]),  $N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt$ ,  $0 < r < 1$ ,  $n(t, \infty)$  — число полюсов в круге  $|z| < t$ ,  $0 < t < 1$ ;  $n(0, \infty)$  — кратность полюса в точке  $z = 0$ ,  $\ln^+ |a| = \max(\ln |a|, 0)$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Обозначим  $S_{\alpha, a}^p = S_\alpha^p \cap H(D)$ .

Отметим, что классы  $S_\alpha^p$  являются естественным обобщением классов Неванлинны-Джрбашяна (см. [2]).

Хорошо известно, что если  $F \in M(D)$ ,  $\{z_k\}$  — последовательность полюсов функции  $F(z)$  порядка не выше  $n$ , то по теореме Лорана в окрестности любой точки  $z_k$  функция  $F(z)$  допускает разложение вида:

$$F(z) = \frac{a_{k,n}}{(z - z_k)^n} + \frac{a_{k,n-1}}{(z - z_k)^{n-1}} \cdots + \frac{a_{k,1}}{(z - z_k)} + \psi(z),$$

где  $\psi$  — аналитическая в окрестности точки  $z_k$  функция.

В данной работе приводится описание коэффициентов  $a_{k,i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , для произвольной функции  $F \in S_\alpha^p$ .

Решение поставленной задачи характеристики главных частей мероморфных в круге функций в классе  $S_\alpha^p$  сводится к решению интерполяционной задачи в классе  $S_{\alpha, a}^p$ . Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе  $S_{\alpha, a}^p$ : пусть  $\{\alpha_k\}_1^\infty$  и  $\{\gamma_k\}_1^\infty$  — произвольные последовательности комплексных чисел из  $D$ ; обозначим через  $q_j$  — кратность появления числа  $\alpha_j$  во всей последовательности  $\{\alpha_k\}_1^\infty$ ,  $s_j \geq 1$  — кратность появления числа  $\alpha_j$  на отрезке  $\{\alpha_k\}_{k=1}^j$ . Очевидно, что  $1 \leq s_j \leq q_j \leq +\infty$ . Требуется выявить критерии для  $\{\alpha_k\}_1^\infty$  и  $\{\gamma_k\}_1^\infty$ , обеспечивающие существование функции  $f \in S_\alpha^p$ , такой что

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1, 2, \dots$$

<sup>4</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1704.2014К)

В том случае, если  $s_k = 1$  получаем задачу свободной интерполяции. При решении задачи свободной интерполяции, когда на интерполируемую функцию налагаются минимальные ограничения, важно найти естественный класс, которому должно принадлежать сужение функции на интерполяционное множество. Обозначим его  $l_\alpha^p$ . Как установлено в [3], если  $f \in S_{\alpha,a}^p$ , то

$$\ln^+ M(r, f) = o \left( \frac{1}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \right), r \rightarrow 1-0,$$

где  $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ .

Поэтому

$$l_\alpha^p = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : \ln^+ |\gamma_k| = o \left( \frac{1}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \right), k \rightarrow +\infty \right\}.$$

Для формулировки результатов работы введем дополнительные обозначения и определения. Для любого  $\beta > -1$  обозначим через  $\pi_\beta(z, z_k)$  произведение М.М. Джрбашьяна с нулями в точках  $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$  (см. [1]),  $\pi_{\beta,n}(z, z_j)$  — произведение  $\pi_\beta(z, z_j)$  без  $n$ -го фактора.

Для  $\beta = m \in \mathbb{Z}_+$  произведение Джрбашьяна имеет вид (см. там же):

$$\pi_m(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{z}_k(z_k - z)}{1 - \bar{z}_k z} \exp \sum_{j=0}^m \frac{1}{j+1} \left( \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{j+1}.$$

Как установлено в [1], произведение  $\pi_\beta(z, z_k)$  сходится абсолютно и равномерно в круге  $D$  тогда и только тогда, когда:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

Углом Штольца  $\Gamma_\delta(\theta)$  с вершиной в точке  $e^{i\theta}$  называется угол раствора  $\pi\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , биссектриса которого совпадает с отрезком  $re^{i\theta}$ ,  $0 \leq r < 1$ .

Справедлива

**Теорема 1.** (см. [7]) Пусть  $\{\alpha_k\} \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$  при некотором  $0 < \delta < \frac{p}{2(\alpha+p+1)}$ . Следующие утверждения эквивалентны:

- i)  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$  - интерполяционная последовательность в классе  $S_{\alpha,a}^p$ ;
- ii)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{k(\alpha+p+1)}} < +\infty, \quad (1)$$

где  $n_k = \text{card}\{\alpha_k : |\alpha_k| < 1 - \frac{1}{2^k}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$|\pi'_\beta(\alpha_k)| \geq \exp \frac{-\varepsilon(k)}{(1 - |\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}, \quad (2)$$

при всех  $\beta > \frac{\alpha+1}{p}$ , где  $\varepsilon(k) > 0$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\varepsilon(k) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow +\infty$ .

Последовательность комплексных чисел  $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ , удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{k(\alpha+p+1)}} < +\infty,$$

$$|\pi'_{m,k}(z_k)| \geq \exp \frac{-\varepsilon(k)}{(1 - |z_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}},$$

при всех  $m > \frac{\alpha+1}{p}$  и некоторой  $\varepsilon(k) = o(1)$ ,  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\sup_{k \geq 1} \{q_k\} = n,$$

отнесем к классу  $\tilde{\Delta}$ , здесь  $q_k$  — кратность  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Справедлива также

**Теорема 2.** (см. [4]). Пусть  $\{\alpha_k\} \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$  при некотором  $0 < \delta < \frac{p}{2(\alpha+p+1)}$ . Если  $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \tilde{\Delta}$ , то для любой последовательности  $\{\gamma_k\}_1^\infty \in l_\alpha^p$ , можно построить в явном виде функцию  $f \in S_{\alpha,a}^p$ , являющуюся решением интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Обратно, если задача (3) разрешима при всех  $s_k \geq 1$  и  $\{\gamma_k\}_1^\infty \in l_\alpha^p$ , то  $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \tilde{\Delta}$ .

Заметим, что постановка задачи кратной интерполяции в формулировке, предлагаемой в теореме 2 (при сохранении естественного класса  $l_\alpha^p$ ), возможна, поскольку класс  $S_{\alpha,a}^p$  инвариантен относительно оператора дифференцирования, как установлено в работе [6]. Основываясь на этом факте, а также на результатах теорем 1 и 2, устанавливается основной результат:

**Теорема 3.** Пусть последовательность комплексных чисел  $\{z_k\} \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$  для некоторого  $\delta$ ,  $0 < \delta < \frac{p}{2(\alpha+p+1)}$ . Если  $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \in \tilde{\Delta}$ , то для того, чтобы существовала функция  $F \in S_\alpha^p$  с главными частями

$$H(z, z_k, a_k) = \frac{a_{k,n}}{(z - z_k)^n} + \frac{a_{k,n-1}}{(z - z_k)^{n-1}} \dots + \frac{a_{k,1}}{(z - z_k)}, k = 1, 2, \dots$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\ln^+ |a_{k,i}| = o \left( \frac{1}{(1 - |z_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \right), k \rightarrow +\infty, i = \overline{1, n}.$$

### Список литературы

1. Джрбашян М. М. К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. Института матем. и механики АН Арм. ССР. — 1948. — Т. 2. — С. 3--40.
2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции / Пер. с нем. / — М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.
3. Родикова Е.Г. Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций // Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения» — Петрозаводск: ПетрГУ. — 2012. — С. 64-69.
4. Родикова Е.Г. О кратной интерполяции в классах аналитических функций типа Неванлинны в круге // Материалы III Международной конференции «Геометрический анализ и его приложения» — Волгоград: ВолГУ. — 2016. — С. 171-174.
5. Шамоян Ф. А. Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций // Сиб. мат. журн. — 1999. — Т. 40. — № 6. — С. 1422-1440.

6. Шамоян Ф.А., Курсина И. С. Об инвариантности некоторых классов голоморфных функций относительно интегро-дифференциальных операторов // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 1998. - Т. 255. — С. 184–197.

7. Rodikova E.G. On Interpolation in the Class of Analytic Functions in the Unit Disk with the Nevanlinna Characteristic from  $L^p$ -spaces // Журнал Сибирского федерального университета, 9:1 (2016), 69-78.

### References

1. Djrbashian M.M. On the representation problem of analytic functions // Soob. Inst. Math. i Mekh. AN ArmSSR. 2,(1948), 3--40. (in Russian)

2. Nevanlinna R. Single-valued analytic functions — Moscow-Leningrad, GITTL, 1941, 388 p. (in Russian)

3. Rodikova E.G. On estimates of expansion coefficients for some classes of analytic functions in the disk // Proceedings of the international conference «Complex analysis and its applications» — Petrozavodsk: PetrSU. — 2012. — P. 64-69. (in Russian)

4. Rodikova E.G. On multiple interpolation in the class of analytic functions of the Nevanlinna type in a disk // Proceedings of the international conference «Geometric analysis and its applications» — Volgograd: VolSU.— 2016.—P. 171-174. (in Russian)

5. Shamoyan F.A. Parametric representation and description of zero sets of weighted classes of holomorphic functions in the disk // Sib. Math. Journ. V. 40, № 6, 1422–1440, 1999.(in Russian)

6. Shamoyan F.A., Kursina I.S. On the invariance of some classes of holomorphic functions under integral-differential operators // Zap. nach. semin. POMI — 1998. - V. 255. — P. 184–197. (in Russian)

7. Rodikova E.G. On Interpolation in the Class of Analytic Functions in the Unit Disk with the Nevanlinna Characteristic from  $L^p$ -spaces // Journ. of Sib. Federal Univ., 9:1 (2016), 69-78.

### Сведения об авторе

Родикова Евгения Геннадьевна, к.ф.-м.н., м.н.с., НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, evheny@yandex.ru.

### ON PRINCIPAL PARTS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISK WITH THE NEVANLINNA CHARACTERISTIC FROM $L^p$ -SPACES

**E.G. Rodikova**

Bryansk State University

**Abstract.** In this paper we describe the principal parts of a Laurent series of meromorphic functions with the Nevanlinna characteristic from  $L^p$ -spaces under condition that the poles are contained in a finite union of Stolz angles.

**Key words:** meromorphic functions, the Nevanlinna characteristic, principal parts, the Stolz angle.

### About author

Rodikova Eugenia Gennadevna, PhD, junior researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, evheny@yandex.ru.



УДК 517.53.

# ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТРУБЧАТЫХ И ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ<sup>6</sup>

Р. Ф. Шамоян, Н. М. Махина

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

**Аннотация.** В работе обсуждаются варианты новых обобщений некоторых недавних результатов Ф.А. Шамояна, касающиеся точных теорем вложения в новых аналитических классах типа Бергмана-Никольского в полидиске на более сложные трубчатые и псевдовыпуклые области. Наши доказательства существенным образом основываются на систематическом применении так называемой техники г-решеток в указанных общих областях в  $C^n$ , развитой в серии недавних работ зарубежных авторов.

**Ключевые слова:** единичный диск, классы типа Бергмана, аналитическая функция, трубчатая и псевдовыпуклая область.

Пусть  $U^m$  – единичный полидиск в  $C^n$ ;  $U^m = \{z \in C^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, m\}$ .

В работе [1] введены классы аналитических функций в  $U^m$ :

$$A^{\vec{p}}(\vec{\alpha}) = \left\{ f \in H(U^n) : \left( \int_U \left( \dots \int_U |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} (1 - |z_1|)^{\alpha_1} dm_2(z_1) \right)^{p_2/p_1} \dots (1 - |z_m|)^{\alpha_m} dm_2(z_m) \right)^{1/p_m} \right\},$$

где  $H(U^m)$  – класс всех аналитических функций в  $U^m$ ,  $\alpha_j > -1$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $dm_2$  – нормированная мера Лебега в единичном круге  $U$ ,  $0 < p_j < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Введем также класс измеримых функций в  $U^m$  – класс функций с квазинормой

$$P f P_{L^{\vec{p}}(\vec{\mu})} = \left( \int_U \dots \int_U |f(\zeta_1, \dots, \zeta_m)|^{p_1} d\mu_1(\zeta_1) \dots d\mu_m(\zeta_m) \right)^{\frac{1}{p_1}},$$

где  $\mu_j$  – борелевская мера в единичном круге  $U$ ,  $0 < p_j < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Заметим, что при  $m = 1$  эти классы хорошо изучены (см. например [2]).

В работе [1] установлены два новых интересных точных результата, а именно приведены точные условия на меру  $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  такие, что имеет место в частности вложение

$$P f P_{L^{\vec{q}}(\vec{\mu})} \leq c(\vec{\mu}) P f P_{A^{\vec{p}}(\vec{\alpha})},$$

при  $\alpha_j > -1$ ,  $p_j \leq q_j < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$  и вложение

$$\left( \int_{U^m} |f(z)|^q d\nu(z) \right)^{\frac{1}{q}} \leq c(\nu) P f P_{A^{\vec{p}}(\vec{\alpha})},$$

где  $\alpha_j > -1$ ,  $0 < p_j \leq q_j < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$  и где  $\nu$  – неотрицательная Борелевская мера в  $U^m$ .

Меры  $\mu_j$ ,  $\nu_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  – это меры типа Карлесона в  $U$ .

<sup>6</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1704.2014К)

Мы приводим несколько новых прямых обобщений указанных результатов на более сложные ограниченные псевдовыпуклые области с гладкой границей и трубчатые области в  $S^n$ .

Важную роль во всех доказательствах играет наличие во всех областях так называемых  $r$  – решеток (см. например [3,4]).

Часть работы изложена в [5,6].

### Список литературы

1. Шамоян Ф.А. Теоремы вложения для весовых анизотропных пространств голоморфных в поликруге функций // Журнал математической физики, анализа, геометрии. – 2003. – Т.10, №1. – С. 116-125.
2. Жу К. Пространства голоморфных функций в единичном шаре. - Нью-Йорк: Спрингер, 2005.
3. Беколл Д., Бонами А., Гарригос Г. и др. Конспект лекций по проекторам Бергмана в трубчатых областях над конусами. - Яоунд.: доклады международного семинара по классическому анализу, 2001.
4. Эбейт М., Саракко А. Карлесона меры и равномерно дискретные последовательности в строго псевдовыпуклых областях // Журнал Лондонского матем. общества. - 2011. - V. 83. - P. 587-605.
5. Шамоян Р., Михич О. Теоремы вложения для весовых анизотропных пространств в единичном шаре. - 2016. - Препринт, 16 с.
6. Шамоян Р., Махина Н. Теоремы вложения для весовых анизотропных пространств голоморфных функций в строго псевдовыпуклых областях. - 2016. - Препринт, 18 с.

### References

1. Shamoyan F.A. Embedding theorems for weighted anisotropic spaces of holomorphic functions in the polydisc // J. Math. Anal. Geom. – 2003. – V.10, №1. – PP. 116-125.
2. Zhu K. Spaces of holomorphic functions in the unit ball. – Springer-Verlag, New York, 2005.
3. Bekolle D., Bonami A., Garrigos G. and others. Lecture notes on Bergman projectors in tube domains over cones. – Yaounde: Proceedings of the international Workshop on classical Analysis., 2001.
4. Abate M., Saracco A. Carleson measures and uniformly discrete sequences in strongly pseudoconvex domains // J. London Math. Soc. – 2011. – V. 83. – P. 587-605.
5. Shamoyan R., Mihic O. Embedding theorems for weighted anisotropic spaces in the unit ball. – 2016. – Preprint, 16 p.
6. Shamoyan R., Makhina N. Embedding theorems for weighted anisotropic spaces of holomorphic functions in strongly pseudoconvex domains. – 2016. – Preprint, 18 p.

### Сведения об авторах

Шамоян Роман Файзоевич, к.ф.-м.н., ст. науч. сотр., НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, rsham@mail.ru;

Махина Наталья Михайловна, к.ф.-м.н., доцент, НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, mahinanm@yandex.ru.

## EMBEDDING THEOREMS FOR CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS IN TUBULAR AND PSEUDOCONVEX DOMAINS

**R.F. Shamoyan, N.M. Makhina**

Bryansk State University

**Abstract.** The paper discusses options for new generalizations of some recent results of F.A. Shamoyan concerning the exact theorems investments in new classes of analytic type Bergman-Nicholas in polydisc more complex tubular and pseudoconvex domains. Our evidence is essentially based on the use of so-called technology  $r$ -lattices in these common domains, developed in a series of recent works by foreign authors.

**Keywords:** *unit disc, Bergman classes, analytic function, tubular and pseudoconvex domain.*

### About authors

Shamoyan F.A., PhD, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, rsham@mail.ru;

Makhina N.M., PhD, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, mahinanm@yandex.ru.

УДК 517.53.

## ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА В СОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ<sup>5</sup>

**Ф.А.Шамоян, В.А.Беднаж**

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Аннотация. Получено полное описание интегрируемых функций  $h$  на единичной окружности, для которых оператор Теплица с символом  $h$  является ограниченным оператором в весовых пространствах типа Соболева аналитических в круге функций.

**Ключевые слова:** Оператор Теплица, линейный функционал, единичный круг.

Пусть  $D = \{z : |z| < 1\}$  - единичный круг на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ,  $T = \{z : |z| = 1\}$  - его граница. Обозначим через  $H(D)$  - множество всех голоморфных в  $D$  функций,  $H^p = H^p(D)$ ,  $0 < p \leq +\infty$  - класс Харди в  $D$ . В работах [1,2] исследовалась ограниченность операторов Тёплица  $T_h : f \rightarrow P(h \cdot f)$ , где  $P$  - проектор Рисса, в весовых пространствах С.А. Соболева аналитических в круге функций, то есть в пространствах

$$A_n^p(\alpha) = \{f \in H(D) : \|f\|_{A_n^p(\alpha)} = \int_D |D^n f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|)^\alpha dm_2(\zeta) < +\infty\},$$

где  $D^n$  - произведения  $n$ -го порядка типа Римана-Лиувилля функции  $f$  (см.[3]).

Если  $n > \alpha + 1$ , то оператор  $T_h$  является ограниченным оператором в пространстве  $A_n(\alpha) := A_n^1(\alpha)$  тогда и только тогда, когда функция  $h$  на единичной окружности допускает представление

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \quad \zeta \in T, \quad (1)$$

где  $h_1 \in A_n(\alpha)$ ,  $h_2 \in H^\infty$  (см.[1,4]), в частности, если  $h \in H^1(D)$ , то оператор  $T_h$  будет ограниченным в пространстве  $A_n(\alpha)$  тогда и только тогда, когда  $h \in H^\infty$ . Однако, при  $n = \alpha + 1$  условие  $h \in H^\infty$  не обеспечивает ограниченность  $T_h$  в пространстве  $A_n(\alpha)$ , возникает дополнительное условие на функцию  $h$ . Необходимым и достаточным условием ограниченности оператора  $T_h$  в пространстве  $A_n(n-1)$  является условие

$$\sup_{z \in D} \left\{ |h'(z)|(1 - |z|) \ln \frac{1}{1 - |z|} \right\} < +\infty. \quad (2)$$

Условие (2) в дальнейшем возникло в работах [5,6] при исследовании аналогичных вопросов. В работе [7] исследовался случай  $0 < p < 1$ , тогда также возникает аналог оценки (2). Необходимым и достаточным условием ограниченности оператора  $T_h$  в пространстве  $A_n^p(n-1)$  является условие

$$\sup_{z \in D} \left\{ |h'(z)|(1 - |z|) \ln^{\frac{1}{p}} \frac{1}{1 - |z|} \right\} < +\infty. \quad (3)$$

Таким образом, дополнительное условие (3) на функцию  $h$  возникает при степенном весе  $x \mapsto (1-x)^\alpha$ ,  $x \in [0, 1]$  только при  $\alpha = n-1$ , при нецелых  $\alpha$  условие типа (3) отсутствует. Естественно возникает вопрос: появится ли условие типа (3), когда весовая функция нестепенная и какой вид примет условие в общем виде?

<sup>5</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1704.2014К)

В данной работе исследуется поведение операторов  $T_h$  в следующем пространстве типа Соболева:  $A_n^p(\alpha, \omega) = \{f \in H(D) : \|f\|_{A_n^p(\alpha, \omega)} =$

$$= \left( \int_D |D^n f(\zeta)|^p \omega(1 - |\zeta|)(1 - |\zeta|)^{\alpha-1} dm_2(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \},$$

$0 < p < 1$ , где  $D^n$  - оператор типа Римана-Лиувилля,  $dm_2(\zeta)$  - плоская мера Лебега на  $S$ .

Будет установлено, что дополнительное условие типа (3) возникает только при  $n+1 = \frac{\alpha+2}{p}$ , при этом аналогом условия (3) является

$$\sup_{z \in D} \left\{ |h^{(k)}(z)| (1 - |z|)^k \left( \frac{\omega(1 - |z|)}{(1 - |z|) \int_{(1-|z|)}^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du} \right)^{-\frac{1}{p}} \right\} < +\infty, k \geq 1,$$

кроме того приводятся приложения полученных результатов в задачах деления на внутреннюю функцию (см.[8]) в классах  $A_n^p(\alpha, \omega)$ .

Для формулировки основных результатов введем следующие обозначения: пусть  $\Delta = [0, 1]$ , функцию  $\omega$ , определенную на  $\Delta$ , назовем функцией типа модуля непрерывности, если  $\omega(t)$  - неотрицательная неубывающая функция на  $\Delta$ , при этом  $t \mapsto \frac{\omega(t)}{t}$  не возрастает на  $\Delta$ , а также, если в определении пространства  $A_n^p(\alpha, \omega)$  выполняется условие  $\alpha = 0$ , то будем предполагать, что  $\int_0^1 \frac{\omega(u)}{u} du < +\infty$ .

В дальнейшем также потребуются определение класса  $\Lambda^p(\omega, \alpha)$  (см.[2]):

$$\Lambda^p(\omega, \alpha) = \{f \in H(D) : \|f\|_{\Lambda^p(\omega, \alpha)} = \\ = \sup \left( |D^{\beta+1} f(z)| \frac{(1 - |z|)^{\beta+2-\frac{2}{p}}}{(\omega(1 - |z|)(1 - |z|)^{\alpha-1})^{\frac{1}{p}}} \right) < +\infty \},$$

$$\beta > \frac{\alpha+2}{p}.$$

Сформулируем основные результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $0 < p \leq 1, \alpha \geq 0$ ,  $\omega$  - функция типа модуля непрерывности на  $\Delta$ ,  $h$  - суммируемая функция на  $T$ ,

$$T_h(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)h(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta, f \in C_A(\mathbf{D}), z \in \mathbf{D}.$$

1) Предположим, что  $n, p, \alpha$  удовлетворяют соотношению  $(n+1) > \frac{\alpha+2}{p}$ , тогда следующие утверждения равносильны:

a)  $T_h \in L(A_n^p(\omega, \alpha))$ ;

b)  $h$  допускает представление  $h(\zeta) = h_1(\zeta) + h_2(\zeta), \zeta \in T$ , где  $h_1$  - принадлежит пространству  $A_n^p(\omega, \alpha)$ ,  $h_2 \in H^\infty$ ;

2) Пусть  $(n+1) < \frac{\alpha+2}{p}$  и сходится следующий интеграл

$$\int_0^1 \frac{\omega(u) du}{u^{p(n+1)-\alpha}} < +\infty,$$

$h \in H^1(D)$ , тогда  $T_h$  действует в пространстве  $A_n^p(\omega, \alpha)$ , тогда и только тогда, когда  $D^{-n}h \in \Lambda^p(\omega, \alpha)$ .

При  $(n+1) = \frac{\alpha+2}{p}$  справедливо следующее утверждение

**Теорема 2.** Пусть  $0 < p \leq 1$ ,  $n+1 = \frac{\alpha+2}{p}$ ,  $h \in H^1(D)$ , тогда следующие утверждения равносильны

- a)  $T_{\bar{h}} \in L(A_n^p(\omega, \alpha))$ ,  
 б)  $h \in H^\infty$ , при этом

$$\sup \left\{ |h^{(k)}(t)| (1-|t|)^k \left( \int_{1-|t|}^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du \frac{(1-|t|)}{\omega(1-|t|)} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < +\infty, k \geq 1.$$

Из Теорем 1 и 2 легко вывести следующее утверждение

**Теорема 3.** Пусть  $f \in H^1 \cap A_n^p(\omega, \alpha)$  и

$$f(z) = z^\lambda B(z, z_k) S(z) \times \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln |f(e^{i\theta})| d\theta \right), z \in D$$

факторизационное представление функции  $f$ , где  $B(z, z_k)$  - произведение Бляшке,  $S(z) = \exp \left( - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right)$  - сингулярная внутренняя функция. Тогда, если  $I$  - произвольная внутренняя функция, для которой  $B \cdot S/I \in H^\infty(D)$ , то  $f/I$  принадлежит классу  $A_n^p(\omega, \alpha) \cap H^1$ .

Доказательство основных результатов опирается на несколько вспомогательных утверждений.

Пусть

$$f_{a,m}(z) = \frac{m!}{(1-\bar{a}z)^{m+1}}, z \in D, m \in \mathbf{Z}_+ \quad (4)$$

**Лемма 1.** Пусть  $h \in H^1$ . Тогда

a)

$$T_{\bar{h}}(f_{a,m})(z) = \sum_{k=0}^m \frac{C_m^k \overline{h_m^{(k)}(a)} z^{m-k}}{(1-\bar{a}z)^{m-k+1}}, \quad (5)$$

где  $h_m(z) = z^m h(z)$ ,  $z \in D$ .

б) справедлива оценка

$$\|T_{\bar{h}}(f_{a,m})\|_{A_n^p(\omega, \alpha)} \lesssim \left( \sum_0^m |h_m^{(k)}(a)|^p \int_{1-|a|}^1 \frac{\omega(u) du}{u^{p(m+n+1)-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из леммы 1 следует

**Утверждение.** Пусть  $f_{a,m}$  определяется по равенству (4), тогда

$$\|f_{m,a}\|_{A_n^p(\omega, \alpha)} \approx \left( \int_{1-|a|}^1 \frac{\omega(u) du}{u^{p(m+n+1)-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

если  $p(m+n+1) - \alpha > 1$ .

Следующие утверждения установлены в работах [4,10].

**Лемма 2.** Пусть  $\Phi$  - линейный непрерывный функционал на

$$A_0^p(\omega, \alpha) := A^p(\omega, \alpha), 0 < p \leq 1, e_z(\zeta) = \frac{1}{1-z\zeta}, z, \zeta \in D,$$

тогда  $g(z) = \Phi(e_z)$  принадлежит классу  $\Lambda^p(\omega, \alpha)$  при этом

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_T f(\rho\zeta) g(\rho\bar{\zeta}) |d\zeta|. \quad (6)$$

$$\|\Phi\| \approx \|g\|_{\Lambda^p(\omega, \alpha)}. \quad (7)$$

И обратно, если функция  $g \in \Lambda^p(\omega, \alpha)$ , то она порождает линейный непрерывный функционал на  $A^p(\omega, \alpha)$ , задаваемый формулой (6), для которой справедлива оценка (7).

**Лемма 3.** Если  $h \in H^1$ , при этом  $T_h \in L(A_n^p(\omega, \alpha))$ , то  $h \in H^\infty$ .

**Лемма 4.** Пусть  $n+1 > \frac{\alpha+2}{p}$ , тогда класс  $A_n^p(\omega, \alpha)$  является кольцом относительно операторов умножения и сложения.

**Лемма 5.** Пусть  $k, m \in N$ ,  $m > \frac{\alpha+1}{p}$ ,  $f \in A_n^p(\omega, \alpha)$  тогда существует многочлен  $P$  порядка не выше  $m - n + 1$  такой, что

$$f(z) = \int_D \frac{(1 - |\zeta|^2)^m D^n f(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^{m+2-n}} P(z\bar{\zeta}) dm_2(\zeta), z \in D.$$

**Лемма 6.** Пусть  $u$  - неотрицательная субгармоническая функция в  $D$  причем  $\int_D (1 - |\zeta|)^s u(\zeta) dm_2(\zeta) < +\infty$ . Тогда если  $0 < p \leq 1$ ,  $m > \frac{s}{p}$ , то

$$\left( \int_D (1 - |\zeta|)^m u(\zeta) dm_2(\zeta) \right)^p \lesssim \int_D (1 - |\zeta|)^{mp} u^p(\zeta) dm_2(\zeta).$$

**Лемма 7.** Пусть  $n \geq 0$ , тогда следующие утверждения равносильны

1)  $D^{-n}h \in \Lambda_\omega^p$

2)  $|D^{m+1}h(z)| < \frac{\text{const}(\omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1})^{1/p}}{(1-|z|)^{m+2+n-2/p}}$ ,  $z \in D$ ,  $m > n + \frac{\alpha+2}{p}$ .

Доказательство этой леммы получается аналогично доказательству леммы 5 из работы [7].

**Лемма 8.** Пусть  $p(n+1) < \alpha+2$ ,  $h \in H(D)$  такая, что  $D^{-n}h \in \Lambda_\omega^p$  тогда  $h \in H^\infty(D)$ .

## References

1. Shamoian F.A. On the boundedness of a class of operators connected with the divisibility of analytic functions // Journal Funct. Anal. Appl. — 13, 1979. — 70–71.
2. Shamoian F.A. On a class of operators connected with the factorization of analytic functions // Journal of Mathematical Sciences — 39, 1974. — 200–206.
3. Duren P. Theory  $H^p$  spaces — Acad press — 1970.
4. Shamoian F.A. On boundedness of Toeplitz operators in weighted Sobolev spaces of holomorphic functions in the disk // Journal of Mathematical Sciences — 389, 2011 — 257–282.
5. Jenson S., Peetre J., Semes A. On the action of Hankel and Toeplitz operators on some functions spaces // Duke Math. J. — 51, 1984 — 937–958.
6. Zhu K. Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators // J. Funct. Anal. — 87, 1989 — 31–50.
7. Shamoian F.A. A boundedness criterion for Toeplitz operators in weighted Sobolev spaces of holomorphic functions in the disk // Siberian Math. J. — 53:3, 2012 — 554–572.
8. Garnett J. Bounded analytic functions — Moscow — 1984.

9. *Shamoyan F. A., Harutiunian A. V.* Toeplitz operators in anisotropic spaces holomorphic in polydisk of functions // Reports of the Armenian Academy of Sciences — 4, 1991 — 147–151.

10. *Shamoyan F.A.* The weighted spaces of analytic functions with mixed norm — Bryansk State university — Bryansk — 2014.

### Сведения об авторах

Шамоян Файзо Агитович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа и НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, shamoyanfa@yandex.ru;

Беднаж Вера Аркадьевна, к. ф.-м. н., доцент, с.н.с. НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, vera.bednazh@mail.ru.

## ON BOUNDED TOEPLITZ OPERATOR IN THE SOBOLEV SPACE OF FUNCTIONS

**F.A. Shamoyan, V.A. Bednazh**

Bryansk State University

**Abstract.** A complete description of the integrable functions  $h$  on the unit circle, for which the Toeplitz operator with symbol  $h$  is a bounded operator in weighted spaces of Sobolev type of analytic functions in a disc. An application is also installed results in matters of the factorization of analytic functions.

**Key words:** *Toeplitz operator, Inner functions, linear functional, Unit disc.*

### About authors

Shamoyan F.A., Ph.D., professor, head of the research laboratory, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University.

Bednazh V.A., Ph.D., assistant professor, senior researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University.



УДК 517.53.

# ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ <sup>7</sup>

**Ф. А. Шамоян, Е. В. Тасоева**

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Аннотация. В терминах разложения Уитни в работе устанавливаются теоремы вложения в пространствах Бергмана и классах аналитических функций в произвольном открытом множестве комплексной плоскости, логарифм которых принадлежит  $L^p$  весовым пространствам.

**Ключевые слова:** разбиение Уитни, аналитические функции, пространство Бергмана, теоремы вложения.

Пусть  $G$  – область на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , обозначим множество всех аналитических функций в  $G$  через  $H(G)$ , плоскую меру Лебега на  $\mathbb{C}$  обозначим через  $m_2$ , множество всех мероморфных функций в  $G$  через  $M(G)$ . В дальнейшем для вещественнозначных функций  $f$  и  $g$  с общей областью определения  $E$ , запишем  $g(\zeta) \lesssim f(\zeta), \zeta \in E$ , если существует положительное число  $c$ , такое, что  $g(\zeta) \leq cf(\zeta), \zeta \in E$ . Определим класс  $S_\alpha^p(G)$ :

$$S_\alpha^p(G) = \{f \in H(G) : \int_G (\ln^+ |f(z)|)^p \rho^\alpha(z, \partial G) dm_2(z) < +\infty\},$$

обозначим через  $A_\alpha^p(G)$  соответствующее весовое пространство Бергмана (см. [1]):

$$A_\alpha^p(G) = \{f \in H(G) : \int_G |f(z)|^p \rho^\alpha(z, \partial G) dm_2(z) < +\infty\}.$$

Здесь и в дальнейшем  $\rho(F, E)$  – расстояние между двумя множествами  $F$  и  $E$ . Следующее утверждение непосредственно следует из хорошо известного разложения Уитни (см. [2], с. 201).

Пусть  $Q$  – некоторое замкнутое множество на  $\mathbb{C}$ . Обозначим через  $\mathring{Q}_k$  – внутренность множества  $Q$ . Если  $Q$  квадрат или прямоугольник, то через  $Q(s)$ ,  $s \in R_+$  обозначим квадрат, имеющий тот же центр что и  $Q$ , но растянутый  $s$  раз. Если  $Q$  некоторое множество в  $\mathbb{C}$ , то через  $d(Q)$  обозначим диаметр множества  $Q$ . Теперь сформулируем известную теорему Уитни о разложении открытых множеств.

**Теорема Whitney Н.** Пусть  $G$  – открытое множество в  $\mathbb{C}$ . Тогда существует такой набор квадратов  $F = \{Q_k\}_{k=1}^\infty$ , что  $G = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$ .

а)  $\mathring{Q}_k \cap \mathring{Q}_m = \emptyset, k \neq m$ ;

б)  $d(Q_k) \leq \rho(Q_k, \partial G) \leq 4d(Q_k)$ ;

в) Для произвольного  $s \in R_+$  квадраты  $\{Q_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$  покрывают множество  $G$  конечнократно, т. е. существует число  $P = P(s) \in \mathbb{N}$ , такое, что каждая точка  $z$  множества  $G$  принадлежит не более чем  $P(s)$  квадратам из системы  $\{Q_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$ .

<sup>7</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1704.2014К)

**Определение.** Пусть  $G$  — некоторое открытое множество на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и  $\{Q_k\}_1^\infty$  — разложение Уитни множества  $G$ , причём  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  — центр квадрата  $Q_k$ . Скажем, что  $G$  — удовлетворяет условию (У), если существует положительное число  $q$  и точки  $a_k^* \in \mathbb{C} \setminus G$ , такие, что  $\rho(a_k^*, \partial G) \geq q\rho(a_k, \partial G)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Отметим, что произвольное ограниченное множество удовлетворяет условию (У). В случае неограниченных множеств это уже не так. Например, если  $G$  совпадает с полуплоскостью  $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  или  $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ , то условие (У) очевидно для  $\mathbb{C}_+$  и  $\mathbb{C}_-$ , а для полуполосы  $G = \mathbb{C} \setminus \Pi_h^+$ , где  $\Pi_h^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \frac{h}{2}\}$ , очевидно, что условие (У) не выполняется. В дальнейшем будем предполагать, что множество  $G$  — удовлетворяет условию (У).

Основными результатами работы являются доказательство следующих утверждений.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{C}$ ,  $G \neq \mathbb{C}$ , удовлетворяющее условию (У),  $\{z_k\}_1^\infty \subset G$ ,  $\{Q_k\}_1^\infty$  — разложения Уитни множества  $G$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \rho(z_k, \partial G)^{\alpha+2} (\ln^+ |f(z_k)|)^p \lesssim \int_G (\ln^+ |f(\zeta)|)^p (\rho(\zeta, \partial G))^\alpha dm_2(\zeta),$$

$$f \in S_\alpha^p(D).$$

$$2. \sup_{m \geq 1} n_m < +\infty, \text{ где } n_m := \operatorname{card}\{z_k : z_k \in Q_m\}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{C}$ ,  $G \neq \mathbb{C}$ ,  $\{z_k\}_1^\infty \subset G$ ,  $\{Q_k\}_1^\infty$  — разложения Уитни множества  $G$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

$$1. \sum_{k=1}^{+\infty} \rho(z_k, \partial G)^{\alpha+2} |f(z_k)|^p \lesssim \int_G |f(\zeta)|^p \rho(\zeta, \partial G)^\alpha dm_2(\zeta), f \in A_\alpha^p(G).$$

$$2. \sup_{m \geq 1} \{\operatorname{card}(z_k : z_k \in Q_m)\} < +\infty.$$

Для формулировки следующего утверждения введём ещё несколько обозначений.

Пусть область  $G$  совпадает с единичным кругом  $D$ :

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, k \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}_+ : -2^k \leq l \leq 2^k - 1,$$

положим

$$\Delta_{k,l} = \{z \in D : 1 - \frac{1}{2^k} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{-\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k}\}.$$

Очевидно, что  $D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (\bigcup_{l=-2^k}^{2^k-1} \Delta_{k,l})$ , система  $\{\Delta_{k,l}\}$  — является аналогом разложения Уитни для единичного круга  $D$ . Из теоремы 1 и 2 следует:

**Теорема 1'.** Пусть  $\{z_k\}_1^\infty$  — произвольная последовательность из единичного круга  $D$ . Тогда следующее утверждения равносильны:

$$1. \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} (\ln^+ |f(z_k)|)^p \lesssim \int_D (1 - |\zeta|)^\alpha (\ln^+ |f(\zeta)|)^p dm_2(\zeta),$$

$$f \in S_{\alpha}^p(D).$$

$$2. \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \max_{-2^k \leq l < 2^{k+1}} \{card(z_m : z_m \in \Delta_{k,l})\} < +\infty.$$

**Теорема 2'.** Пусть  $0 < p < +\infty$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

$$1. \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} |f(z_k)|^p \lesssim \int_D (1 - |\zeta|)^{\alpha} |f(\zeta)|^p dm_2(\zeta), f \in A_{\alpha}^p(D).$$

$$2. \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \max_{-2^k \leq l < 2^{k+1}} \{card(z_m : z_m \in \Delta_{k,l})\} < +\infty.$$

Метод, применяемый при доказательстве теорем 1, 2, был разработан ещё в 1975 году в работах первого автора (см. [3], [4].) Ясно также, что справедливость теорем 2, 1', 2' будет следовать из теоремы 1.

Доказательство импликации  $2) \Rightarrow 1)$  теоремы 1 фактически проведено в работах [2], [3]. Доказательство импликации  $1) \Rightarrow 2)$  опирается на теорему Уитни и следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $w \in \mathbb{C} : |w| < q < 2^{\frac{1}{m}} - 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$Re(1 - w)^m \geq \delta > 0, \delta = 2^{\frac{1}{m}} - 1 - q.$$

**Лемма 2.** Пусть  $G$  — любая область в  $\mathbb{C}$ ,  $G \neq \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} \setminus (G \cup \partial G) = \Omega$ ,  $\beta > \alpha + 2$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда если  $z \in \Omega$ , то справедлива оценка:

$$\int_G \frac{\rho(\zeta, \partial G)^{\alpha}}{|\zeta - z|^{\beta}} dm_2(\zeta) \lesssim \frac{1}{(\rho(z, \partial G))^{\beta}}.$$

### Список литературы

1. Dzhrbashyan A. E., F.A. Shamoyan F. A. Topics in the Theory of  $A_{\alpha}^p$  Spaces // Teubner-Texte zur Math., Leipzig, — 1988. —р. 200.
2. Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций // Изд. Мир Москва — 1973.
3. Шамоян Ф. А. Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в классах  $H^p$ ,  $0 < p < +\infty$  // Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., — 1976. —Т. XI. —С. 357–368.
4. Шамоян Ф. А. Теорема вложения в пространствах  $n$ -гармонических функций и некоторые приложения // ДАН АрмССР — 1976. —Т. 60. —С. 123–129.
5. Seip K. Interpolation and sampling in spaces of analytic functions // American Mathematical Soc. Univ. Lecture series vol.33, Providence, Rhode Island — 2004.

### References

1. Dzhrbashyan A. E., F.A. Shamoyan F. A. Topics in the Theory of  $A_{\alpha}^p$  Spaces // Teubner-Texte zur Math., Leipzig, — 1988. —р. 200.
2. Stein I.M. Singular integrals and differential properties of functions // M.: Mir — 1973. (in Russian)
3. Shamoyan F.A. Embedding theorems connected with problems of multiple interpolation in the classes  $H^p$ ,  $0 < p < +\infty$  // Izv. AN ArmSSR, Matem., — 1976. —V. XI. —P. 357–368. (in Russian)

4. *Shamoyan F.A.* Embedding theorem in the spaces of  $n$ -harmonic functions and some applications // Doklady AN ArmSSR — 1976. — V. 60. — P. 123–129. (in Russian)

5. *Seip K.* Interpolation and sampling in spaces of analytic functions // American Mathematical Soc. Univ. Lecture series vol.33, Providence, Rhode Island — 2004.

### Сведения об авторах

Шамоян Файзо Агитович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа и НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, shamoyanfa@yandex.ru;

Тасоева Екатерина Владимировна, аспирант, мл.н.с. НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, eka3543628@yandex.ru.

## EMBEDDING THEOREMS IN WEIGHTED SPACES OF FUNCTIONS

**F.A. Shamoyan, E.V. Tasoeva**

Bryansk State University

**Abstract.** In this paper we set the embedding theorems for the Bergman spaces of functions in an arbitrary open set  $G$  in the complex plane and for the class of analytic functions  $f$  in  $G$  with  $\log^+ |f|$  from  $L^p$ -spaces in terms of the Whitney decomposition.

**Key words:** the Whitney expansion, analytic functions, Bergman space, the embedding theorems.

### About authors

Shamoyan F.A., Ph.D., professor, head of the research laboratory, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, shamoyanfa@yandex.ru;

Tasoeva E.V., graduate, junior researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, eka3543628@yandex.ru.

УДК 537.611, 530.146

## БРИЗЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ О(3) НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

**Ф.Ш. Шокиров**

Физико-технический институт им. С.У.Умарова Академии наук Республики Таджикистан

Аннотация. Проведено исследование процессов формирования и эволюции бризерных решений двумерной О(3) нелинейной сигма-модели в анизотропном случае. Получены выражения для фазовых параметров класса периодических функций. Проведено численное исследование свойств найденных решений.

**Ключевые слова:** О(3) нелинейная сигма-модель, уравнение синус-Гордона, двумерный бризер, математическое моделирование.

Непрерывное семейство периодически зависящих от времени решений бризерного (дублетного) или бионного типа нелинейных теоретико-полевых моделей, представляет классическую модель составных частиц играющих важную роль во многих физических процессах [1]. Бризерные решения, так же как и бионы представляют собой связанное состояние двух элементарных составляющих, представляя при этом разную природу с точки зрения их физической интерпретации: бризерные структуры можно разбить на составные части, тогда как для бионов такой процесс невозможен [2].

В настоящей работе асимптотическими и численными методами получены устойчивые периодические во времени решения двумерной О(3) нелинейной сигма-модели (НСМ), которых будем называть – бризерами. В наших предыдущих работах [3-5] на основе бризерных решений двумерного уравнения синус-Гордона (СГ)

$$u(x, y, t) = -4 \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda(t)}{\sqrt{1-\lambda(t)^2}} \frac{\sin(\varphi(t))}{\operatorname{ch}(\lambda(t)x) \operatorname{ch}(\lambda(t)y)} \right), \quad (1)$$

приведенных в работе [6] численными методами были получены устойчивые бризерные решения О(3) НСМ, обладающие динамикой внутренней степени свободы вектора  $n$ -поля в изопространстве  $S^2$ . В эйлеровой параметризации уравнения Лагранжа-Эйлера исследуемой сигма-модели имеют следующий вид [3-5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left[ \delta - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \sin \theta \cos \theta &= 0 \\ 2 \cos \theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \sin \theta \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta(x, y, t)$  и  $\varphi(x, y, t)$  – эйлеровы углы, связанные с изоспиновыми параметрами модели (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin \alpha \cos \beta, \quad s_2 = \sin \alpha \sin \beta, \quad s_3 = \cos \alpha, \\ s_i s_i &= 1, \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$\delta$  – постоянная анизотропии. Отметим, что уравнения (2) в меридианном сечении изотопического пространства ( $\varphi(x, y, t) = \text{const}$ ) сводятся [3-5] к двумерному уравнению СГ вида:

$$2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \delta \sin 2\theta. \quad (3)$$

Таким образом, для получения решения в расслоённом пространстве единичной сферы:

$$S^2 = SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$$

в качестве начального условия было задано возмущённое решение в виде (1), с дополнительной динамикой – вращением вектора АЗ-поля в изопространстве в виде  $\varphi = \varphi_0 + \omega\tau$ . В процессе эволюции определённого таким образом начального импульса сформировалось новое устойчивое бризерное решение двумерной  $O(3)$  НСМ [3-5].

В отличие от численных результатов, полученных в работах [3-5], в настоящей работе задача была исследована также асимптотическими методами и получен аналитический вид класса бризерных решений двумерной  $O(3)$  НСМ.

В работе [6] задача определения выражения для пробной функции бризерного типа двумерного уравнения СГ была исследована в лагранжевом и гамильтоновом подходах. В первом случае, при рассмотрении усредненного лагранжиана  $(2+1)$ -мерного уравнения СГ

$$L = \frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2 - u_y^2) - 1 + \cos u \quad (4)$$

относительно быстрой фазы  $\varphi(t)$  интегральное уравнение

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\varphi \quad (5)$$

было решено приближенными методами, но результаты исследований в указанной работе не были представлены. Исследования пробной функции (1) в работе [6] продолжены на основе гамильтонова подхода, где были получены асимптотически и численно устойчивые осциллирующие решения (бризеры) двумерного уравнения СГ.

В настоящей работе мы продолжили исследования, проведенные авторами работы [6] в лагранжевом подходе. Получены точные значения интегралов группы (5) относительно фазовых и пространственных  $(x, y)$  переменных и уравнения для параметров  $\lambda(t)$  и  $\varphi(t)$  пробного решения (1). Усредненная плотность лагранжиана (4) уравнения СГ получена в виде

$$\mathcal{L} = \Xi(\lambda)\lambda_t^2 + \Omega(\lambda)\varphi_t^2 - \Theta(\lambda), \quad (6)$$

где

$$\Xi(\lambda) = \frac{2\psi(\lambda)}{(1-\lambda^2)^{3/2}},$$

$$\Omega(\lambda) = \frac{4\lambda^2\psi(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}},$$

$$\Theta(\lambda) = \frac{48}{\lambda}\psi(\lambda)\operatorname{arth}(\lambda) - 32,$$

$$\lambda = \lambda(t), \varphi = \varphi(t).$$

Заметим, что результаты исследований, проведенных в работе [6] (см., также ссылки, приведенные в указанной работе) показали, что динамику пробной функции (1) можно описать исследованием свойств двух фазовых параметров  $\lambda(t)$  и  $\varphi(t)$ . В нашем случае, уравнения для указанных параметров определены в следующем виде:

$$\lambda_{tt} + f(\lambda)\lambda_t^2 + g(\lambda) = 0,$$

где

$$f(\lambda) = \frac{3\lambda\Theta(\lambda)}{2(1-\lambda^2)},$$

$$g(\lambda) = -\lambda(2-\lambda^2)\varphi_t^2 - \frac{12\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2}((1-\lambda^2)\psi(\lambda)\operatorname{arth}(\lambda) - \lambda);$$

$$\varphi_{tt} + \psi(\lambda)\Theta(\lambda)\frac{(2-\lambda^2)}{\lambda(1-\lambda^2)}\lambda_t\varphi_t = 0. \quad (7)$$

Найдены искомые выражения для фазовых параметров  $\lambda(t)$  и  $\varphi(t)$  в следующем виде:

$$\lambda(t, D) = \pm \operatorname{th} \left[ \sqrt{3}D \frac{\pm \sqrt{1+\sqrt{2}t} \frac{D^2-288}{3D\psi(\lambda)} - 1}{\psi(\lambda)D^2-288} \right] \quad (8)$$

$$\varphi(t, D) = -\frac{\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda \Theta(\lambda) \arcsin(\lambda)}{4\lambda\psi(\lambda)} D, \quad (9)$$

где  $D = D(v_{t_0})$  – константа, определенная начальной скоростью (1).

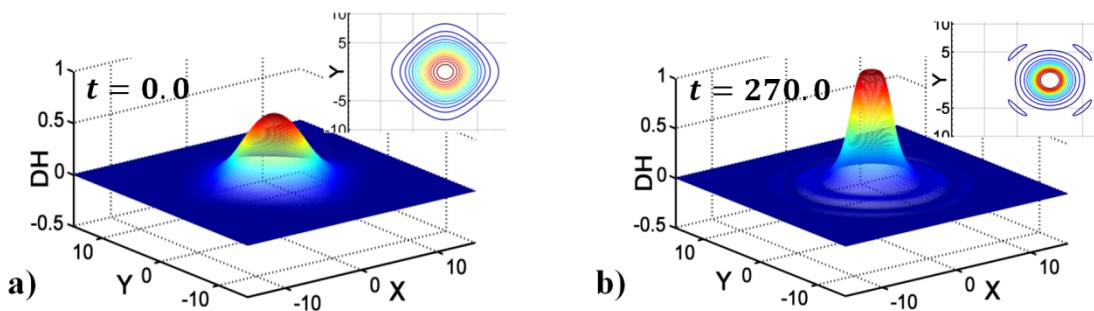
При выводе (9) было учтено, что (6) не зависит от  $\varphi(t)$  и, следовательно, существует [6] сохраняющаяся величина  $D = \Omega\varphi_t$ :

$$\frac{d}{dt}D(v_{t_0}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\lambda^2\psi(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\varphi_t\right) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что из (10) также следует уравнение (7) для  $\varphi(t)$ .

На основе методов теории конечных разностных схем [7], а также разработанных алгоритмов моделирования нелинейных теоретико-полевых моделей [5] были получены численные модели эволюции пробного решения (1) с учетом (8) и (9). Интеграл энергии численных моделей сохранялся с хорошей точностью:  $\frac{\Delta E n}{E n} \in (10^{-5} - 10^{-4})$ .

Численная схема, разработанная в наших исследованиях [5], основана на разностных схемах [7] с погрешностью аппроксимации второго порядка точности по времени и координате:  $O(h^2 + \tau^2)$  [3-5]. В качестве тестовых моделей получены устойчивые численные бризеры уравнения СГ (3) при  $D(v_{t_0}) = \operatorname{sh}(3.69)$  (рис.1). Заметим, что полученные тестовые модели пробного решения (1), которые изначально не являются радиально-симметричными (рис.1а), эволюционируют к радиально-симметричному виду (рис.1б). Последнее свойство также было обнаружено в работе [6]. Для тестовых моделей добавлением [3-5] вращения ( $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ ,  $\omega \neq 0$ ) вектору АЗ-поля в изотопическом пространстве  $S^2$ , путем решения задачи Коши получены устойчивые бризерные решения двумерной анизотропной О(3) НСМ (2).



**Рис.1.** Эволюция бризерных решений (1) уравнения СГ (тестовая модель). Плотность энергии ( $DH$ ) и проекции контурных линий при  $D(v_{t_0}) = \operatorname{sh}(3.69)$ : а)  $t = 0.0$ ; б)  $t = 270.0$ .

В нашем случае, в качестве пробного решения модели (2) было использовано следующее выражение:

$$\theta = -2 \arctg \left[ \frac{\lambda(t)}{\sqrt{1-\lambda(t)^2}} \frac{\sin \varphi(t)}{\operatorname{ch}(\lambda(t)x) \operatorname{ch}(\lambda(t)y)} \right], \quad (11)$$

где

$$\theta = \theta(x, y, t, \lambda(t), \varphi(t)).$$

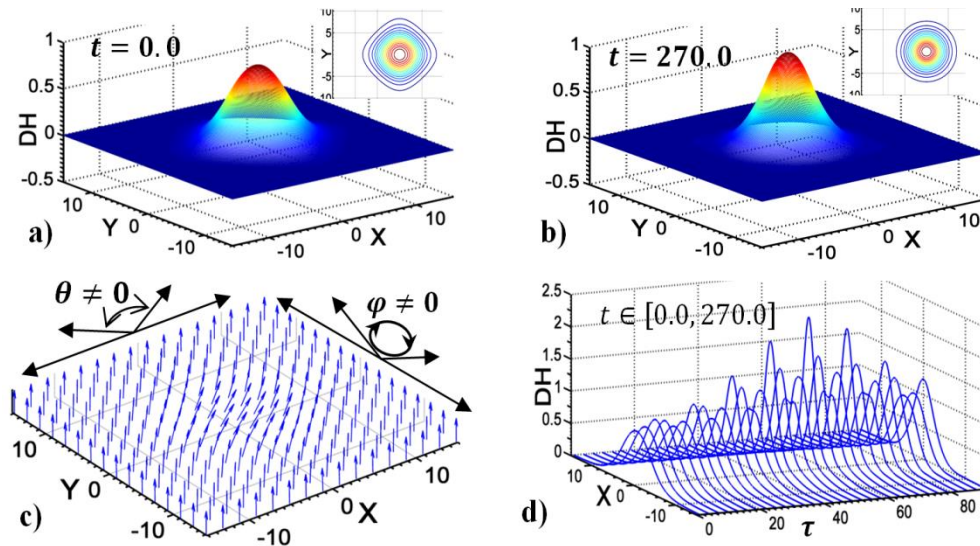
Для полевых функций  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеем

$$\begin{aligned} s_1 &= -2\xi \cos \varphi / (1 + \xi^2), & s_2 &= -2\xi \sin \varphi / (1 + \xi^2), \\ s_3 &= (1 - \xi^2) / (1 + \xi^2), & \varphi &= \omega \tau, \quad \omega \neq 0.0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\xi(x, y, t, \lambda(t), \varphi(t)) = \frac{\lambda(t) \sin(\varphi(t))}{\sqrt{1-\lambda(t)^2} \operatorname{ch}(\lambda(t)x) \operatorname{ch}(\lambda(t)y)}.$$

На рис.2ab приведены иллюстрации для плотности энергии ( $DH$ ) и проекции контурных линий пробной функции (11), для  $\omega = 0.5$  при  $t = 0.0$  и  $t = 90.0$ . Проекция изоспинов численного бризера (11) на комплексную плоскость при  $t = 0.0$  приведена на рис.2с. На рис.2d приведена эволюция плотности энергии  $DH$  пробной функции (11) в сечении  $(x, y_0)$ ,  $y_0 = 0.0$  при  $t \in [0.0, 90.0]$ .



**Рис.2.** Эволюция бризерных решений (11)  $O(3)$  НСМ (2) при  $\omega = 0.5$ . Плотность энергии ( $DH$ ) и проекции контурных линий при  $D(v_{t_0}) = \operatorname{sh}(3.69)$ : **a)**  $t = 0.0$ ; **b)**  $t = 270.0$  ( $\tau = t/3$ ); **c)** трехмерная модель изотопических спинов решения (11) при  $t = 0.0$ ; **d)** эволюция  $DH$  решения (11) в сечении  $(x, y_0)$ ,  $y_0 = 0.0$ , при  $t \in [0.0, 270.0]$ .

На рис.3 приведен спектр значений интеграла энергии ( $En$ ) численных бризеров (11) в зависимости от значения параметров  $D(v_{t_0})$  и  $\Delta\omega$ .



В отличие от численных бризеров уравнения СГ (рис.1) бризерные решения (11) О(3) НСМ (2) обладают относительно большей плотностью энергии ( $DH$ ) (рис.3), которая является следствием наличия вращения ( $\varphi = \varphi_0 + \omega\tau, \omega \neq 0.0$ ) изотопического спина  $S(s_1, s_2, s_3)$  в  $S^2$ .

При численном моделировании в течении 45000 итерационных циклов ( $t \in [0.0, 270.0]$ ) общая потеря энергии ( $En_{loss}$ ) бризеров (10) О(3) НСМ составила

$$En_{loss}(\omega = 0.5) \approx 4.823\%,$$

что примерно на 6% меньше аналогичных потерь бризеров уравнения СГ (рис.4):

$$En_{loss}(\omega = 0.0) \approx 5.109\% .$$

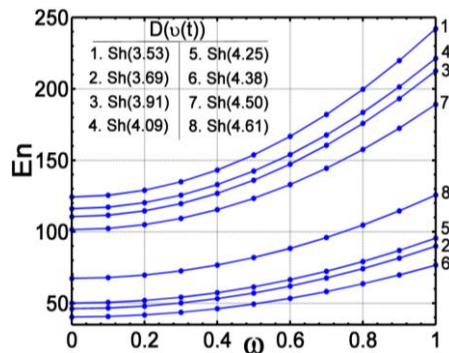


Рис.3. Интеграл энергии ( $En$ ) бризеров (11) модели (2) в зависимости от значений  $D(v_{t_0})$  и  $\Delta\omega$ .

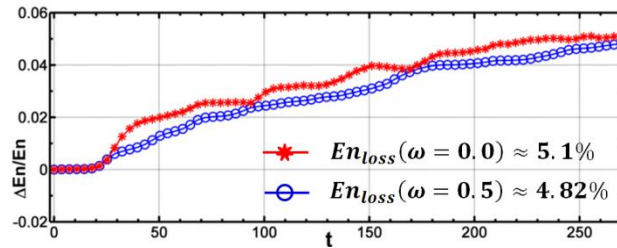


Рис. 4. Потеря энергии ( $En_{loss}$ ) бризеров (11)-(12) модели (2) для случаев  $\omega = 0.0$  и  $\omega = 0.5$ . Время моделирования:  $t \in [0.0, 270.0]$ .

Свойства полученных численных моделей указывают, что наличие дополнительного вращения изотопических спинов в  $S^2$  приводит к определенной диссипации амплитуды характерной бризерной динамики решений (1) уравнения СГ. При этом наблюдается увеличение значений интеграла ( $En$ ) и плотности энергии ( $DH$ ), а также энергии связи (см., рис.1, рис.2, контурные проекции  $DH$ ). Аналогичные свойства были обнаружены нами при исследовании (1+1)-мерных бризеров О(3) НСМ [8].

Таким образом, в настоящей работе получены аналитически и численно бризерные решения (2+1)-мерной О(3) нелинейной сигма-модели. Выполнено численное исследование динамики полученных решений, показана их стабильность в течение достаточно долгого времени (45000 итерационных циклов):  $t \in [0.0, 270.0]$ , хотя и при наличии слабого излучения Бризерные решения О(3) НСМ полученные в настоящей работе, а также исследованные нами в одномерном и двумерном случаях в работах [3-5,8,9] обладают нетривиальной динамикой

внутренней степени свободы, исследование природы которых представляет интерес с теоретической и прикладной точки зрения.

### Список литературы

1. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985, 416 с.
2. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Локлизированные нетопологические структуры: построение решений и проблемы устойчивости. – УФН, 1994, т.164, №2, с. 121-148.
3. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Dynamics of two-dimensional breathers in  $O(3)$  vectorial nonlinear sigma-model. – The Book of abstracts of the International Conference Mathematical modeling and computational physics, Russia, Dubna, 2013, p. 134.
4. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Новые двумерные бризерные решения  $O(3)$  векторной нелинейной сигма-модели. – ДАН РТ, 2011, т.54, №10, с. 825-830.
5. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Комплекс компьютерных программ для нахождения бризерных численных решений, проведения анализа и эволюции в двумерной  $O(3)$  нелинейной сигма-модели непертурбативных квантовых теорий поля. – Свидетельство о регистрации интеллектуального продукта, 0265TJ от 29.06.2010 г.
6. Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Evolution of two-dimensional standing and travelling breather solutions for the Sine-Gordon equation. – Phys. D, 2004, v.189 pp. 167-187.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989, 616 с.
8. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Численное моделирование бризеров 1D и 2D  $O(3)$  векторной нелинейной сигма-модели. – LI Всеросс. конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тез. докл. – М.: Изд-во РУДН, 2015, с. 94-98.
9. Shokirov F.Sh. Stationary and moving breathers in  $(2+1)$ -dimensional  $O(3)$  nonlinear  $\sigma$ -model. – *arXiv:1605.01000v1 [nlin.PS]* – 2016 – 11 pages.

### References

1. Rajaraman R. *Solitoni I instantoni v kvantovoy teorii polya* [Solitons and instantons in quantum field theory]. *Moscvva: Mir*, 1985, 416p.
2. Makhankov V.G., Rybakov Y.P., Sanyk V.I. The Localized topological structures: construction of solutions and stability problems. – *Advances in Physical Sciences*, 1994, 164 (2), pp.121-148.
3. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Dynamics of two-dimensional breathers in  $O(3)$  vectorial nonlinear sigma-model. – *The Book of abstracts of the International Conference Mathematical modeling and computational physics, Russia, Dubna*, 2013, p. 134.
4. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. New two-dimensional breather solutions of the  $O(3)$  vectorial nonlinear sigma model. – *Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2011, vol.54, no.10, pp.825-830.
5. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. The complex of computer programs for investigation a breather numerical solutions, analysis and evolution in a two-dimensional  $O(3)$  nonlinear sigma model of non-perturbative quantum field theories. – *Certificate of registration of an intellectual product*, 0265TJ on 29.06.2010.
6. Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Evolution of two-dimensional standing and travelling breather solutions for the Sine-Gordon equation. – *Phys. D*, 2004, v.189 pp.167-187.
7. Samarsky A.A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. *Moscvva, Nauka*, 1977, 657p.
8. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Numerical simulation of 1D and 2D breathers of the  $O(3)$  vectorial nonlinear sigma model. – *Proceedings of LI-Russian conference on the problems of dynamics*,

particle physics, plasma physics and optoelectronics. Moscow: Publishing House of Peoples' Friendship University, 2015, pp.94-98.

9. Shokirov F.Sh. Stationary and moving breathers in (2+1)-dimensional  $O(3)$  nonlinear  $\sigma$ -model. – *arXiv:1605.01000v1 [nlin.PS]* – 2016 – 11 pages.

#### Сведения об авторе

Шокиров Фарход Шамсидинович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник сектора теоретической физики ФТИ им. С.У.Умарова АН РТ, e-mail: farhod0475@gmail.com.

### BREATHER SOLUTIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL $O(3)$ NONLINEAR SIGMA MODEL

**F.Sh. Shokirov**

S.U.Umarov Physical-Technical Institute of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

**Abstract.** The formation and evolution of breathers of two-dimensional  $O(3)$  nonlinear sigma model is investigated in anisotropic case. Expressions for the phase parameters of the class of periodic functions are obtained. Numerical study of the properties of the found solutions is conducted.

**Keywords:**  $O(3)$  nonlinear sigma model, sine-Gordon equation, two-dimensional breather, mathematical modeling.

#### About author

Shokirov F.Sh. – Candidate of Physical and Mathematical Science, Leading Researcher of S.U.Umarov PhTI of AS RT, e-mail: farhod0475@gmail.com.

УДК 517.53

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА <sup>9</sup>

Е.Н. Шубабко

Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского,  
филиал в г. Новозыбкове

Аннотация. В работе представлены результаты исследования класса целых функций бесконечного порядка, рост характеристики Неванлинны которых близок к экспоненциальному. Получены условия на корневые множества и факторизационное представление этого класса при некоторых ограничениях на весовую функцию.

**Ключевые слова:** целая функция, характеристика Неванлинны, весовые классы целых функций, корневые множества, факторизация.

В теории целых функций комплексного переменного одним из важнейших направлений является изучение задач, связанных с характеристикой корневых множеств и построением факторизационных представлений различных классов функций. Классические теоремы Адамара и Вейерштрасса устанавливают факторизацию целых функции конечного порядка [1]. Исследованию корневых множеств функций бесконечного порядка посвящен ряд работ, среди которых отметим [2-5]. Исследование классов целых функций, допускающих сильный рост в бесконечности, по-прежнему представляет интерес.

Пусть  $H(C)$  - множество всех целых функций на комплексной плоскости  $C$ ,  $\omega(r)$  – монотонно растущая, положительная при  $r \geq 0$  функция, для которой  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\omega'(r)}{\omega(r)} = \alpha > 0$ .

Введем в рассмотрение класс функций

$$N_{\omega} = \{f \in H(C) : \int_0^{+\infty} T(r, f) e^{-\omega(r)} dr < +\infty\} \quad (1)$$

где  $T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$  - характеристика Р. Неванлинны (см. [1]).

Свойства класса  $N_{\omega}$  для случая  $\omega(r) = \sigma r^{\alpha} - \beta \ln r$  (при  $\alpha \geq 1, \sigma > 0, \beta \in R$ ) рассмотрены в статье [6].

**Теорема 1.** Если  $f(z) \in N_{\omega}$  ( $f(z) \not\equiv 0$ ), тогда последовательности нулей функции  $f$  удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} n(r) e^{-\omega(r)} \frac{dr}{\omega(r)} < +\infty \quad (2)$$

где  $n(r) = \text{card}\{z_k : |z_k| \leq r\}$  – количество нулей функции  $f$  в круге  $|z| \leq r$  с учетом их кратности.

**Доказательство.** Используем свойства характеристики Р. Неванлинны  $T(r, f) \geq N(r, f)$ , где  $N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt$  - считающая функция Р. Неванлинны (см. [1]),  $n(0)$  – порядок нуля  $f(z)$  в начале координат. Не уменьшая общности, будем считать, что  $f(0) \neq 0$ . Тогда из (1)

<sup>9</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (задание №1.1704.2014К)

$$C_f = \int_0^{+\infty} T(r, f) e^{-\omega(r)} dr \geq \int_0^{+\infty} N(r, f) e^{-\omega(r)} dr = \int_0^{+\infty} e^{-\omega(r)} \int_0^r n(t) \frac{dt}{t} dr = \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t} \int_t^{+\infty} e^{-\omega(r)} dr dt = I_1.$$

Не трудно убедиться, что  $I_t = \int_t^{+\infty} e^{-\omega(r)} dr \sim \frac{te^{-\omega(t)}}{\alpha\omega(t)}$  при  $t \rightarrow +\infty$ , поэтому

$$C_f \geq I_1 \geq c \int_0^{+\infty} n(t) e^{-\omega(t)} \frac{dt}{\omega(t)}, \text{ что и доказывает теорему.}$$

**Лемма 1.** Если для последовательности комплексных чисел  $\{a_k\}_1^{+\infty}$  ( $0 < |a_k| \leq |a_{k+1}|$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k| = +\infty$ ) выполнено условие (2), то

$$1) n(r) \leq ce^{\omega(r)} \frac{\omega^2(r)}{r}, r > 0; \quad (3)$$

$$2) \text{ сходится ряд } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\exp(-\omega(|a_k|))}{|a_k|^\delta \omega(|a_k|)} \quad (\forall \delta > \alpha - 1). \quad (4)$$

**Доказательство.** Для доказательства (3) используем неубывание функции  $n(r)$ .

$$C_f = \int_0^{+\infty} n(t) e^{-\omega(t)} \frac{dt}{\omega(t)} \geq \int_\rho^{+\infty} n(t) e^{-\omega(t)} \frac{dt}{\omega(t)} \geq n(\rho) \int_\rho^{+\infty} e^{-\omega(t)} \frac{dt}{\omega(t)}.$$

Учитывая, что  $I_\rho = \int_\rho^{+\infty} e^{-\omega(t)} \frac{dt}{\omega(t)} \sim \frac{\rho e^{-\omega(\rho)}}{\alpha\omega^2(\rho)}$  при  $\rho \rightarrow +\infty$ , получим

$$n(\rho) \leq ce^{\omega(\rho)} \frac{\omega^2(\rho)}{\rho}, \rho > 0.$$

Положим далее  $\rho = |a_1| > 0$  и  $r > \rho$  - точка непрерывности функции  $n(r)$ .

$$\sum_{k=1}^n \frac{\exp(-\omega(|a_k|))}{|a_k|^\delta \omega(|a_k|)} = \int_\rho^r \frac{e^{-\omega(t)}}{t^\delta \omega(t)} dn(t) = I_1.$$

Интегрируя по частям, применяя оценку (3) и свойства  $\omega(r)$ , получим

$$I_1 \leq \frac{e^{-\omega(r)}}{r^\delta \omega(r)} n(r) + \int_\rho^r n(t) \frac{e^{-\omega(t)}}{\omega(t)} \left( \frac{\omega'(t)}{t^\delta} + \frac{\delta}{t^{\delta+1}} + \frac{\omega'(t)}{t^\delta \omega(t)} \right) dt \leq c_1 + c_2 \int_\rho^r n(t) \frac{e^{-\omega(t)}}{\omega(t)} dt$$

при  $\delta > \alpha - 1$ . Так как последний интеграл сходится при  $r \rightarrow +\infty$ , то и ряд (4) также сходится для произвольного  $\delta > \alpha - 1$ .

**Лемма 2.** Если для последовательности комплексных чисел  $\{a_k\}_1^{+\infty}$  ( $0 < |a_k| \leq |a_{k+1}|$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k| = +\infty$ ) сходится ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\exp(-\omega(|a_k|))}{|a_k|^\delta \omega(|a_k|)}$ , то бесконечное произведение типа Вейерштрасса

$$W_\omega(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_k} \right) \exp \left( \sum_{j=1}^{p_k} \frac{1}{j} \left( \frac{z}{a_k} \right)^j \right) \quad (5)$$

где  $p_k = [\omega(|a_k|) + \delta]$ , сходится абсолютно и равномерно в каждом круге  $|z| \leq r$  и обращается в ноль только в точках последовательности  $\{a_k\}_1^{+\infty}$ .

**Доказательство.** Пусть  $|z| \leq r$ . Оценим элементарный множитель произведения (5)

$$A_k(z) = \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{p_k} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{a_k}\right)^j\right) \quad (6)$$

при  $k > k_0$  и  $|a_k| \geq er$ .

$$\begin{aligned} |A_k(z)| &\leq \exp\left(\sum_{j=p_k+1}^{+\infty} \frac{1}{j} \left|\frac{z}{a_k}\right|^j\right) \leq \exp\left(\frac{1}{p_k+1} \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^{p_k+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k+1+j} \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^j\right) \leq \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{p_k+1} \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^{p_k+1} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

В силу неравенства  $\omega(|a_k|) + \delta - 1 < p_k = [\omega(|a_k|) + \delta] \leq \omega(|a_k|) + \delta$ , из (7) получим

$$\ln |A_k(z)| \leq \frac{e}{e-1} \frac{1}{\omega(|a_k|) + \delta} \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^{\omega(|a_k|) + \delta} \leq \frac{e}{e-1} \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^{\delta} \frac{e^{-\omega(|a_k|)}}{\omega(|a_k|) + \delta} \leq cr^{\delta} \frac{e^{-\omega(|a_k|)}}{|a_k|^{\delta} \omega(|a_k|)}. \quad (8)$$

Из оценки (8) и известного признака сходимости бесконечных произведений следует утверждение леммы.

С учетом лемм 1-2 из теоремы 1 немедленно получаем

**Следствие 1.** Если  $f(z) \in N_{\omega}$  ( $f(z) \neq 0$ ), то ее можно представить в виде

$$f(z) = z^n W_{\omega}(z) \exp\{h(z)\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где  $W_{\omega}(z)$  – бесконечное произведение (5), построенное по нулям функции  $f(z)$  ( $\delta > \alpha - 1$ ),  $h(z)$  – некоторая целая функция и  $n$  – кратность нуля  $f(z)$  в начале координат.

При дополнительных ограничениях на функцию  $\omega(r)$  получим достаточное условие принадлежности произведения (5) классу  $N_{\omega}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\omega(r)$  – монотонно растущая, положительная, выпуклая вниз при  $r \geq 0$  функция, для которой  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\omega'(r)}{\omega(r)} = 1$ . Если для последовательности комплексных чисел

$\{a_k\}_1^{+\infty}$  ( $0 < |a_k| \leq |a_{k+1}|$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k| = +\infty$ ) выполнено условие

$$\int_0^{+\infty} n(r) e^{-\omega(r)} t^{\beta} \omega(r) \ln \omega(r) dr < +\infty \quad (9)$$

при некотором  $\beta > 1$ , то бесконечное произведение (5) (где  $\delta > 0$ ) принадлежит классу  $N_{\omega}$ .

**Доказательство.** Используем известную оценку элементарных множителей (6) (см. [7])

$$\ln |A_k(z)| \leq 2(\ln^+ p_k + 2) \min\left\{\left|\frac{z}{a_k}\right|^{p_k}; \left|\frac{z}{a_k}\right|^{p_k+1}\right\}.$$

При  $|z| \leq r$  получим

$$\begin{aligned} T(r, W_{\omega}) &\leq \sum_{|a_k| \leq r} 2(\ln^+ p_k + 2) \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^{p_k} + \sum_{|a_k| > r} 2(\ln^+ p_k + 2) \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^{p_k+1} \leq \\ &\leq c_1 \int_{\rho}^r \left(\frac{r}{t}\right)^{[\omega(t)+\delta]} \ln \omega(t) dn(t) + c_2 \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{[\omega(t)+\delta]+1} \ln \omega(t) dn(t) \leq c \int_{\rho}^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{\omega(t)+\delta} \ln \omega(t) dn(t), \end{aligned} \quad (10)$$

где мы учитываем, что при  $t < \rho = |a_1|$   $n(t) = 0$ . Интегрируя (10) по частям и выделяя главную часть полученного выражения, придем к оценке

$$T(r, W_\omega) \leq c \int_{\rho}^{+\infty} \left( \frac{r}{t} \right)^{\omega(t)+\delta} \ln \omega(t) dn(t) \leq c_1 \int_{\rho}^r n(t) \frac{r}{t^{\delta+1}} \exp(\omega(t) \ln \frac{r}{t}) \omega(t) \ln \omega(t) dt + \\ + c_2 \int_r^{+\infty} n(t) \frac{r}{t^{\delta+1}} \exp(\omega(t) \ln \frac{r}{t}) \omega(t) \ln \omega(t) \ln \frac{t}{r} dt. \quad (11)$$

Далее с учетом (11) оценим

$$I = \int_0^{+\infty} T(r, W_\omega) e^{-\omega(r)} dr \leq c_1 \int_0^{+\infty} e^{-\omega(r)} r^\delta \int_{\rho}^r n(t) \frac{\omega(t)}{t^{\delta+1}} \exp(\omega(t) \ln \frac{r}{t}) \ln \omega(t) dt dr + \\ + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-\omega(r)} r^\delta \int_r^{+\infty} n(t) \frac{\omega(t)}{t^{\delta+1}} \exp(\omega(t) \ln \frac{r}{t}) \ln \omega(t) \ln \frac{t}{r} dt dr = c_1 I' + c_2 I'' . \quad (12)$$

$$I' = \int_0^{+\infty} e^{-\omega(r)} r^\delta \int_{\rho}^r n(t) \frac{\omega(t)}{t^{\delta+1}} \exp(\omega(t) \ln \frac{r}{t}) \omega(t) \ln \omega(t) dt dr = \\ = \int_{\rho}^{+\infty} n(t) \frac{\omega(t)}{t^{\delta+1}} \exp(-\omega(t) \ln t) \ln \omega(t) \int_t^{+\infty} e^{-\omega(r)} r^\delta \exp(\omega(t) \ln r) dr dt = \\ = \int_{\rho}^{+\infty} n(t) \frac{\omega(t)}{t^{\delta+1}} \exp(-\omega(t) \ln t) \ln \omega(t) \int_t^{+\infty} r^{-1-\varepsilon} \exp(-\omega(r) + \omega(t) \ln r + (\delta+1+\varepsilon) \ln r) dr dt.$$

Учитывая, что при установленных в теореме ограничениях на  $\omega(r)$ , функция  $g(r) = -\omega(r) + \omega(t) \ln r + (\delta+1+\varepsilon) \ln r$ ,  $\varepsilon > 0$ , удовлетворяет условию  $g(r) \leq g(t) + C$  при  $r > t$ , где  $C$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $t$  и  $r$ , получим

$$I' \leq c_1 \int_{\rho}^{+\infty} n(t) \frac{\omega(t) e^{-\omega(t)}}{t^{-\varepsilon}} \ln \omega(t) \int_t^{+\infty} r^{-1-\varepsilon} dr dt \leq c_2 \int_0^{+\infty} n(t) e^{-\omega(t)} \omega(t) \ln \omega(t) dt \leq \\ \leq c_3 \int_0^{+\infty} n(t) e^{-\omega(t)} t^\beta \omega(t) \ln \omega(t) dt. \quad (13)$$

Для оценки второго слагаемого в (12) учтем, что из (9) следует неравенство

$$n(r) \leq c \frac{e^{\omega(r)}}{r^{\beta+1} \ln \omega(r)}, r > 0.$$

Получим

$$I'' = \int_0^{+\infty} e^{-\omega(r)} r^\delta \int_r^{+\infty} n(t) \frac{\omega(t)}{t^{\delta+1}} \exp(\omega(t) \ln \frac{r}{t}) \ln \omega(t) \ln \frac{t}{r} dt dr \leq \\ \leq c \int_1^{+\infty} e^{-\omega(r)} r^\delta \int_r^{+\infty} \frac{e^{\omega(t)}}{t^{\beta+1} \ln \omega(t)} \frac{\omega(t)}{t^{\delta+1}} \exp(\omega(t) \ln \frac{r}{t}) \ln \omega(t) \ln \frac{t}{r} dt dr = \\ \leq c \int_1^{+\infty} e^{-\omega(r)} r^\delta \int_r^{+\infty} \exp(\omega(t) (1 - \ln \frac{t}{r}) + \ln \omega(t) - (\delta + \beta + 1 - \varepsilon) \ln t) t^{-1-\varepsilon} \ln \frac{t}{r} dt dr \quad (14)$$

Учитывая, что функция  $g(t) = \omega(t) (1 - \ln \frac{t}{r}) + \ln \omega(t) - (\delta + \beta + 1 - \varepsilon) \ln t$  ( $\varepsilon > 0$ ) в условиях теоремы убывает на промежутке интегрирования, из (14) получим

$$I'' \leq c \int_1^{+\infty} r^{-1-\beta+\varepsilon} \omega(r) \int_r^{+\infty} t^{-1-\varepsilon} \ln \frac{t}{r} dt dr \leq c_1 \int_1^{+\infty} r^{-1-\beta} \omega(r) dr = c_2 < +\infty. \quad (15)$$

Последний интеграл сходится, так как по условию теоремы  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\omega'(r)}{\omega(r)} = 1$  и  $\beta > 1$ .

Объединяя оценки (12) - (15), получим утверждение теоремы.

**Следствие 2.** Пусть  $\omega(r)$  – монотонно растущая, положительная, выпуклая вниз при  $r \geq 0$  функция, для которой  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\omega'(r)}{\omega(r)} = 1$ . Если для последовательности комплексных чисел  $\{a_k\}_1^{+\infty}$  ( $0 < |a_k| \leq |a_{k+1}|$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k| = +\infty$ ) выполнено условие (9) при некотором  $\beta > 1$ , то функция вида  $f(z) = z^n W_\omega(z) \exp\{h(z)\}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ), где  $n$  – кратность нуля  $f(z)$  в начале координат,  $W_\omega(z)$  – бесконечное произведение (5), с параметром  $\delta > 0$ ,  $h(z)$  – целая функция, удовлетворяющая условию  $\max_{|z| < r} |h(z)| \leq c_h \frac{e^{\omega(r)}}{\psi(r)}$  при некоторой функции  $\psi(r)$ , такой что  $\int_0^{+\infty} \frac{dr}{\psi(r)} < +\infty$ , принадлежит классу  $N_\omega$ .

### Список литературы

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин / М.: Гостехиздат, 1956. – 632с.
2. Rubel L. A. A Fourier series method for entire functions / L. A. Rubel // Duke Math. J. – 1963. – v. 30. – P. 437–442.
3. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions / L. A. Rubel, B. A. Taylor // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – v. 96. – P. 53–96.
4. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции / А. А. Кондратюк / – Львов: Вища школа, 1988. – 196 с.
5. Быков С.В., Шамоян Ф.А. О нулях целых функций с мажорантой бесконечного порядка / С.В. Быков, Ф.А. Шамоян // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21. – № 6. – С. 66–79.
6. Шубабко Е.Н. Об одном классе целых функций с экспоненциальным ростом характеристики Неванлинны / Е.Н. Шубабко // Научно-технический вестник Поволжья. – 2015. – №6. – С. 38–42.
7. Хейман У. Мероморфные функции / У. Хейман / Пер. с англ. / – М.: Мир. – 1966. – 447 с.

### References

1. Levin B. Y. Distribution of zeros of entire functions / B.Y. Levin / M.: Gostekhizdat, 1956. – 632p.
2. Rubel L. A. A Fourier series method for entire functions / L. A. Rubel // Duke Math. J. – 1963. – v. 30. – P. 437–442.
3. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions / L. A. Rubel, B. A. Taylor // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – v. 96. – P. 53–96.
4. A.A. Kondratyuk, The Fourier series and meromorphic functions. / A.A. Kondratyuk / - Lviv: Vishcha Shola, 1988. – 196 p.
5. Bykov C.V., Shamoyan F.A. On the zeros of entire functions with majorant of infinite order / S.V. Bykov, F.A. Shamoyan // Algebra and Analysis. – 2009. – v. 21. – № 6. – p. 66–79.
6. Shubabko E.N. About one class of entire functions with the exponential growth of the Nevanlinna characteristic / E.N. Shubabko // Scientific and Technical Volga region Bulletin. – 2015. – №6. – p. 38–42.
7. Hayman U. Meromorphic functions / W. Hayman / – M.: Mir. – 1966. – 447 p.



**Сведения об авторе**

Шубабко Елена Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, с.н.с НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, филиал в г. Новозыбкове, shubabko@yandex.ru

**ABOUT ONE CLASS OF ENTIRE FUNCTION OF INFINITE ORDER**

**E. N. Shubabko**

Bryansk State University, branch in Novozybkov

**Abstract.** In the article the results of the study class of entire functions of infinite order, the growth of the Nevanlinna characteristic which is close to exponential. Obtain conditions on the zero set of this class and received the factorization representation.

**Keywords:** *entire function, Nevanlinna characteristic, weight class of entire functions, zero sets, factorization.*

**About author**

Shubabko Elena Nikolaevna, Ph.D., Associate Professor, Senior Researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University branch in Novozybkov, shubabko@yandex.ru.

УДК 517.55.

# ON TRACES IN HARDY TYPE ANALYTIC SPACES IN THE UNIT BALL BOUNDED STRICTLY PSEUDOCONVEX DOMAINS AND IN TUBULAR DOMAINS OVER SYMMETRIC CONES <sup>8</sup>

Romi F. Shamoyan, Artem Osadchyi

Bryansk State University

**Abstract** We provide some new estimates on Traces in new mixed norm Hardy type spaces and related new results on Bergman type integral operators in Hardy type spaces the unit ball, in tubular domains over symmetric cones and bounded strictly pseudoconvex domains with smooth boundary. We generalize a well-known one dimensional result concerning Traces of Hardy spaces obtained previously in the unit disk and polydisk by various authors.

**Key words:** *Traces, embeddings, integral representations, tubular and pseudoconvex domains.*

This paper is continuation of our previous paper [31]. We heavily enlarge the list of previously obtained assertions related with traces of Hardy type spaces. The approaches we use here to obtain new results are heavily based on methods and ideas of [31]. In particular we define among other things two new Hardy type mixed norm spaces in tubular domains over symmetric cones and bounded strictly pseudoconvex domains with smooth boundary and provide some new estimates of sizes of their traces generalizing at the same time previously known assertions. Similar results were obtained by us in [31].

Further we consider various new scales of Hardy type spaces in the unit ball and products of unit balls. In particular some new extensions of so called Lizorkin- Triebel type spaces via Luzin cone in the unit ball will be provided and some results concerning their traces will be discussed and given.

This will enlarge the list of similar type results provided recently in [31]. We generalize a well-known one dimensional result concerning Traces of Hardy spaces obtained previously in the unit disk by various authors. This trace problem in Hardy spaces (diagonal map problem) in the unit disk and in the unit polydisk was considered by many authors during last several decades. In polydisk some estimates related with this problem can be seen, for example, in [15], [16]. In polydisk, but in particular values of parameters in [7] and in some papers from list of references of [15], [16]. A rather long history related with these type estimates of traces of Hardy spaces can be read in [6] and in [16] also. In this paper we extend a known crucial estimate related with this problem to more general and complicated cases of tubular domains over symmetric cones and pseudoconvex domains with smooth boundary putting a natural condition on Bergman kernel of these domains. This paper can be considered also as continuation of a long series of papers of first author on Traces of function spaces (see, for example, [18], [19], [20], [21] and various references there).

In recent decades the same definition can be given for any domain in  $C^n$  and any function spaces on them, many papers appeared where various Hardy and other analytic spaces were studied from various points of views in higher dimension in various domains in  $C^n$ . We refer for example to a series of papers of Krantz and coauthors (see [23], [24], [25] in particular) and also [8], [4], [5], [23] in this direction. For some new interesting results on analytic spaces in tubular domains over symmetric cones we refer the reader to [2], [11], [27], [28] and various references there also. We will heavily use nice techniques which was developed in these papers related with so-called lattices.

<sup>8</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1704.2014К)

We start however with a result in the unit ball. Then we define new mixed norm Hardy type classes in tubular domains and pseudoconvex domains (see [15], [16] for much simpler case of the unit polydisk). Then we provide a complete proof of our assertion in polyball and then provide assertions in bounded pseudoconvex domains with smooth boundary and in tubular domains over symmetric cones. In all cases proofs actually are the same.

Note that first such type sharp trace results in more complicated bounded pseudoconvex domains were provided recently in [17], [18], [19] and in unbounded tubular domains over symmetric cones in [21]. However these papers recently covered only various analytic Bergman type and Herz type spaces cases.

The situation with Hardy spaces is more complicated even in simplest case of product domains that is the case of the unit polydisk (see [15], [16] and references there). We note trace results have many applications (see [17] for example). Note in more general than unit disk and unit polydisk case the case of polyball such type results were proved earlier in [18], [19], [20] in BMOA type and other analytic function spaces.

To provide our assertion we will need some basic notations and lemmas in the case of the unit ball and the unit polyball, in tubular domains over symmetric cones and in bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary (see, for example, [18], [19], [20] and references there).

Let  $B$  be the unit ball in  $\mathbb{C}^n$ , let  $H(B)$  be the space of all analytic functions in  $B$ . Moreover, let  $d\nu$  denote the Lebesgue measure on  $B$ , normalized such that  $\nu(B) = 1$ , and, for any  $\alpha \in \mathbb{R}$ , let  $dv_\alpha(z) = c_\alpha(1 - |z|^2)^\alpha d\nu(z)$  for  $z \in B$ . Here, if  $\alpha \leq -1$ ,  $c_\alpha = 1$  and if  $\alpha > -1$ ,  $c_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$  is the normalizing constant so that  $\nu_\alpha$  has unit total mass. The Bergman metric on  $B$  is  $\beta(z, w) = \frac{1}{2} \log \frac{1+|\varphi_z(w)|}{1-|\varphi_z(w)|}$ , where  $\varphi_z$  is the Möbius transformation of  $B$  that interchanges 0 and  $z$ . Let  $D(a, r) = \{z \in B : \beta(z, a) < r\}$  denote the Bergman metric ball centered at  $a \in B$  with radius  $r > 0$ .

Let

$$(T_\alpha f)(z_1, \dots, z_m) = c_\alpha \int_B \frac{f(w)(1 - |w|^2)^\alpha dv(w)}{\prod_{j=1}^m (1 - \langle z_j, w \rangle)^{\frac{n+1+\alpha}{m}}}$$

$z_j \in B, j = 1, \dots, m, \alpha > -1, z_j \in B, j = 1, \dots, m, c_\alpha = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}$ . For  $m = 1$ ,  $(Tf)(z) = f(z)$ ,  $z \in B, \alpha > -1$ . The question is to study the action of this operator in Hardy, Bergman spaces. For  $m = 1$ ,  $(Tf)(z) = f(z)$  there is nothing to show, because of Bergman representation formula. For general case this operator or its analogues were used in various estimates related with trace problem in Hardy, Bergman and BMOA classes in tubular and pseudoconvex domains (see [18], [19], [20], [21], [29]).

Let  $B^m = B \times \dots \times B$ ,  $m > 1$ . Let  $H(B^m)$  be the space of all analytic functions in  $B^m$ .

**Definition 1.** Let  $X$  and  $Y$  be Banach analytic function spaces on the ball and the polyball so that  $X \subset H(B)$  and  $Y \subset H(B^m)$ . Then  $X$  is called the trace of  $Y$  if, for every function  $f$ ,  $f \in Y$ ,  $f(z, \dots, z)$  is in  $X$  and the reverse is also true, for every function  $g$ ,  $g \in X$ , there exists a function  $f$  in  $Y$  such that  $f(z, \dots, z) = g(z)$  for all  $z \in B$ .

The same definition of traces can be stated for any bounded (or unbounded) domain in  $\mathbb{C}^m$  and analytic function spaces on them.

We define Bergman space  $A_\alpha^p$  in the ball as usual  $A_\alpha^p(B) = \{f \in H(B) : \int_B |f(z)|^p (1 - |z|)^{2\alpha} dv(z) < \infty\}$ ,  $0 < p < \infty, \alpha > -1$ . This is Banach space for  $p > 1$  and complete metric space for other values of  $p$ . This space is heavily studied by many authors (see [22]).

The proofs of the following properties of the Bergman balls can be found in [22] (see Lemmas 1.24, 2.20, 2.24 and 2.27 in [22]).

**Lemma A.**

a) There exists a positive number  $N \geq 1$  such that, for any  $0 < r \leq 1$ , we can find a

sequence  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  in  $B$  to be  $r$ -lattice in the Bergman metric of  $B$ . This means that  $B = \bigcup_{k=1}^\infty D(v_k, r)$ ,  $D(v_l, \frac{r}{4}) \cap D(v_k, \frac{r}{4}) = \emptyset$  if  $k \neq l$  and each  $z \in B$  belongs to at most  $N$  of the sets  $D(v_k, 2r)$ .

- b) For any  $r > 0$ , there is a constant  $C > 0$  so that  $\frac{1}{C} \leq \left| \frac{1 - \langle z, w \rangle}{1 - \langle z, v \rangle} \right| \leq C$  for all  $z \in B$  and all  $w, v$  with  $\beta(w, v) < r$ .
- c) For any  $\alpha > -1$  and  $r > 0$ ,  $\int_{D(z, r)} (1 - |w|^2)^\alpha dv(w)$  is comparable with  $(1 - |z|^2)^{n+1+\alpha}$  for all  $z \in B$ .
- d) Suppose  $r > 0$ ,  $p > 0$  and  $\alpha > -1$ . Then there is a constant  $C > 0$  such that  $|f(z)|^p \leq \frac{C}{(1 - |z|^2)^{n+1+\alpha}} \int_{D(z, r)} |f(w)|^p d\nu_\alpha(w)$ , for all  $f \in H(B)$  and all  $z \in B$ .

Let

$$H^{p_1, \dots, p_m}(B^m) = \left\{ g \in H(B^m) : \sup_{r_m < 1} \int_S \left( \dots \sup_{r_2 < 1} \int_S \left( \sup_{r_1 < 1} \int_S |g(r_1 \zeta_1, \dots, r_m \zeta_m)|^{p_1} d\sigma(\zeta_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\sigma(\zeta_2) \dots \right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} d\sigma(\zeta_m) < \infty \right\};$$

$$0 < p_i < \infty, i = 1, \dots, m.$$

Let

$$\tilde{H}^{p_1, \dots, p_m}(B^m) = \left\{ g \in H(B^m) : \sup_{r_j < 1} \int_S \left( \dots \int_S \left( \int_S |g(r_1 \zeta_1, \dots, r_m \zeta_m)|^{p_1} d\sigma(\zeta_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\sigma(\zeta_2) \dots \right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} d\sigma(\zeta_m) < \infty \right\};$$

$0 < p_i < \infty, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$  where  $\sigma$  is a Lebesgue measure on  $S = \{z : |z| = 1\}$ ,  $S = \partial B$ . These are a new mixed norm analytic Hardy class on products of unit balls (polyball).

Similarly based on definition of one domain case we can define mixed norm Hardy classes on products of tubular and bounded strongly pseudoconvex domains as subspaces of  $H(\Omega^m)$  and  $H(T_\Omega^m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  of spaces of all analytic functions on product domains  $\Omega^m = \Omega \times \dots \times \Omega$  or  $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ . The well-known definitions of classical Hardy spaces on tubular and pseudoconvex domains can be seen in [2], [9], [10], [26], [27].

We denote them by  $H^{p_1, \dots, p_m}(\Omega^m)$  and  $H^{p_1, \dots, p_m}(T_\Omega^m)$ , for all positive values of parameters. In case of bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary the sphere  $S$  in our definition must be simply replaced by special  $\partial\Omega_\varepsilon$  domains closely related with so-called defining  $r$  function of pseudoconvex  $D$  or  $\Omega$  domains to be more precise it is a set of those points of domain for which defining function  $r$  is constant, (see for one domain analytic Hardy classes in pseudoconvex domains, for example [9], [23], [24], [25]).

We provide first a full and a rather short proof of our main result in simple polyball case based on lemmas we just formulated. Then we add some vital comments concerning this proof and formulate complete analogues of this result in tubular and pseudoconvex domains under an additional natural condition on Bergman kernel of these domains.

**Theorem 1.** Let  $f \in H(B)$ ;  $0 < p_j < 1, j = 1, \dots, m$ . If

$$\int_B |f(z)|^{p_m} (1 - |z|)^{np_m(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1) - 1} dv(z) < \infty$$

and  $\alpha > \frac{2n}{p_m} - n - 1$  then we have  $T_\alpha f \in H^{p_1, \dots, p_m}(B^m)$ , and  $T_\alpha f \in \tilde{H}^{p_1, \dots, p_m}(B^m)$ .

So we have  $\text{Trace}(H^{\vec{p}}) \supset A_{\tau}^{p_m}(B), \tau = np_m(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1) - 1$  and also  $\text{Trace}(\tilde{H}^{\vec{p}}) \supset A_{\tau}^{p_m}(B), \tau = np_m(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1) - 1$ .

The statement in theorem concerning traces follows directly from first assertion and on results on integral representations in Bergman spaces in unit ball domains (not in product domains) we refer for this to [4,6,22] and various references there.

**Remark 1.** This result is well-known when  $n = 1, p_i = p, i = 1, \dots, m$ . (see [6], [15], [16] for example and references there for these values of parameters in the case of unit polydisk). For these values of parameters it provides a sharp embedding for traces of classical  $H^p$  Hardy spaces in the unit polydisk (see, for example, [6], [15], [16]).

The Proof of theorem 1.1.

The proof of theorem 1.1 is fully based on properties of  $r$ -lattices of the unit ball (see lemma A). We consider the case  $m = 2$ , i.e. if  $\int_B |f(w)|^{p_2} (1 - |z|)^{\frac{np_2}{p_1} - 1} dv(z) < \infty, p_2, p_1 < 1$  we prove that

$$\sup_{r_1, r_2 < 1} \int_S \left( \int_S |T_{\alpha} f(z_1, z_2)|^{p_1} d\sigma(\zeta_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\sigma(\zeta_2) < \infty; \zeta_j = r_j \zeta_j; j = 1, 2.$$

The general case is the same. We use properties of  $r$ -lattices listed above (see Lemma A). We have the following estimates ( $\gamma = \frac{n+1+\alpha}{2}$ ):

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left( \int_S |T_{\alpha} f(z_1, z_2)|^{p_1} d\sigma(\zeta_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\sigma(\zeta_2) \leq \\ &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sup_{z \in D(a_k, r)} |f(z)|^{p_2} \int_S \left( \int_S \left( \int_{D(a_k, r)} \frac{(1 - |w|)^{\alpha} dv(w)}{\prod_{j=1}^2 (|1 - \langle z_j, \zeta_j \rangle|^{\gamma})} \right)^{p_1} d\sigma(\zeta_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\sigma(\zeta_2) = \\ &= c \sum_{k=1}^{\infty} (F_k G_k); F_k = \sup_{z \in D(a_k, r)} |f(z)|^{p_2}. \end{aligned}$$

Note

$$G_k \leq (1 - |a_k|)^{p_2(n+1+\alpha)} \left( \sup_{r_2 < 1} \int_S \frac{d\sigma(\zeta_1)}{|1 - \langle r_1 \zeta_1, a_k \rangle|^{p_1 \gamma}} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \left( \sup_{r_2 < 1} \int_S \frac{d\sigma(\zeta_1)}{|1 - \langle r_2 \zeta_2, a_k \rangle|^{p_2 \gamma}} \right).$$

Hence we have that the following chain of estimates is valid based on Lemma A (note this chain of estimates is valid also in tubular and pseudoconvex domains based on properties of  $r$ -lattices of these domains, we refer to [8] and [30] for this)

$$\begin{aligned} J &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z \in D(a_k, r)} |f(z)|^{p_2} (1 - |a_k|)^{n + \frac{np_2}{p_1}} \leq \\ &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D(a_k, 2r)} |f(z)|^{p_2} (1 - |z|)^{n \frac{p_2}{p_1} - 1} dv(z) \leq c_N \int_B |f(z)|^{p_2} (1 - |z|)^{n \frac{p_2}{p_1} - 1} dv(z) < \infty. \end{aligned}$$

This completes the proof of theorem in case of the unit ball. We provide some discussion on this proof. A careful analysis of this proof shows similar results should be valid also in other domains. Indeed our arguments are valid, for example, in tubular domains and strongly pseudoconvex domains based on  $r$ -lattices of those domains (see [2], [30]). First for the proof in tubular, pseudoconvex domains we need a version of Lemma A in these domains). Complete analogues of first, third and fourth assertions of lemma A in tubular domains and pseudoconvex

domains can be seen in pseudoconvex domains in [8], [10], in tubular domains in [2], [11], [26], [27]. The second assertion of lemma A is also valid in these domains, but only in milder form [8], [30]. This however, is vital for our proof and will stand in our formulations below as an additional condition on Bergman kernel.

Note further the last chain of estimates in our proof is valid also in tubular and pseudoconvex domains based on same properties of  $r$ -lattices of these domains (we refer to [8] and [30] for this standard arguments).

For analogues of estimates of  $G_k$  (see again the proof above in the ball) we refer to theorem 2 of [12] for pseudoconvex domains and to basic properties of  $r$  defining function of the pseudoconvex domain and for tubular domains to a lemma from [11], and [28] concerning integrability of  $\Delta$  function. To be more precise, for example, in tubular domains it is the following well-known basic integrability property for the determinant  $\Delta$  function (see for this assertion [2] or [27]).

**Lemma B.**

1) *The integral*

$$J_\alpha(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta^{-\alpha} \left( \frac{x + iy}{i} \right) \right| dx$$

converges if and only if  $\alpha > 2\frac{n}{r} - 1$ . In that case

$$J_\alpha(y) = \tilde{C}_\alpha \Delta^{-\alpha+n/r}(y),$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \Omega$ .

In addition we must use the fact that  $\Delta$  function is "monotone" on  $\Omega$  cone (see [2] or [27] for these basic properties).

We denote by  $dv$  and  $dV$  as usual Lebesgue measures on tube  $T_\Omega$  and pseudoconvex  $\Omega$  domains.

The Bergman kernels in tubular domains and pseudoconvex domains will be denoted as usual by  $K_t(z, w)$  and  $B_\nu(z, w)$  (see, for example, [2], [8], [10], [27]). The Bergman  $B_\nu$  kernel for tubular domains can be written via so-called  $\Delta$  function in the following manner.

$$B_\nu(z, w) = C_\nu \Delta^{-(\nu+\frac{n}{r})}((z - \bar{w})/i),$$

$z \in T_\Omega$ ,  $w \in T_\Omega$  (see [1], [2] for more details).

We formulate analogues of our first theorem in tubular and bounded strictly pseudoconvex domains. We omit calculations leaving them to interested readers.

We first define the complete analogue of Bergman type  $T_\alpha$  integral operator in pseudoconvex and tubular domains using Bergman kernels in the following way. In the tubular domain over symmetric cones we define them as the following Bergman-type integral operators.

$$T_\alpha(f)(\vec{z}) = \int_{T_\Omega} \frac{f(w) \Delta^\alpha(Im w) dv(w)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\frac{\alpha+2\frac{n}{r}}{m}}(\frac{z_j - \bar{w}}{i})}; \quad f \in L^1(T_\Omega),$$

$\alpha > -1$ ,  $z_j \in T_\Omega$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

In bounded pseudoconvex domains with smooth boundary  $\Omega$  we define them as

$$T_\alpha f(\vec{z}) = \int_{\Omega} f(w) \prod_{j=1}^m K_\tau(z_j, w) \delta^\alpha(w) dv(w); \quad \tau = \frac{\alpha + n + 1}{m},$$

$f \in L^1(\Omega)$ ,  $\alpha > -1$ ,  $z_j \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Such type operators were studied before in [18], [19], [20] in our papers. They play a crucial role in various Trace theorems related with Herz and Bergman spaces in such type domains (see [18], [19], [20], and also in [21]). We define new mixed norm analytic Hardy spaces in products of tubular domains. Let further for all positive values of parameters

$$H^{p_1, \dots, p_m}(T_\Omega^m) = \left\{ f \in H(T_\Omega^m) : \sup_{y_j \in \Omega} \left[ \int_{R^n} \int_{R^n} \left( \int_{R^n} |f(\vec{x} + i\vec{y})|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dx_m \right]^{\frac{1}{p_m}} < \infty \right\};$$

$$\tilde{H}^{p_1, \dots, p_m}(T_\Omega^m) = \left\{ f \in H(T_\Omega^m) : \sup_{y_m \in \Omega} \left[ \int_{R^n} \sup_{y_3 \in \Omega} \int_{R^n} \sup_{y_2 \in \Omega} \left( \int_{R^n} \sup_{y_1 \in \Omega} |f(\vec{x} + i\vec{y})|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \dots dx_m \right]^{\frac{1}{p_m}} < \infty \right\};$$

$0 < p_i < \infty$ ;  $i = 1, \dots, m$ . We assume that for  $B_t(z, w)$  function (the Bergman kernel of  $T_\Omega$  domain) the following condition is valid.  $|B_t(z, w)| \asymp |B_t(z, w_k)|$ ,  $w \in B_{T_\Omega}(w_k, R)$ ;  $z \in T_\Omega$ , where  $t$  is positive and  $B_{T_\Omega}(w, R)$  is a Bergman ball in tubular domain (see, for example, [2], [26], [27], for definitions of these objects and more discussions). We refer to [30] for very similar but milder version of this condition on Bergman kernel.

**Theorem 2.** Let  $f \in H(T_\Omega)$  and let  $0 < p_i < 1$ ,  $\tau = \frac{n}{r} p_m \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , if

$$\int_{T_\Omega} |f(z)|^{p_m} \Delta(I_m z)^{\frac{n}{r} p_m \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1} d\tilde{V}(z) < \infty$$

and if  $\alpha > \alpha_0$  for large enough  $\alpha_0$ , then  $T_\alpha f \in H^{p_1, \dots, p_m}(T_\Omega^m)$ , so  $\text{Trace}(H^{\vec{p}}(T_\Omega^m)) \supset A_\tau^{p_m}(T_\Omega)$  and let  $f \in H(T_\Omega)$  and let  $0 < p_i < 1$ ,  $\tau = \frac{n}{r} p_m \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , if

$$\int_{T_\Omega} |f(z)|^{p_m} \Delta(I_m z)^{\frac{n}{r} p_m \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1} d\tilde{V}(z) < \infty$$

and if  $\alpha > \alpha_0$  for large enough  $\alpha_0$ , then  $T_\alpha f \in \tilde{H}^{p_1, \dots, p_m}(T_\Omega^m)$ , so  $\text{Trace}(\tilde{H}^{\vec{p}}(T_\Omega^m)) \supset A_\tau^{p_m}(T_\Omega)$ .

The statement in theorem concerning traces follows directly from first assertion and on results on integral representations in Bergman spaces in pseudoconvex domains (not in product domains) we refer for this to [5, 8-9] and various references there.

Let further,

$$\tilde{H}^{p_1, \dots, p_m}(\Omega^m) = \left\{ f \in H(\Omega^m) : \sup_{\varepsilon > 0} \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \sup_{\varepsilon > 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \sup_{\varepsilon > 0} \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \sup_{\varepsilon > 0} |f(\vec{w})|^{p_1} dw_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dw_m \right]^{\frac{1}{p_m}} < \infty \right\}$$

We can define also  $H^{p_1, \dots, p_m}$  similarly as above in tube also adding one sup for all integrals.

We assume that for the Bergman  $K_t$  kernel of  $\Omega$  pseudoconvex domain the following assertion is valid.  $|K_t(z, w)| \asymp |K_t(z, w_k)|$ ,  $w \in B_\Omega(w_k, R)$ ;  $z \in \Omega$ , where  $B_\Omega(w, R)$  is a Kobayashi ball. (we refer for more details on these objects, for example, to [8], [10]). In these papers similar,

but milder condition on Bergman kernel can be also found.

**Theorem 3.** Let  $0 < p_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\tau = np_m(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1)$ , if

$$\int_{\Omega} |f(z)|^{p_m} \delta^{np_m \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1}(z) d\tilde{v}(z) < \infty$$

and if  $\alpha > \alpha_0$  for large enough  $\alpha_0$  then  $T_{\alpha}f \in H^{p_1, \dots, p_m}(\Omega^m)$ , so  $\text{Trace}(H^{\vec{p}}) \supset A_{\tau}^{p_m}(\Omega)$

and if  $\alpha > \alpha_0$  for large enough  $\alpha_0$  then  $T_{\alpha}f \in \tilde{H}^{p_1, \dots, p_m}(\Omega^m)$ , so  $\text{Trace}(\tilde{H}^{\vec{p}}) \supset A_{\tau}^{p_m}(\Omega)$ .

The statement in theorem concerning traces follows directly from first assertion and on results on integral representations in Bergman spaces in tubular domains (not in product domains) we refer for this to [2,26,27,30] and various references there.

We add some similar type results where Lusin cone is involved.

Let further  $\Gamma_{\alpha}(\xi) = \{z \in B : |1 - \bar{\xi}z| < \alpha(1 - |z|)\}$ . For  $p_i \in (0, \infty)$ ,  $i = 1 \dots m$  we will define mixed norm new Hardy classes in  $B^m = B \times \dots \times B$  with finite quasinorms

$$\left( \int \sup_{z_m \in \Gamma_{\alpha}(\xi_m)} \int_S \dots \left( \int_S \sup_{z_1 \in \Gamma_{\alpha}(\xi_1)} |f(z)|^{p_1} d\xi_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\xi_m \right)^{\frac{1}{p_m}} \quad (1)$$

$$\left( \int_S \dots \left( \int_S \left( \sup_{z_m \in \Gamma_{\alpha}(\xi_m)} \dots \sup_{z_1 \in \Gamma_{\alpha}(\xi_1)} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} \right) d\xi_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\xi_m \right)^{\frac{1}{p_m}} \quad (2)$$

$$\left( \left( \int_S \dots \left( \int_S \sup_{0 < r_j < 1, j=1, \dots, m} |f(r_1 \xi_1, \dots, r_m \xi_m)|^{p_1} d\xi_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right) d\xi_m \right)^{\frac{1}{p_m}} \quad (3)$$

It is possible to show that all of them are the closed subspaces  $H(B \times \dots \times B)$  of a class of all analytic functions in  $B^m$ ,  $m \geq 1$ ,  $m \in N$ . Similar proof work for these classes. We omit easy details.

These are a new mixed norm analytic Hardy class on products of unit balls (polyball). For  $m = 1$  we have classical Hardy spaces in ball.

(Some weighted version can be defined similarly and similar results can be even proved also)

Let  $Y$  be one of these classes in products of balls  $B^m$ .

**Theorem 4.** Let  $f \in H(B)$ ;  $0 < p_j < 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ . If

$$\int_B |f(z)|^{p_m} (1 - |z|)^{np_m(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i} - 1) - 1} dv(z) < \infty$$

and  $\alpha > \frac{2n}{p_m} - n - 1$  then we have  $T_{\alpha}f \in Y(B^m)$  and we have  $\text{Trace}(Y) \supset (A_{\tau}^{p_m})$ ;  $\tau = (np_m) \left( \sum_{j=1}^{m-1} (\frac{1}{p_j} - 1) - 1 \right)$ .

The proof hinges on known estimates like (see [3,4]).

$$\sup_{z \in \Gamma(\xi)} \frac{1}{|1 - wz|^{\alpha}} \leq \frac{c}{|1 - w\xi|^{\alpha}}; \xi \in S, w \in B, \alpha > 0.$$

Let further



$$\int_{S^m} \left( \int_{\Gamma(\xi_m)} \cdots \left( \int_{\Gamma(\xi_2)} \left( \int_{\Gamma(\xi_1)} |f(\vec{z})|^{p_1} (1 - |z_1|)^{\alpha_1} d|z_1| \right)^{\frac{p_2}{p_1}} (1 - |z_m|)^{\alpha_m} d|z_m| \right) \right)^{\frac{q}{p_m}} d\sigma(\xi_1) \cdots$$

$$\cdots d\sigma(\xi_m)$$

$$\int_{S^m} \left( \int_0^1 \left( \cdots \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(\vec{z})|^{p_1} (1 - |z_1|)^{\alpha_1} d|z_1| \right)^{\frac{p_2}{p_1}} (1 - |z_m|)^{\alpha_m} d|z_m| \right) \right)^{\frac{q}{p_m}} d\sigma(\xi_1) \cdots d\sigma(\xi_m),$$

Where  $p_i \in (0, \infty)$ ,  $\alpha_j > -1$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Note for  $m = 1$  last two classes coincide with  $F_{\alpha}^{q,p}$  spaces (see [3]) and  $F_0^{p,2} = H^p$ ,  $0 < p < \infty$  (see [3]) in the unit ball. Using the same proof we can calculate sizes of traces of these spaces also. We leave these details to interested readers since no new idea is involved.

The key of proof ingredient is estimate see([3,4])  $\int_{\Gamma_{\alpha}(\xi)} \frac{(1-|z|)^{\alpha}}{|1-wz|^{\beta}} dv(z) \leq \frac{c}{|1-\xi w|^{\beta-(\alpha+2)}}$ ,  $\xi \in S$ ,  $w \in B$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > \alpha + 2$  and similar estimate for integral by (0,1).

With this we proved various extensions of the embedding  $Y \subset TraceH^p$  obtained in the unit disk by various authors before ([6-7])

Let  $B_D(z, r)$  on  $B_{T_{\Omega}}(z, r)$  be Bergman or Kobayashi ball in bounded strongly pseudoconvex or tube domain we studied in this paper. We define analytic Herz type spaces in these domains as follows

$$M_{\vec{\alpha}}^{\vec{p},q} = \left\{ f \in H(\Omega^m) : \int_D \left[ \int_{B_D(z,r)} \cdots \left( \int_{B_D(z,r)} |f(\vec{w})|^{p_1} dv_{\alpha_1}(w_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dv_{\alpha_m}(w_m) \right]^{\frac{q}{p_m}} dv(z) < \right.$$

$$\left. < \infty \right\}$$

$0 < p_j < \infty$ ,  $\alpha_j > -1$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $q \in (0, \infty)$ .

$$\tilde{M}_{\vec{\alpha}}^{\vec{p},q} = \left\{ f \in H(T_{\Omega}^m) : \int_{T_{\Omega}} \left[ \int_{B_{T_{\Omega}}(z,r)} \cdots \left( \int_{B_{T_{\Omega}}(z,r)} |f(\vec{w})|^{p_1} dv_{\alpha_1}(w_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dv_{\alpha_m}(w_m) \right]^{\frac{q}{p_m}} dv(z) < \right.$$

$$\left. < \infty \right\}$$

$0 < p_j < \infty$ ,  $\alpha_j > -1$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $q \in (0, \infty)$ .

Very similar results by very similar methods can be obtained for these spaces under condition on kernel we discussed. We will present these results in a separate paper.

Namely we have

$$(Trace)(M_{\vec{\alpha}}^{\vec{p},q}) \supset (A_{\tau}^s)(B);$$

$$(Trace)(\tilde{M}_{\alpha}^{\vec{p},q}) \supset (A_{\tau}^s)(B)$$

for some  $0 < p_j < \infty$ ,  $q, s \in (0, \infty)$ ,  $\alpha_j > -1$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\tau$ .

Finally we remark some analogues of these assertions with similar proofs may be true in other domains, for example, in minimal homogeneous domains, in bounded symmetric domains, but again under some additional condition on Bergman kernel. We note for these domains we also have similar properties of  $r$ -lattices and the analogue of Lemma A (see for example [13], [14] and various references there).

### References

1. *J. Faraut and A. Koranyi*, Analysis on symmetric cones // Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994, 382.
2. *D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, C. Nana, M. Peloso and F. Ricci* // Lecture notes on Bergman projectors in tube domain over cones, an analytic and geometric viewpoint, Proceeding of the International Workshop on Classical Analysis, Yaounde, 2001, 75.
3. *J. Ortega, J. Fabrega* // Hardy's inequality and embeddings in holomorphic Triebel-Lizorkin spaces, Illinois J. Math, 1999, 733-751.
4. *J. Ortega, J. Fabrega* // Pointwise multipliers and corona type decomposition in BMOA, Ann.Inst.Fourier, 46, n1, 1996, 111-137.
5. *M. Andersson, H. Carlsson* //  $Q_p$  spaces in strictly pseudoconvex domains, Journal D'analyse Mathématique, v.84, 2001, 335-359.
6. *M. M. Džrbashian, F. A. Shamoian* // Topics in theory of  $A_p^p$  classes, Teubner zur Mathematics, v105, 1988, 188.
7. *P. L. Duren, A. L. Shields* // Restriction of  $H^p$  functions on the diagonal of the polydisk, Duke Math. Journal, 42, 1975, 751-753.
8. *Abate M., Raissy J., Saracco A* // Toeplitz operators and Carleson measures in strongly pseudoconvex domains, Journal of Functional Analysis, V. 263, Issue 11, 2012, 449-491.
9. *J. Ortega, J. Fabrega* // Mixed norm spaces and interpolation, Studia Math.(109), 1994, 233-254.
10. *Abate M., Saracco A.* // Carleson measures and uniformly discrete sequences in strongly pseudoconvex domains, J. London Math. Soc., 83, 2011, 587-605.
11. *B. F. Sehba* // Bergman type operators in tube domains over symmetric cones, Proc. Edinburgh. Math. Society, n.52, issue 02, 2009, 529-544.
12. *M. Englis, T. Hanninen, T. Taskinen, Minimal* //  $L^\infty$  type on strictly pseudoconvex domains on which Bergman projection continuous, Houston J. Math, 32, 2006, 253-275.
13. *Yamaji S* // On positive Toeplitz operators on the Bergman spaces in minimal bounded homogeneous domains, Journal of the Mathematical Society of Japan, 2013, 1101-1115.
14. *D. Bekolle and A. Kagou* // Molecular decomposition and interpolation, Integral equations and operator theory, n31(2), 1998, 150-177.
15. *J. Shapiro* // Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces, Duke Math. J, 43, 1976, 187-202.
16. *S. V. Shvedenko* // Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit disk, polydisc and unit ball, Seria Matematica, VINITI, 1985, 3-124.
17. *E. Amar and C. Menini* // A counterexample to the corona theorem for operator  $H^2(D^n)$ , Pacific Journal of Mathematics, 206(2), 2002, 21-29.
18. *R. Shamoyan, S. Kurilenko* // On traces in analytic function spaces in polyballs, Palestine Journal of Mathematics, v. 4.2, 2015, 291-293.

19. *R. Shamoyan, S. Kurilenko* // On traces of analytic Herz and Bloch type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains in  $C^n$ , Issues of Analysis. Petrozavodsk, Vol. 4(22), No. 1, 2015, 73-94.
20. *Shamoyan R., Mihic O.* // On traces of holomorphic functions on the unit polyball, Appl. Anal. Discrete Math, 3, 2009. 198-211.
21. *R. Shamoyan, E. Povprits* // Sharp trace theorems in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones, Journal of Siberian Federal University, v.5, 2013, 527-538.
22. *K. Zhu* // Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Springer Verlag, New York, 2005.
23. *S. Krantz, Li S-Y.* // A note on Hardy spaces and functions of BMO on domains in  $C^n$ , Michigan Math. Journal, 41, 1994, 205-234.
24. *S. Krantz, S-Y, Li* // Bloch functions on strongly pseudoconvex domains, Indiana Math. Univ. Journal, 37, 1988, 145-163.
25. *S. Krantz, S-Y, Li* // On decomposition theorems for Hardy spaces on domains in  $C^n$ , The Journal of Fourier analysis and applications, v.2,1, 1995, 115-121.
26. *D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, F. Ricci and B. Sehba* // Analytic Besov spaces and Hardy type inequalities in tube domains over symmetric cones, Jour. Fur. Reine und Ang., 647, 2010, 25-56.
27. *D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos and F. Ricci* // Littlewood-Paley decomposition and Besov spaces related to symmetric cones and Bergman Projections in Tube Domains, Proc. London Math. Soc., 89 (2), 2004, 317-360.
28. *B. F. Sehba* // Hankel operators on Bergman Spaces of Tube domains over symmetric cones, Integr. Equ. Oper. Theory, n.62, 2008, 233-245.
29. *Shamoyan R., Mihic O.* // In search of traces of some holomorphic functions in polyballs, Revista Notas de Matem, 4, 2008, 1-23.
30. *B. Sehba, C. Nana* // Carleson embeddings and Toeplitz operators in tubular domains over symmetric cones, arxiv, 2014.
31. *R. Shamoyan, S. Kurilenko* // On traces in Hardy type analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains and in tubular domains over symmetric cones, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2016, Volume 9, Issue 4, 510-517.

### About authors

Shamoyan Romi Faizovich – PhD, senior researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, rsham@mail.ru. Osadchy Artem Sergeevich - Assistant researcher, Research laboratory of complex and function analysis, Bryansk State University, Osadchy-Artem93@yandex.ru.

## О СЛЕДАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ ТИПА ХАРДИ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ, СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ, И ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ НАД СИММЕТРИЧЕСКИМИ КОНУСАМИ

**Р.Ф. Шамоян, А.С. Осадчий**

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

**Аннотация.** Мы приводим новые оценки для следов пространств типа Харди со смешанной нормой в единичном шаре и псевдовыпуклых и трубчатых областях над симметрическими конусами, и связанные с ними некоторые новые результаты для операторов типа Бергмана в классах типа Харди обобщающие некоторые оценки в этом направлении полученные ранее различными авторами.

**Ключевые слова:** следы функций, вложения, трубчатые и псевдовыпуклые области.

### Сведения об авторах

Шамоян Роми Файзоевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, rsham@mail.ru.

Осадчий Артём Сергеевич, лаборант-исследователь, НИЛ комплексного и функционального анализа, Брянский государственный университет, Osadchy-Artem93@yandex.ru.

**ТРЕБОВАНИЯ  
К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ ДЛЯ  
ПУБЛИКАЦИИ В РЕЦЕНЗИРУЕМОМ ЭЛЕКТРОННОМ НАУЧНОМ ЖУРНАЛЕ  
«УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»  
(«УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ БГУ»)**

**Требования к содержанию статей.**

В журнале «Ученые записки БГУ» публикуются статьи теоретического и прикладного характера, содержащие оригинальный материал исследований автора (соавторов), ранее нигде не опубликованный и не переданный в редакции других журналов. Материал исследований должен содержать научную новизну и/или иметь практическую значимость. К публикации принимаются только открытые материалы на русском, английском или немецком языках. Статьи обзорного, биографического характера, рецензии на научные монографии и т.п. пишутся, как правило, по заказу редколлегии журнала.

**Требования к объему статей.**

Полный объем статьи, как правило, не должен превышать 1 Мб, включая иллюстрации и таблицы.

**Общие требования к оформлению статей.**

Статьи представляются в электронном виде, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (Word 97/2000, Word XP/2003) и разбитые на страницы размером А4. См. образец с настроенными стилями.

Все поля страницы – по 2 см, верхний и нижний колонтитулы – по 1,5 см. Текст набирается шрифтом Times New Roman, 12 pt, межстрочный интервал - одинарный, красная строка (абзац) - 1,25 см, выравнивание по ширине, включен режим принудительного переноса в словах. Страницы не нумеруются.

Если статья выполнена при поддержке гранта или на основе доклада, прочитанного на конференции, то необходимо сделать соответствующее упоминание в конце статьи.

К статье должна быть приложена авторская справка, содержащая следующую информацию по каждому автору: фамилию, имя, отчество (при наличии), научную степень, ученое звание, место работы, должность, точный почтовый адрес места работы (домашний адрес указывать недопустимо), контактный телефон – рабочий или сотовый (домашний телефон указывать недопустимо), e-mail, согласие на обработку указанных данных и размещение их в журнале. См. образец авторской справки.

В статье следует использовать только общепринятые сокращения.

Редакция не принимает к рассмотрению рукописи статей, оформленные не по установленным правилам.

**Требования к структуре статей.**

Статья формируется из отдельных структурных составляющих в следующей последовательности:

- 1) первая строка: номер УДК (стиль «УДК»);
- 2) вторая строка: название статьи (стиль «Название»);
- 3) пропустив одну строку: фамилии и инициалы авторов (стиль «Автор»);
- 4) наименование организации(й), которую представляют авторы (стиль «Организация»);
- 5) пропустив одну строку: аннотация на русском языке (стиль «Аннотация»);
- 6) ключевые слова (стиль «Ключевые слова»);
- 7) пропустив одну строку: основной текст статьи (стиль «Текст») с иллюстрациями (стиль «Подписуночная надпись») и таблицами (стили «Номер таблицы» и «Название таблицы»);
- 8) пропустив одну строку: список литературы (стили «Список литературы» и «Источники»);
- 9) пропустив одну строку: сведения об авторах (стили «Об авторах» и «Сведения»);

- 10) пропустив одну строку: название статьи на английском языке (стиль «Название»);
- 11) пропустив одну строку: фамилии и инициалы авторов на латинице (стиль «Автор»);
- 12) наименование организации(й), которую представляют авторы, на латинице (стиль «Организация»);
- 13) пропустив одну строку: аннотация на английском языке (стиль «Аннотация»);
- 14) ключевые слова на английском языке (стиль «Ключевые слова»);
- 15) пропустив одну строку: список литературы на английском языке (стиль «Список литературы» и «Источники»);
- 16) пропустив одну строку: сведения об авторах на английском языке (стили «Об авторах» и «Сведения»).

Указанные структурные составляющие статьи являются обязательными.

#### **Требования к оформлению структурных составляющих статей.**

Аннотация на русском языке, в которой отражается краткое содержание статьи, должна иметь объем, как правило, не более 8 строк. Аннотация на английском языке должна содержать не менее 100-250 слов, быть информативной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований) и оригинальной (не быть калькой аннотации на русском языке).

Количество ключевых слов на русском и английском языках не должно превышать 15 слов (для каждого языка).

Оптимальной считается следующая структура статьи: «Введение» с указанием актуальности и цели научной работы, «Постановка задачи», «Результаты», «Выводы или заключение», «Литература», «Приложение». В «Приложении» при необходимости могут приводиться математические выкладки, не вошедшие в основной текст статьи и иной вспомогательный материал). В тексте статьи допускается использование систем физических единиц СИ (предпочтительно) и/или СГСЭ. В обязательном порядке статья должна завершаться выводами или заключением.

Все иллюстрации и таблицы – не редактируемые файлы в формате jpg, которые должны быть вставлены в текст. Дополнительно иллюстрации прилагаются отдельными файлами в формате jpg. Рисунки встраиваются в текст через опцию «Вставка-Рисунок-Из файла» с обтеканием «В тексте» с выравниванием по центру страницы без абзацного отступа. Иные технологии вставки и обтекания не допускаются. Все рисунки и чертежи выполняются четко, в формате, обеспечивающем ясность понимания всех деталей; это особенно относится к фотокопиям и полутонным рисункам. Рисунки, выполненные карандашом, не принимаются. Рисунки, выполненные в MS Word, недопустимы. Язык надписей на рисунках (включая единицы измерения) должен соответствовать языку самой статьи. Поясняющие надписи следует по возможности заменять цифрами и буквенными обозначениями, разъясняемыми в подписи к рисунку или в тексте. Авторы, использующих при подготовке рисунков компьютерную графику, просим придерживаться следующих рекомендаций: графики делать в рамке; штрихи на осях направлять внутрь; по возможности использовать шрифт Times New Roman; высота цифр и строчных букв должна соответствовать высоте букв в тексте статьи.

Формулы должны быть набраны только в редакторе формул (Microsoft Equation). Высота шрифта 12 pt, крупных индексов – 8 pt, мелких индексов – 5 pt, крупных символов – 18 pt, мелких символов – 12 pt. Формулы, внедренные как изображение, не допускаются! Статья должна содержать лишь самые необходимые формулы, от промежуточных выкладок желательно отказаться. Векторные величины выделяются прямым полужирным шрифтом. Все сколько-нибудь громоздкие формулы выносятся на отдельные строки. Формулы должны быть вставлены по центру в таблицу с невидимыми контурами, состоящей из двух колонок. Левая широкая колонка используется для размещения самой формулы, а правая узкая колонка – для номера формулы. Номер формулы ставится в скобках и располагается по

центру ячейки таблицы. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте статьи.

В список литературы включаются только те источники, на которые в тексте статьи имеются ссылки. Желательно шире использовать иностранные источники. Список формируется либо в порядке цитирования, либо в алфавитном порядке (вначале источники на русском языке, затем на иностранных языках). Ссылки на литературу по тексту статьи необходимо давать в квадратных скобках. Библиографические описания цитируемых источников в списке литературы оформляются в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008 «Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Ссылки на работы, находящиеся в печати, не допускаются. Список литературы должен быть продублирован на латинице (см. Написание русских символов латиницей). Рекомендации по представлению ссылок в списке литературы на латинице, удовлетворяющего требованиям поисковых систем международных баз данных, – см. Представление источников на латинице.

Сведения об авторах должны включать следующую информацию (на русском и английском языках): фамилию и инициалы автора, ученую степень и ученое звание (при их наличии), должность с указанием места работы (полное название организации, без сокращения), адрес электронной почты. В англоязычном варианте желательно (но не обязательно) также привести дополнительную информацию, в частности, указать дату рождения, назвать законченные учебные заведения и полученные в них научные степени или квалификацию, указать область научных интересов и др.

#### **Требования к составу присылаемого в редакцию комплекта документов.**

В комплект документов, присылаемых в редакцию журнала, должны входить:

1) файл с расширением .doc, содержащий полностью подготовленную к публикации согласно вышеперечисленным требованиям журнала статью (включая размещенные в ее тексте рисунки), название которого складывается из фамилий всех авторов (например, «Иванов И.И., Петров П.П.doc»);

2) файлы с расширением .jpg, содержащие по одному рисунку статьи, название которых соответствует номерам рисунков (например, «Рисунок 01.jpg»);

3) файлы с расширением .pdf, содержащие по одной авторской справке с подписью автора, название которых соответствует фамилии автора (например, «Иванов И.И.doc»).

К статьям, выполненными аспирантами или соискателями научной степени кандидата наук, необходимо приложить рекомендацию, подписанную научным руководителем (если научный руководитель не входит в число соавторов данной статьи).

Каждая статья в обязательном порядке проходит процедуру закрытого рецензирования. Порядок рецензирования установлен документом «Порядок рецензирования рукописей». По результатам рецензирования редколлегия оставляет за собой право либо вернуть автору статью на доработку, либо отклонить ее публикацию в журнале.

Редакция журнала оставляет за собой право на редактирование статей с сохранением авторского варианта научного содержания.

В опубликованной статье указывается дата поступления рукописи статьи в редакцию. В случае существенной переработки рукописи статьи указывается дата получения редакцией окончательного текста статьи.

#### **Статьи публикуются бесплатно.**

Все материалы отправлять по адресу:

241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д.20, каб. 101

Телефон: +7 (4832) 666-758

E-mail: enibgu@mail.ru

Изменения и дополнения к правилам оформления статей можно посмотреть на официальном сайте журнала: <http://www.scim-brgu.ru>

**УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ  
БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ/ БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ/  
ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ**

Свидетельство о регистрации средства массовой информации выдано Федеральной службой  
по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций  
Эл № ФС77-62799 от 18.08.2015

**Главный редактор журнала:**  
доктор биологических наук, профессор  
Зайцева Е. В.

**Адрес учредителя:**  
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г.  
Петровского» 241036, г. Брянск, Бежицкая, 14.

**Адрес редакции и издателя:**  
РИО ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика  
И.Г. Петровского». 241036, г. Брянск, Бежицкая, 20.

Для получения дополнительной информации, заключения лицензионных  
договоров или проведения иных патентных действий необходимо обратиться в  
отдел инновационного развития Брянского государственного университета  
им. акад. И.Г. Петровского:  
Телефон: +7(4832) 64-81-17, доб. 220  
E-mail: Inno-BGU@yandex.ru

Дата выхода журнала в свет 13.12.2016. **16+**