

**Ученые записки**  
Брянского  
государственного  
университета

№ 2  
2016

Физико-математические науки/ Биологические науки/  
Ветеринарные науки

Ученые записки Брянского государственного университета: физико-математические науки/ биологические науки/ ветеринарные науки. №2 (2016). Брянск: РИО БГУ, 2016. 84 с. Точка доступа: <http://scim-brgu.ru>  
Размещено на официальном сайте журнала: 05.10.2016

**Председатель редакционной коллегии:** *Антюхов Андрей Викторович* – ректор ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», доктор филологических наук, профессор.

**Главный редактор журнала:** *Зайцева Елена Владимировна* – доктор биологических наук, профессор.

**Ответственный секретарь:** *Семенецков Юрий Алексеевич* – кандидат биологических наук, доцент

Редакционная коллегия:

*Шамоян Файзо Агитович*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Новиков Владимир Васильевич*, доктор физико-математических наук, профессор, директор учебно-исследовательского центра «Брянская физическая лаборатория».

*Попов Павел Аркадьевич*, доктор физико-математических наук, доцент, профессор, ведущий научный сотрудник учебно-исследовательского центра «Брянская физическая лаборатория».

*Расулов Карим Магомедович*, доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета.

*Будько Сергей Леонадьевич*, кандидат физико-математических наук, профессор Iowa State University.

*Сорокина Марина Михайловна*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Родикова Евгения Геннадьевна*, кандидат физико-математических наук, доцент, ответственный секретарь.

*Булохов Алексей Данилович*, доктор биологических наук, профессор, заслуженный работник высшего профессионального образования РФ, заведующий кафедрой биологии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Зайцева Елена Владимировна*, доктор биологических наук, профессор, и.о. декана естественно-географического факультета Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского, главный редактор журнала.

*Нам Ирина Ян-Гуковна*, доктор биологических наук, профессор кафедры химии Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Любимов Валерий Борисович*, доктор биологических наук, профессор кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Анищенко Лидия Николаевна*, доктор биологических наук, профессор кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Заякин Владимир Васильевич*, доктор биологических наук, профессор Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Мельников Игорь Владимирович*, кандидат биологических наук, доцент Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского.

*Семенецков Юрий Алексеевич*, кандидат биологических наук, доцент Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского, ответственный секретарь.

*Тельцов Леонид Петрович*, доктор биологических наук, профессор Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева, действительный член Российской Академии Естествознания, Академии ветеринарных наук.

*Зенкин Алексей Сергеевич*, доктор биологических наук, профессор Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева, действительный член Российской Академии Естествознания, Академии ветеринарных наук.

*Селезнев Сергей Борисович*, доктор ветеринарных наук, профессор РУДН, заслуженный деятель науки РФ (г. Москва).

*Лебедько Егор Яковлевич*, доктор сельскохозяйственных наук, профессор, почетный работник высшего профессионального образования РФ, Брянского Государственного аграрного университета.

*Пронин Валерий Васильевич*, доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой нормальной, патологической анатомии и ветсанэкспертизы Ивановской государственной сельскохозяйственной академии (г. Иваново).

*Черный Николай Васильевич*, доктор ветеринарных наук, профессор Харьковской государственной зооветеринарной академии (Украина, г. Харьков).

*Иванов Николай Петрович*, доктор ветеринарных наук, профессор, главный научный сотрудник ТОО «Казахский научно-исследовательский ветеринарный институт», академик.

*Муканов Касым Касенович*, доктор ветеринарных наук, профессор, заместитель генерального директора РГП «Национального центра биотехнологии» Комитета науки МОН Республики Казахстан.

*Бильяна Райдойичич*, доктор ветеринарных наук, профессор Белградского университета.

*Харлан Алексей Леонидович*, кандидат биологических наук, заместитель декана естественно-географического факультета Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского, ответственный секретарь.

В этом выпуске электронного журнала «Ученые записки Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского» представлены материалы по основным направлениям исследований. Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов. Ответственность за точность фактологического материала, используемого в статьях, несут авторы.

The Bryansk  
State  
University  
**Memoirs**

№ 2  
2016

Physics and Mathematics/ Biology/ Veterinary

**Editor-in-chief:** *Andrey Viktorovich Antyukhov*, Rector of the BSU, Doctor of Philology, professor.  
**Executive editor:** *Elena Vladimirovna Zaitseva*, Doctor of Biological sciences, professor of the BSU.  
**Associate Editor:** *Jury Alekseevich Semenischenkov*, candidate of biological sciences, assistant professor.

Editorial board:

*Shamoyan F. A.*, doctor of Physical and Mathematical Science, professor, head of mathematical analysis department at the BSU.

*Novikov V. V.*, doctor of Physical and Mathematical Science, professor, Director of the Training and Research Center "Bryansk Physical Laboratory".

*Popov P.A.*, doctor of Physical and Mathematical Science, assistant professor, professor, leading researcher of the Training and Research Center "Bryansk Physical Laboratory".

*Rasulov K.M.*, doctor of Physical and Mathematical Science, professor, Honored Worker of Higher School of the Russian Federation, head of mathematical analysis department at Smolensk State University.

*Budko S.L.*, candidate of Physical and Mathematical Science, the research associate of National laboratory in Ames, university of the State of Iowa, the USA.

*Sorokina M.M.*, candidate of Physical and Mathematical Science, associate professor, department of Algebra and Geometry at the BSU.

*Rodikova E.G.*, candidate of Physical and Mathematical Science, associate professor.

*Bulokhov A.D.*, doctor of biological sciences, professor BSU, Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, head of biological department.

*Zaitseva E.V.*, doctor of biological sciences, professor BSU, Dean of the Faculty of Natural Sciences and Geography at the BSU.

*Nam I. Ja.*, doctor of biological sciences, professor of chemistry department at the BSU.

*Lyubimov V.B.*, doctor of biological sciences, professor, Department of geography, ecology and land management at the BSU.

*Anischenko L. N.*, doctor of biological sciences, professor, Department of geography, ecology and land management at the BSU.

*Zayakin V.V.*, doctor of biological sciences, professor of the BSU.

*Melnikov I.V.*, candidate of biological sciences, associate professor at the BSU.

*Semenischenkov Ju. A.*, candidate of biological sciences, associate professor at the BSU.

*Teltsov L.P.*, doctor of biological sciences, Professor of Mordovia State University by N.P. Ogarev, member of the Russian Academy of Natural Sciences, the Academy of Veterinary Science.

*Zenkin A.S.*, doctor of biological sciences, professor of Professor of Mordovia State University by N.P. Ogarev, member of the Russian Academy of Natural Sciences, the Academy of Veterinary Science.

*Seleznev S.V.*, doctor of veterinary sciences, professor RUDN, Honored Worker of Science of the Russian Federation.

*Lebedko E.Ja.*, doctor of agricultural sciences, professor, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Bryansk Agricultural University.

*Pronin V.V.*, doctor of biological sciences, head of the department of normal, pathological anatomy and veterinary sanitary inspection of the Ivanovo State Agricultural Academy.

*Chernyi N.V.*, doctor of veterinary sciences, professor of Kharkiv State Academy of Animal Health.

*Ivanov N.P.*, doctor of veterinary sciences, professor, chief scientific officer of LLC "Kazakh Research Veterinary Institute", academician.

*Mukanov K.K.*, doctor of veterinary sciences, professor, deputy general director of RSE "National Center for Biotechnology" MES Committee of science of the Kazakhstan Republic.

*Bilyana Raidoyichich*, doctor of veterinary sciences, professor, University of Belgrade.

*Kharlan A.L.*, candidate of biological sciences, Deputy Dean of the Faculty of Natural Sciences and Geography of the Bryansk State University.

**СОДЕРЖАНИЕ****ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА**

<i>Горбачев В.И.</i>	ИНТЕГРАЦИЯ ТЕОРИЙ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ В ЧИСЛОВОЙ КАРТИНЕ МИРА.....	7
<i>Трубников С.В.</i>	О НОВОМ ПОДХОДЕ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	29

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ БИОЛОГИЯ**

<i>Булохов А.Д., Тужиков Д.С.</i>	ВЛИЯНИЕ РЕКРЕАЦИОННОГО ФАКТОРА НА ЦЕНОФЛОРУ СОСНЯКА ЗЕЛЕНОМОШНО-БРУСНИЧНОГО.....	39
<i>Булохов А.Д., Шкотов А.Н.</i>	ОНТОГЕНЕЗ И ФИТОЦЕНОТИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ ACER PLATANOIDES L. В ЛЕСАХ БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ.....	46
<i>Князева А.С., Иванова Т.Г.</i>	АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА НЕКОТОРЫЕ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ СТУДЕНТОВ-МЕДИКОВ ПЕРВОГО КУРСА.....	54
<i>Лобанов Г.В., Башкирский А.И., Зверева А.Ю., Тришкин Б.В., Протасова А.П.</i>	МНОГОЛЕТНЯЯ ДИНАМИКА NDVI КАК ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЛЕСНЫХ ЛАНДШАФТОВ (НА ПРИМЕРЕ БРЯНСКОГО УЧЕБНО-ОПЫТНОГО ЛЕСНИЧЕСТВА).....	57

**ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ**

<i>Ежикова М.И., Зайцева Е.В.</i>	К МОРФОЛОГИИ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ ПТИЦ .....	62
<i>Салина М.Н., Кобозева М.С., Ахмедов Р.Б.</i>	МОЛЕКУЛЯРНО-ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПО ГЕНУ VOLA-DRV3 КОРОВ, ИНФИЦИРОВАННЫХ ВИРУСНЫМ ЛЕЙКОЗОМ КРС .....	67
<i>Селезнева М.С., Зайцева Е.В.</i>	К МОРФОЛОГИИ ЖЕЛУДКА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПТИЦ .....	76
	ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ В РЕЦЕНЗИРУЕМОМ ЭЛЕКТРОННОМ НАУЧНОМ ЖУРНАЛЕ «УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА» («УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ БГУ») .....	81

## CONTENT

### FUNDAMENTAL AND APPLIED MATHEMATICS

<i>Gorbachev V.I.</i>	INTEGRATION OF THE THEORY OF NUMERICAL SYSTEMS IN A NUMERIC PICTURE OF THE WORLD .....	7
<i>Trubnikov S.V.</i>	ABOUT THE NEW APPROACH TO THE NUMERICAL SOLUTIONS FOR NONLINEAR BOUNDARY PROBLEM FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS .....	29

### FUNDAMENTAL AND APPLIED BIOLOGY

<i>Bulokhov A. D., Tuzhikov D. S.</i>	INFLUENCE OF THE RECREATIONAL FACTOR ON COWBERRY PINE FORESTS COENOFLOTA .....	39
<i>Bulokhov A. D., Shkotov A. N.</i>	ONTOGENESIS AND PHYTOCOENOTIC ACTIVITY OF <i>ACER PLATANOIDES</i> L. IN FORESTS OF THE BRYANSK REGION .....	46
<i>Knyazeva A.S., Ivanova T.G.</i>	ANALYSIS OF INFLUENCE OF EDUCATIONAL ACTIVITY ON SOME PHYSIOLOGICAL INDICATORS OF MEDICAL STUDENTS OF THE FIRST COURSE .....	54
<i>Lobanov G.V., Bashkirskii A.I., Zvereva A.Yu., Trishkin B.V., Protasova A.P.</i>	THE LONG-TIME DYNAMIC OF NDVI AS INDICATORS OF FOREST LANDSCAPES FUNCTIONING (ON THE EXAMPLE OF BRYANSK TRAINING AND EXPERIMENTAL FOREST) .....	57

### VETERINARY SCIENCES

<i>Yozhikova M.I., Zaitseva E.V.</i>	MORPHOLOGY CARDIOVASCULAR SYSTEM OF BIRDS .....	62
<i>Salina M.N., Kobozeva M.S., Akhmedov R.B.</i>	MOLECULAR GENETIC ANALYSIS OF THE GENE <i>BOLA-DRB3</i> COWS, CATTLE INFECTED WITH VIRAL LEUKEMIA.....	67
<i>Selezneva M.S., Zaitseva E.V.</i>	MORPHOLOGY OF GASTRIC AGRICULTURAL BIRD .....	76
	REQUIREMENTS TO THE CONTENTS AND PAPERS OFFERED FOR PUBLICATION in peer-reviewed electronic scientific journals "Scientific notes of Bryansk State University" ("Scientific notes of BSU").....	81

## ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 371.24+371

ИНТЕГРАЦИЯ ТЕОРИЙ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ  
В ЧИСЛОВОЙ КАРТИНЕ МИРА

В. И. Горбачев

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Исследуется содержание, проектирование учебной математической деятельности при изучении теории и моделей числовых систем в методологии развивающего обучения.

**Ключевые слова:** теория развивающего обучения, методика формирования учебной математической деятельности, теория числовых систем.

Числовое пространство (пространство числовых систем), абстрагирующее и идеализирующее такие виды человеческой деятельности, как счет, измерение, оперирование, выстроенное в последовательно расширяемых арифметической, геометрической и алгебраической моделях систем натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, выступает основой становления числовой картины мира в адекватной деятельности представительства. Формируемые только в практической модельно-вычислительной деятельности пространственно-числовые представления ограничены интуитивными образами объектов, операций числового пространства, не отражают его внутренние закономерности, не имеют системного характера [2, 3, 5, 6].

Методологической закономерностью числовых систем «выступает изначальная дифференциация, раздельное исследование с последующей дифференциацией теории каждой из числовых систем и соответствующих ей моделей [6, с.38]. В этой связи процесс становления во внутреннем плане субъекта системных представлений числового пространства осуществляется в сочетании разделенных пространственно-модельной деятельности представительства и абстрактной теоретико-числовой деятельности. В учебной математической деятельности «модель числовой системы – это способ представления оперирования, сравнения элементов числовой системы в условиях явного или неявного следования модельным закономерностям теории» [7, с.15]. Теоретико-числовая деятельность направлена на исследование закономерностей пространства числовых систем в теории числового пространства, интегрирующей систему алгебраических теорий каждой из числовых систем.

Теория числовой системы [1,3, 8]:

- абстрактная теория - структурируемая из элементов произвольной природы;
- аксиоматическая теория – с аксиоматизируемыми абстрактными элементами, операциями, отношениями;
- представлена в системе теорем – предложений об абстрактных объектах, операциях, свойствах, доказуемых из аксиом;
- использует как универсальные (по определению, от противного, аналитико-синтетический), так и специфические (индукции, модельного представления, предельного перехода) методы доказательства;
- имеет модели – конкретные множества с образами абстрактных элементов, операций, отношений с требованием истинности аксиом, теорем;
- выстроена в соответствии с требованиями методологии математической теории.

Научно-теоретической и, значит, методической закономерностью числовой содержательно-методической линии выступает не слитное модельно-теоретическое

исследование числовых систем, а системное изучение моделей в условиях их дифференциации с последующей интеграцией в процессе анализа абстрактной теории.

Система критериальных признаков абстрактной теории, интеграция отдифференцированных моделей, как методическая закономерность, задают следующие принципы формирования теорий числовых систем в учебной математической деятельности [4, 7, 9, 11]:

а) структурное представление базовых моделей числовых систем выступает первичной основой индуктивного конструирования абстрактных теорий (от моделей к теории);

б) совокупность модельных образов числовой системы (чисел в модели), абстрагируется в понятии числа – первичного термина теории (от образов к понятиям);

в) общие для моделей свойства операций, отношений, абстрагируются в форме аксиом, теорий числовой системы (от свойств моделях к аксиомам);

г) совокупность фактов, предложений, истинных в модели, обобщается до формулировок теорем абстрактной аксиоматической теории, доказуемых либо с помощью универсальных методов, либо специфических для данной теории (метод индукции, метод предельного перехода), (от наглядной истины к доказательству);

д) соответствие абстрактных понятий и модельных образов, доказуемых предложений теории и истинных предложений модели, выступает основой детального знакомства, анализа абстрактной теории (соответствия фактов теории и моделей);

е) общее представление о структуре теории, методах доказательства во взаимной связи со структурой моделей, способами установления истины является основным результатом учебной математической деятельности (соответствие структуры теории и модели).

В теории натуральных чисел модельные представления числа, как «именованной» точки на координатной прямой, как систематической записи по основанию системы счисления  $q=10$  абстрагируются в понятии натурального числа, как элемента произвольной природы с отношением непосредственного следования и аксиоматизируемыми свойствами:

- первого элемента абстрактного множества  $a' \neq 1, \forall a \in \mathbb{N}$ ;

- бесконечности  $\forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} b = a'$ ;

- линейной упорядоченности  $\forall b \in \mathbb{N} \exists a \in \mathbb{N} a' = b$ ;

- базового метода доказательства свойств счётных (нумеруемых) множеств (индукции) – если  $M \leq \mathbb{N}$  и  $1 \in M$  и  $a \in M \rightarrow a' \in M$ , то  $M \in \mathbb{N}$ .

Сложение и умножение натуральных чисел в моделях, их наглядные свойства в теории натуральных чисел доказываются из аксиом сложения  $(a + 1 = a', a + b' = (a + b)')$ , умножения  $(a \cdot 1 = a, a \cdot b' = a \cdot b + a')$  методом математической индукции.

В системе теорем теории натуральных чисел устанавливается справедливость как подтверждаемых в моделях предложений (представление натурального числа в систематической записи по любому основанию), так и не имеющих аналогов в моделях (свойства простых чисел, разложение натурального числа в произведении простых, функций натурального элемента и т.д.).

В процессе развития из своих моделей абстрактная теория натуральных чисел

- поглотила геометрическую модель в системе аксиом множеств натуральных чисел и арифметических операций;

- поглотила арифметическую модель, как одну из возможных систем счисления с обоснованием операторных действий над натуральными числами;

- установила систему новых свойств натуральных чисел, связанных с разложением на простые множители;

- позволила ранее видимые на моделях свойства операций, отношений доказать из аксиом;

- превратила метод математической индукции в основной при доказательстве свойств, которыми обладает счётное множество объектов.

В анализе теорий и моделей, в процедурах отдельного формирования и последующей интеграции деятельности представлявания и теоретико-числовой деятельности система натуральных чисел выступает, как конкретное [10]:

- натуральное число – удобное средство математической деятельности: нумерация объектов конечных и счётных множеств; систематическая запись натурального числа по любому основанию системы счисления, поразрядные операторные действия, разложение на простые сомножители.

- множество натуральных чисел – счётное дискретное множество с алгебраическими операциями и отношением линейного порядка, с базовым методом доказательства свойств (Рис.1).



Рис. 1. Интеграция теории натуральных чисел и её моделей

Закономерностью формирования системы целых чисел в сочетании деятельности представления и теоретико-числовой деятельности выступает начальное изучение ее трех различных моделей: арифметической, геометрической, алгебраической.

В арифметической модели целое число представлено систематической десятичной записью с учетом знака, модульно-определенными операциями, знаковым и поразрядным сравнением с естественным поглощением арифметической модели натуральных чисел. Геометрическая модель целых чисел представлена точками ориентированной симметричной шкалы с фиксированной единицей измерения, поглощает соответствующую модель  $\mathbb{N}$  требованием симметричности, что равносильно алгебраичности операции вычитания. Алгебраическая модель  $\mathbb{Z}$  рассматривает целое число как класс разностей (упорядоченных пар) натуральных чисел с индуцированными в  $\mathbb{N}$  операциями, отношением сравнения, в условиях изоморфного включения  $\mathbb{N}$  и наследования свойств операций «+», «-» фиксирует на  $\mathbb{Z}$  алгебраическую структуру кольца.

Выделенные важные факты позволяют установить критериальные признаки системы  $\mathbb{Z}$  целых чисел:

- состоящей из элементов произвольной природы;
- содержащей систему абстрактных элементов теории натуральных чисел;
- обладающей алгебраической структурой кольца.

Таким образом, аксиоматическая теория целых чисел базируется:

- на аксиомах кольца;
- на аксиомах теории натуральных чисел.

В теории  $\mathbb{Z}$  целое число – элемент абстрактной теории колец, конструируемый из абстрактных объектов теорий натуральных чисел (в виде разности, в систематической записи, в разложении по степеням простых чисел).

В теории целых чисел операции «+», «-» определяются в процедуре расширения (индуцирования) операций теории натуральных чисел: для целых чисел  $a = m - n$  и  $b = p - q$ , где  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$  их сумма и произведение  $a + b = (m + p) - (n + q)$ ,  $a \cdot b = (m \cdot p + n \cdot q) - (m \cdot q + n \cdot p)$ .

Опосредованность операций в  $\mathbb{Z}$  операциями в  $\mathbb{N}$  обосновывает справедливость их алгебраических свойств, как в теории, так и в моделях целых чисел.

Базовыми теоремами теории целых чисел выступают:

- теорема о делении с остатком;
- теоремы теории делимости, в том числе теоремы о вычислении НОД и НОК;
- теоремы сравнений по модулю, в частности, признаки делимости.

Методологическая схема их изучения фиксирует в качестве основного метод модельного представления: анализ свойства в одной из моделей  $\Leftrightarrow$  формулировка и доказательство (обоснование) свойства в теории.

Указанной закономерности соответствует сочетание доказательства теоремы о делении с остатком с правилом поразрядного деления в арифметической модели, анализ теорем теории сравнений и их приложение к выводу признаков делимости.

В процедуре последовательного развёртывания теории целых чисел становится видимой роль каждой из её моделей (Рис.2):

- геометрическая модель – важное средство развития теории целых чисел в представлении симметричности  $\mathbb{Z}$ , операций сложения и умножения, сравнения, делителей и кратных, дискретности  $\mathbb{Z}$ ;

- арифметическая модель – важное средство развития теории целых чисел в представлении поразрядных операций, деления с остатком, разложения на простые множители, исследования теории натуральных чисел, признаков делимости;

- алгебраическая модель – важное средство развития теории целых чисел в представлении взаимной связи натуральных и целых чисел изоморфного вложения  $\mathbf{N}$  в  $\mathbf{Z}$ , свойств кольца  $\mathbf{Z}$  как алгебраической структуры (классы вычетов, идеалы, фактор-кольцо)

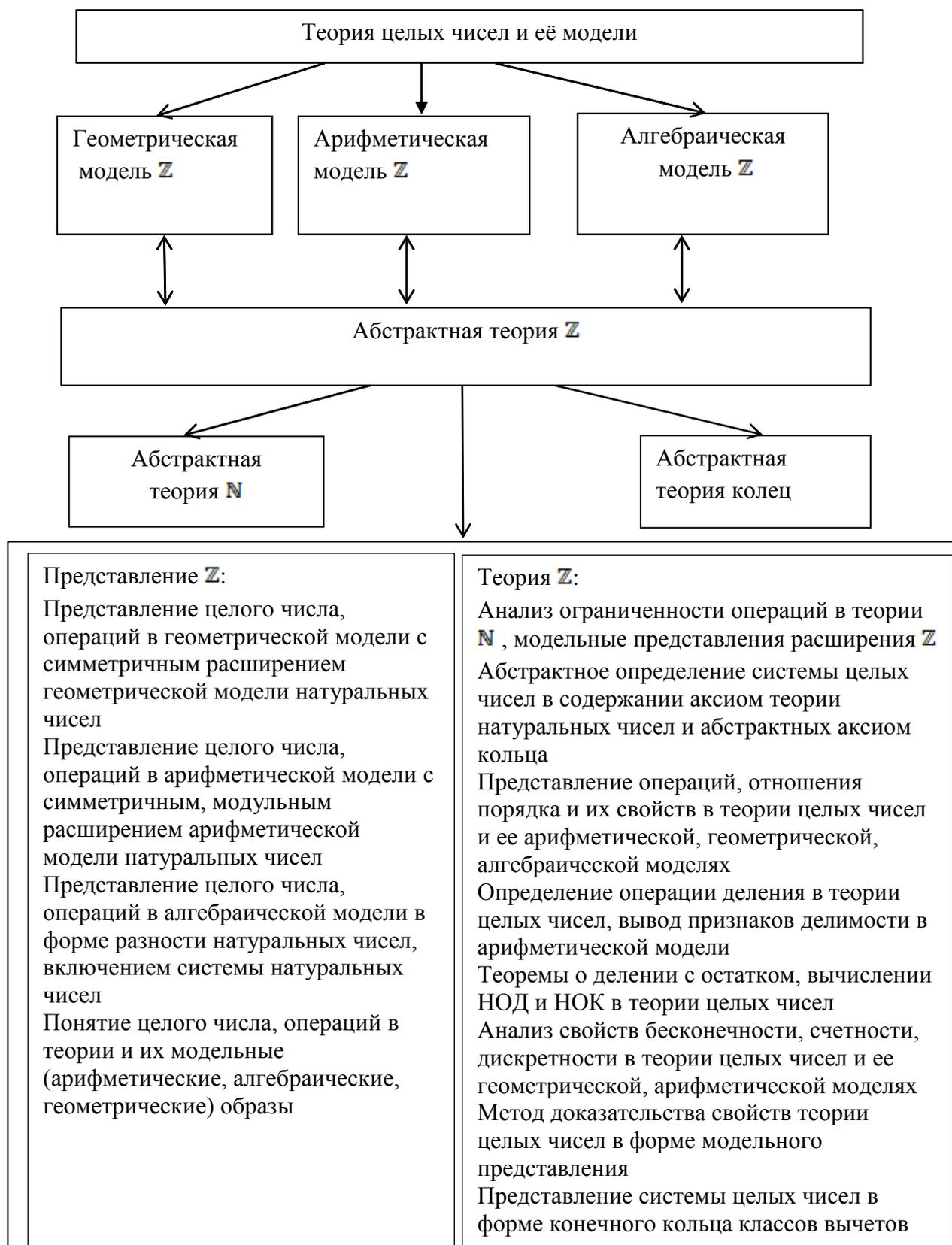


Рис.2. Интеграция теории целых чисел и её моделей

В методологическом плане весьма значимо, подлежит содержательно-методическому анализу неявное использование следующих фундаментальных аспектов современной математики [3, 9, 11, 12]:

- подход к становлению теории как абстрактной в содержании определённой алгебраической структуры;
- механизм взаимосвязи аксиоматической теории и её моделей в системном изучении;
- переход от операций на элементах алгебраической системы к операциям на классах элементов, то есть к конгруенциям в алгебраических системах;
- изоморфное включение одной алгебраической системы в другую в соответствии с принципом расширения;
- анализ теории, её моделей в системе категорий «конечное-бесконечное», «дискретное-непрерывное».

Система  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел отражает закономерность модельно-теоретического представления, изучения числовых систем:

- в деятельности представления - в содержании геометрической, арифметической моделей, расширяющих адекватные модели системы  $\mathbb{Z}$ , в алгебраической (рациональное число – класс эквивалентных дробей) модели, выстроенной в алгебраической структуре поля;
- в теоретико-числовой деятельности на базе абстрактных понятий рационального числа, операций, отношения порядка, в исследовании фундаментальных свойств (счетности, дискретности, плотности) системы рациональных чисел, взаимной связи моделей.

Геометрическая модель  $\mathbb{Q}$  представлена симметричной числовой прямой, расширяющей представления геометрической модели  $\mathbb{Z}$  конечным дроблением единицы измерения, позволяющей фиксировать всякую дробь  $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ , изображать сумму, разность, произведение, частное рациональных чисел. Процесс поглощения геометрической модели  $\mathbb{Z}$  лишь точками  $\frac{m}{1}, m \in \mathbb{Z}$  демонстрирует наглядное усложнение системы  $\mathbb{Q}$ , ее операций, свойств. На геометрической модели представлены свойства счетности, дискретности, новое свойство плотности, граничность точек модели  $\mathbb{Q}$  как ее характеристическое свойство.

Арифметическая модель  $\mathbb{Q}$  характеризуется представлением рациональных чисел:

- в систематическом разложении по положительным и отрицательным степеням основания системы счисления – в форме как конечных, так и бесконечных периодических десятичных дробей;
- в последовательности операций сложения, умножения и им обратных с учетом знаков, степеней, модулей;
- в процедуре исследования соответствия с алгебраической моделью – переводом десятичных дробей в обыкновенные и обратно.

В алгебраической модели  $\mathbb{Q}$  рациональные числа - классы обыкновенных дробей с условием сокращения – классы эквивалентности, для которых введены, обоснованы операторные тождества сложения, вычитания, умножения, деления, зафиксировано условие включения системы целых чисел.

Различные модельные представления системы рациональных чисел интегрируются в содержании теории рациональных чисел с системой критериальных признаков:

- система рациональных чисел - абстрактное множество, рациональные числа – элементы произвольной природы;
- система рациональных чисел содержит абстрактные элементы системы целых чисел;
- операции системы рациональных чисел являются расширением операций системы целых чисел;

- отношение порядка в теории рациональных чисел обладает свойствами линейности, плотности, архимедовской упорядоченности;

- система рациональных чисел обладает алгебраической структурой поля.

В результате теория рациональных чисел наследует систему аксиом целых чисел (аксиомы натуральных чисел и аксиомы кольца), базируется на системах аксиом поля. Поскольку аксиомы поля поглощают аксиомы структуры кольца, то система рациональных чисел  $Q$  определяется:

- системой аксиом теории натуральных чисел;

- системой аксиом поля.

В системе аксиом поля теории рациональных чисел разрешимо уравнение:  $a \cdot x = b$ , где  $a \neq 0$ . Запись его решения:  $x = b \cdot a^{-1} = \frac{b}{a}$  имеет формальный характер

«доби», на множестве «дробей» устанавливается формализованная система операций:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

В результате, лишь в теории рациональных чисел на базе аксиом поля обосновывается алгебраическая сущность операции над обыкновенными дробями (элементами алгебраической, геометрической модели), также важно, что запись  $x = b \cdot a^{-1} = \frac{b}{a}$  в теории рациональных чисел является формальной (решение уравнения  $a \cdot x = b$ ), поскольку операция «деления» в алгебраической структуре поля отсутствует. Другими словами термины «деление», «частное», «дробь» это понятия не теории рациональных чисел, а её базовых моделей.

В теории рациональных чисел устанавливается:

- 1) операторные свойства абстрактных объектов – операций сложения, умножения, отношения порядка;
- 2) изоморфное включение системы целых чисел;
- 3) представление рационального числа в форме  $r = a : b = \frac{a}{b}$  «частного» целого числа  $a$  и натурального числа  $b$ .

Представление рационального числа в виде частного целого числа и натурального числа является фундаментальным фактом теории рациональных чисел, оно позволяет:

- доказать счётность системы рациональных чисел;
- сконструировать арифметическую модель теории;
- установить дискретность системы рациональных чисел;
- обосновать категоричность теории рациональных чисел (изоморфизм моделей).

Арифметическая модель теории рациональных чисел, одна из важнейших в «числовой картине мира», строится в следующей процедуре:

- 1) рациональное число представлено в виде частного целого и натурального числа;
- 2) в арифметической модели теории целых чисел целое число представлено в систематической записи по основанию  $q=10$ ;
- 3) в арифметической модели теории натуральных чисел, натуральное число представлено в систематической записи по основанию  $q=10$ ;
- 4) по теореме о делении с остатком поразрядное деление целого числа на натуральное представимо в виде конечной или бесконечной (чистой, или смешанной) периодической десятичной дроби;

5) множество чисел, представленных в виде конечных или бесконечных периодических десятичных дробей образует арифметическую модель теории рациональных чисел.

Обоснование категоричности теории рациональных чисел имеет форму соответствия алгебраической и арифметической модели в системе алгоритмизированных взаимосвязанных задач:

- превращения обыкновенной дроби в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби;
- превращения конечной или бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную.

В результате теория рациональных чисел, с одной стороны формализует, аксиоматизирует свойства алгебраической модели и в системе аксиом  $\mathbb{N}$ , поля устанавливает фундаментальные факты, с другой стороны теоретические конструкции использует для развёртывания арифметической модели.

Интеграция отдифференцированных и развитых базовых моделей, как главная функция теории рациональных чисел, в методологическом плане осуществляется в системе задач:

- развития операторных преобразований, сравнения элементов модели в её общем структурном представлении;
- установления на конкретной модели фундаментальных характеристик теории (счётности, дискретности, плотности, линейной упорядоченности);
- исследование взаимных связей моделей, как с позиции соответствия элементов, так и их свойств (Рис.3).

Модельно-теоретическое представление системы рациональных чисел позволяет систематизировать интегральные пространственно-числовые представления систем натуральных, целых, рациональных чисел с общим фундаментальным свойством счетности, в целостной модельно-теоретической деятельности сформировать теоретико-числовое мышление:

- в анализе соответствия теорий натуральных, целых, рациональных чисел и адекватных им базовых моделей;
- в процедуре расширения геометрической модели натуральных, целых, рациональных чисел с расширением модельно-геометрического представления числа, операций, отношений и их свойств;
- в процедуре расширения арифметической модели натуральных, целых, рациональных чисел с расширением модельно-арифметического представления числа, операций, отношений и их свойств;
- в процедуре становления алгебраических моделей целых, рациональных чисел с расширением модельно-алгебраического представления числа, операций, отношений и их свойств, изоморфным включением предыдущей числовой системы;
- в исследовании соответствия различных моделей одной и той же числовой системы для установления категоричности теорий числовых систем;
- в анализе фундаментальности и ограниченности метода математической индукции, метода модельной представленности в доказательстве свойств числового пространства – пространства моделей и теорий числовых систем;
- модельно-теоретическом исследовании фундаментальных свойств бесконечности, счетности, дискретности числовых систем.

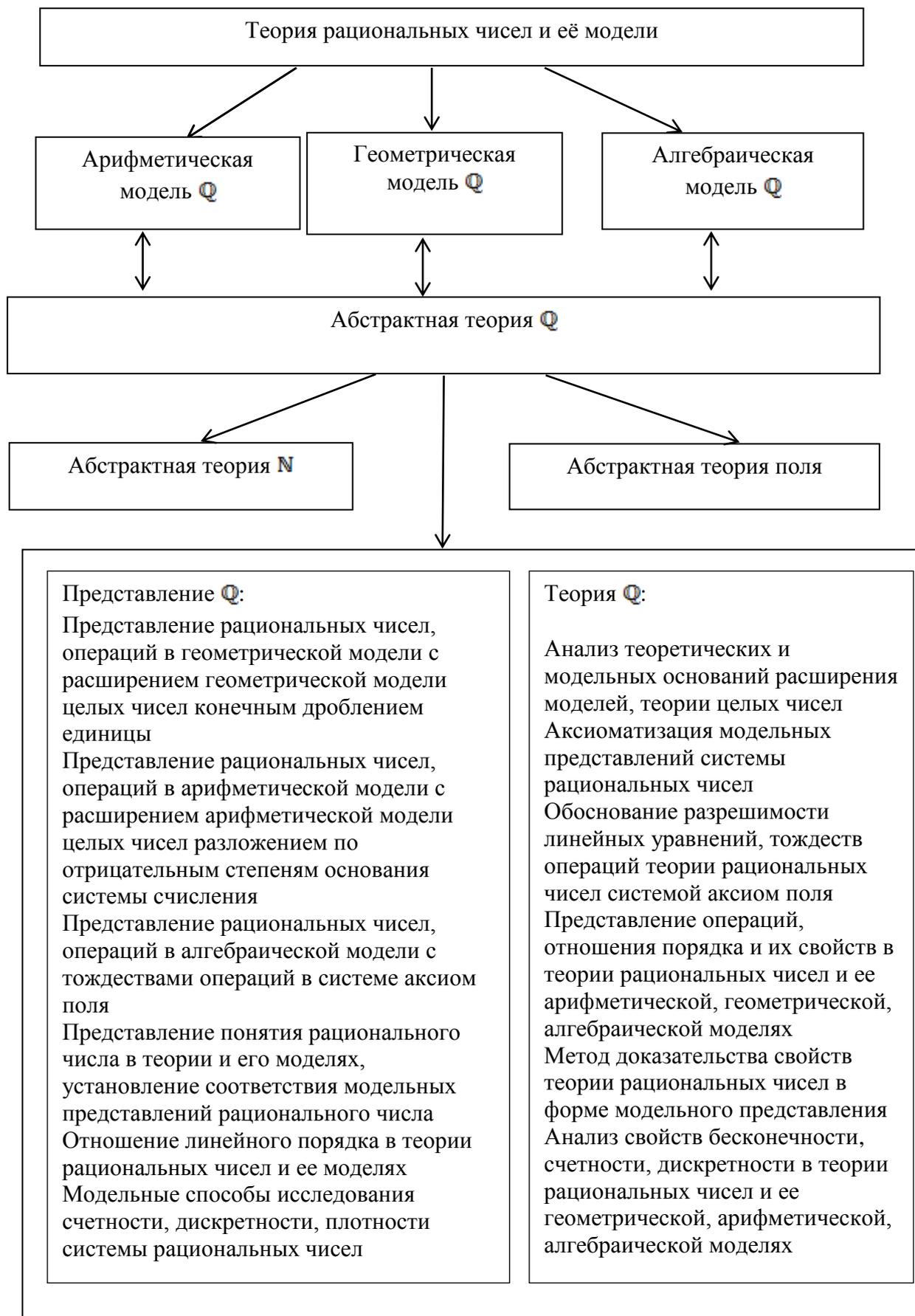


Рис. 3. Интеграция теории рациональных чисел и её моделей

Система действительных чисел  $\mathbb{R}$  характеризуется порядковым усложнением теоретико-модельных представлений числового пространства:

- система действительных чисел в современной математике представлена тремя эквивалентными теориями (Вейерштрасса, Дедекинда, Кантора), ни одна из которых, в силу своей математической сложности, не может быть реализована в учебной математической деятельности общеобразовательного уровня;

- каждая из теорий системы действительных чисел, а, значит, и каждая из ее моделей базируется на методе предельного перехода, фундаментальных свойствах континуальности, непрерывности, выступающих сложными математическими абстракциями, адекватными лишь уровню профессиональной математической деятельности;

- система действительных чисел характеризуется спектром моделей, различающихся интерпретацией понятий действительного числа, операций, отношений, оперирующих бесконечными процессами приближений, предельного перехода и имеющих весьма сложный характер соответствия.

Модельно-теоретическое представление системы действительных чисел в большей степени формируется в деятельности представительства – в анализе спектра моделей, их соответствия, модельных форм выраженности бесконечных процессов приближения в интерпретации понятий числа, операций, свойств непрерывности, континуальности. Модельные представления системы действительных чисел, несомненно, наследуют представления арифметических, геометрических, алгебраических моделей предшествующих числовых систем, однако способы расширения моделей, характер и свойства элементов моделей существенно изменяются. Принципиальным фактом модельных представлений системы действительных чисел выступает по выражению Р. Дедекинда отражение в них свойства непрерывности: «становится необходимым существенно улучшить построенный путем создания рациональных чисел инструмент  $\mathbb{R}$ , создав новые числа таким образом, чтобы область чисел приобрела ту же полноту, или, скажем прямо, ту же непрерывность, как и прямая линия» [3, с. 16].

Теоретико-числовая деятельность опирается на модельные представления системы действительных чисел, направлена на интеграцию моделей в абстрактном аксиоматическом определении поля действительных чисел, как непрерывного, бесконечного мощности континуума, содержащего поле рациональных чисел.

Аксиоматизация фундаментальных свойств определенной модели числовой системы, как принцип построения ее абстрактной алгебраической теории, сохраняется и в описании теории действительных чисел. Так, в арифметической модели  $\mathbb{R}$  действительных чисел – конечных или бесконечных десятичных дробей – устанавливается справедливость следующих свойств:

- система рациональных чисел, представленная конечными или бесконечными периодическими дробями, составляет собственное счётное подмножество;

- для арифметических операций на множестве  $\mathbb{R}$  конечных или бесконечных десятичных дробей выполняются все аксиомы поля;

- имеет место аксиома непрерывности: для бесконечной последовательности  $\{[a_n, b_n] | n \in \mathbb{N}\}$  вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

существует единственное действительное число  $\alpha$ , принадлежащее всем отрезкам. Выделенная система свойств арифметической модели выступает, как характеристическая в описании теории действительных чисел: система  $\mathbb{R}$  действительных чисел – абстрактное множество, содержащее систему элементов теории рациональных чисел, обладающее алгебраической структурой поля, в котором справедлива аксиома непрерывности. В аксиоматической трактовке система  $\mathbb{R}$  действительных чисел – множество элементов

произвольной природы, для которого справедливы: система аксиом теории натуральных чисел; система аксиом поля; аксиома непрерывности. Представление свойства непрерывности в арифметической модели системы действительных чисел, его аксиоматизация в форме наличия общего элемента у бесконечной системы вложенных отрезков не является единственным. Эквивалентным выступает геометрическое представление Р. Дедекинда: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это рассечение прямой на два куска» [3, с. 17].

Таким образом, в алгебраической теории система  $\mathbb{R}$  действительных чисел – абстрактное множество, обладающее сложной структурой:

- определено в системе аксиом, сравнимой с аксиоматикой евклидовой геометрии;
- содержит все предыдущие абстрактные числовые множества  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ , поскольку включает соответствующие аксиомы;
- характеризуется фундаментальными свойствами непрерывности, континуальности, отличными от свойств других числовых множеств;
- основным в доказательстве свойств выступает метод предельного перехода, существенно обогащающий алгебраические методы исследования.

Закономерности модельно-теоретического подхода формируют методологию изучения системы действительных чисел:

- в содержании геометрической, арифметической, алгебраической моделей натуральных, целых, рациональных чисел выделяются основания для расширения множества рациональных чисел;
- на геометрической, арифметической, алгебраической моделях системы рациональных чисел вводятся основы теории пределов последовательностей - определения, способы вычисления, метод доказательства, свойства;
- на базе расширяющихся моделей систем натуральных, целых, рациональных чисел с опорой на метод предельного перехода осуществляется построение базовых моделей системы действительных чисел;
- на геометрических, арифметических, алгебраической, номинальной моделях  $\mathbb{R}$  исследуются фундаментальные свойства системы действительных чисел;
- в системе фундаментальных свойств моделей фиксируется абстрактный алгебраический подход к выделению элементов теории  $\mathbb{R}$ , осуществляется интеграция модельных представлений системы действительных чисел.

Модельные представления числового пространства формируются в процессе построения исследования базовых моделей системы действительных чисел, их взаимных связей, как в рамках общих моделей числовых систем, так и в спектре моделей теории действительных чисел.

Базовыми моделями системы действительных чисел, наследующими свойства модели системы рациональных чисел, выступают:

**1.  $\mathbb{R}_1$  – непрерывная арифметическая модель.** В арифметической модели рациональных чисел число – конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь. В арифметической модели  $\mathbb{Q}$  операция извлечения корня не является алгебраической, приводит к иррациональным числам – представимым бесконечными непериодическими десятичными дробями. В арифметической модели  $\mathbb{R}_1$  действительное число – конечная или бесконечная (периодическая или непериодическая) десятичная дробь. Включенность в  $\mathbb{R}_1$  арифметической модели  $\mathbb{Q}$  означает бесконечность арифметической модели действительных чисел. Целостный характер представления действительного числа (конечная или бесконечная десятичная дробь) приводит к сложности определения операций сложения, умножения, исследования свойств операций, аналогичных операциям в арифметической

модели поля  $\mathbb{Q}$ . В арифметической модели  $\mathbb{R}_1$  «точные» операции множества рациональных чисел заменены операциями с бесконечным процессом приближений:

- для действительного числа  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 b_3 \dots$  определяется бесконечная последовательность его рациональных приближений по недостатку и по избытку – последовательность стягивающихся отрезков с рациональными концами;

- представление действительного числа  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 b_3 \dots$  в виде бесконечной непериодической десятичной дроби позволяет установить несчетность системы  $\mathbb{R}_1$  действительных чисел, ввести новую мощность бесконечных множеств – мощность континуума.

- в предельном переходе последовательность стягивающихся отрезков (приближений) имеет число  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 b_3 \dots$  в качестве общего элемента, наличие общего элемента у бесконечной последовательности стягивающихся отрезков с рациональными концами выступает характеристическим свойством арифметической модели действительных чисел – свойством непрерывности;

- операции суммирования, умножения действительных чисел  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 b_3 \dots$  и  $\beta = c_1 c_2 \dots c_n, d_1 d_2 d_3 \dots$  определяются через построение последовательностей стягивающихся отрезков, построенных в процедурах сложения, умножения рациональных приближений по недостатку и избытку каждого из действительных чисел;

- свойства операций на модели  $\mathbb{R}_1$  вытекают из справедливости свойств операций в арифметической модели поля  $\mathbb{Q}$ ;

- отношение порядка в арифметической модели  $\mathbb{R}_1$  вводится лексикографически – сравнением соответствующих членов последовательностей рациональных чисел;

- измерение отрезков, извлечение корней в модели  $\mathbb{R}_1$  осуществляется в бесконечной последовательности приближений по недостатку и по избытку рациональными числами в форме конечных десятичных дробей.

2.  $\mathbb{R}_2$  – дискретная (округленная) арифметическая модель. Сложность оперирования действительными числами в арифметической модели  $\mathbb{R}_1$  приводит к задаче представления действительного числа в процедуре его приближения (округления) по недостатку или избытку конечными десятичными дробями с заданной оценкой погрешности приближения. В дискретной арифметической модели  $\mathbb{R}_2$  всякое действительное число представимо в форме конечной последовательности конечных десятичных дробей

$$\alpha = \{0, a_1; 0, a_1 a_2; 0, a_1 a_2 a_3; \dots, 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n\},$$

таких, что

$$|\alpha - 0, a_1 a_2 \dots a_i| < \frac{1}{10^i}.$$

В процедуре приближения (округления) действительного числа исследуются две задачи:

- выбор приближения (округления) действительного числа из последовательности приближений в зависимости от заданной оценки погрешности;

- оценка погрешности приближения (округления) действительного числа конечной десятичной дробью из последовательности приближений.

Фактически, в процедуре округления (представления действительного числа в виде конечной десятичной дроби)

$$m = 0, a_1 a_2 \dots a_n$$

во-первых, действительное число

$$\alpha = \{0, a_1; 0, a_1 a_2; 0, a_1 a_2 a_3; \dots, 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n\}$$

отождествляется с его конкретным приближением  $m = 0, a_1 a_2 \dots a_n$  и, во-вторых, погрешностью округления  $\varepsilon = \frac{1}{10^i}$  определяется интервал

$$m - \varepsilon \leq \alpha \leq m + \varepsilon,$$

в котором содержится действительное число  $\alpha$ . Вместе с тем, рациональное число  $m = 0, a_1 a_2 \dots a_n$  является округленным значением не только действительного числа  $\alpha = \{0, a_1; 0, a_1 a_2; 0, a_1 a_2 a_3; \dots, 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n\}$ ,

но и всех действительных чисел из промежутка  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ . Это означает, что в дискретной арифметической модели  $\mathbb{R}_2$  округлению подвергается не одно действительное число, а все действительные числа из промежутка  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  и в процедуре округления утрачивается свойство непрерывности системы действительных чисел.

Операции сложения и умножения действительных чисел в арифметической модели  $\mathbb{R}_2$  имеют поэтапную форму оперирования над конечными десятичными дробями с последующей оценкой погрешности:

- выбора конечных десятичных дробей из последовательностей приближений действительных чисел, соответствующих определенной погрешности;
- осуществление операций над конечными десятичными дробями в арифметической модели рациональных чисел;
- оценка погрешности приближения (округления) суммы, произведения действительных чисел.

Сравнение действительных чисел осуществляется выбором различающихся приближений действительных чисел, соответствующих одной и той же погрешности с их последующим сравнением как конечных десятичных дробей.

Процесс приближения (округления), характеризующий переход от непрерывной модели  $\mathbb{R}_1$  к дискретной модели  $\mathbb{R}_2$ , существенно упрощает практическую деятельность измерения, оперирования с сохранением заданной степени точности.

В мировоззренческом плане арифметическая модель  $\mathbb{R}_1$  обеспечивает развитие представлений числа от натуральных до действительных в форме конечных или бесконечных десятичных дробей с фундаментальными свойствами непрерывности и континуальности, однако процедуры представления, оперирования действительными числами в модели  $\mathbb{R}_1$  оказываются крайне громоздкими. Арифметическая модель  $\mathbb{R}_2$  строится на базе представлений модели  $\mathbb{R}_1$ , в процедуре округления приводит к представлению действительного числа в виде конечной десятичной дроби, упрощая измерения, оперирование с действительными числами. Если непрерывная модель  $\mathbb{R}_1$  фиксирует итог теоретического расширения арифметической модели числовых систем в числовом пространстве, то дискретная модель  $\mathbb{R}_2$  упрощает научные представления, делает шаг назад к арифметической модели рациональных чисел, обосновывая практику человеческой деятельности измерения, оперирования на уровне рациональных чисел.

3.  $\mathbb{R}_3$  – **линейная геометрическая модель**. Геометрическая модель системы  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел характеризуется дискретностью – свойством граничности точек координатной прямой с конечным делением единицы измерения. Дискретный характер геометрической модели связан с невозможностью изображения на ней иррациональных чисел. Построение геометрической модели действительных чисел  $\mathbb{R}_3$  осуществляется в исследовании задач соответствия на базе аналитических представлений непрерывности:

- изображения действительных чисел на координатной прямой в соответствии  $\mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_3$ , описываемом схемой «действительное число – изображение системы стягивающихся рациональных отрезков – изображение общей точки»;

- описания действительных чисел, заданных точками координатной прямой в соответствии  $\mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_1$ , описываемом схемой «изображение точки прямой – изображение системы стягивающихся рациональных отрезков – описание действительного числа».

Биективное соответствие моделей  $\mathbb{R}_1$  и  $\mathbb{R}_3$  позволяет установить понятие непрерывности и ее геометрический образ, в отождествлении моделей превратить координатную прямую в числовую, строить аналитические и геометрические изображения результатов арифметических операций, фиксировать линейную упорядоченность системы действительных чисел, устанавливать соответствие интервалов числовой прямой и аналитических неравенств, фиксировать механизм расширения геометрической модели рациональных чисел в числовом пространстве.

Геометрическая модель  $\mathbb{R}_3$  позволяет сформировать образное представление процедуры приближения (округления) действительных чисел конечными десятичными дробями, построить геометрическое изображение дискретной арифметической модели  $\mathbb{R}_2$ , создать образ соответствия моделей  $\mathbb{R}_2$  и  $\mathbb{R}_3$ .

4.  $\mathbb{R}_4$  - периодическая геометрическая модель. Математико-мировоззренческое представление периодических процессов формируется в содержании периодической непрерывной геометрической модели  $\mathbb{R}_4$  системы действительных чисел с новым (радианным) обозначением действительных чисел. Математическая значимость модели  $\mathbb{R}_4$  определяется не только фундаментальностью свойства периодичности и радианной формы обозначения действительных чисел. В содержании периодической модели вводится важный класс функций – тригонометрические функции со свойствами периодичности, обратные тригонометрические функции с радианным заданием области определения. На геометрической модели  $\mathbb{R}_4$  исследуются важные с позиции представления, анализа множества решений классы тригонометрических уравнений, неравенств с характерными для них равносильными преобразованиями, множествами решений, общими методами решений. Указанные факты объясняют выделение А.Г. Мордковичем [13] периодической геометрической модели  $\mathbb{R}_4$  в качестве отдельной математической конструкции с исследованием ее свойств, анализом связи с линейной геометрической моделью  $\mathbb{R}_3$ , с прямоугольной системой координат на плоскости.

Представление периодической геометрической модели  $\mathbb{R}_4$  формируется в процессе ее конструирования, фиксации аналогии с линейной геометрической моделью  $\mathbb{R}_3$ , общего свойства непрерывности, фундаментальных отличий в форме радианного изображения действительных чисел, свойства периодичности. Базой для построения периодической геометрической модели выступает окружность единичного радиуса, на которой по аналогии с числовой прямой  $\mathbb{R}_3$  заданы начальная точка отсчета на правом конце горизонтального диаметра, положительное направление отсчета против часовой стрелки, осуществляется радианное обозначение координат точек на окружности. В условиях различения точек на окружности и их радианных координат (действительных чисел) фиксируется фундаментальное свойство периодичности  $M(t) = M(t + 2\pi k)$ :

- положение точки  $M$  на окружности остается постоянным;
- координата точки  $M$  изменяется на кратное периоду  $2\pi$  (длина окружности) действительное число.

Понятие периодических координат точек  $x + 2\pi k$  формируется с помощью радианного изображения на окружности стандартных точек

$$\frac{\pi}{2} n, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Вместе с координатами точек фиксируется аналитическое представление координат точек дуги окружности в стандартных угловых величинах

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k,$$

и, затем, в произвольных  $t_1 + 2\pi k < t \leq t_2 + 2\pi k$ .

Разноплановый характер изображения системы действительных чисел на моделях  $\mathbb{R}_3$  и  $\mathbb{R}_4$  востребует процедуру установления их соответствия в условиях совмещения. Такое соответствие устанавливается в форме «проката» числовой окружности  $\mathbb{R}_4$  по числовой прямой  $\mathbb{R}_3$  как вправо (положительного), так и влево (отрицательного) с фиксацией «отпечатков» вначале для стандартных угловых величин, затем, для произвольных. В результате на числовой прямой  $\mathbb{R}_3$  с ранее фиксированными средствами арифметической модели  $\mathbb{R}_1$  изображениями действительных чисел фиксируются радианные координаты периодической модели  $\mathbb{R}_4$ . Обратное наследование свойств числовой прямой  $\mathbb{R}_3$  в форме «накручивания» позволяет перенести на периодическую модель  $\mathbb{R}_4$  свойство непрерывности, геометрические образы операций системы действительных чисел, создать в модели  $\mathbb{R}_4$  образ геометрической модели системы рациональных чисел.

5.  $\mathbb{R}_5$  – алгебраическая (предельного перехода) модель. В непрерывной арифметической модели  $\mathbb{R}_1$  всякое иррациональное число  $\alpha$  представимо в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, для него можно построить бесконечную последовательность приближений конечными десятичными дробями с уменьшением разряда приближения – в фундаментальной последовательности  $\{a_n\}$  десятичных приближений. В случае рационального числа  $\alpha$  такое представление также выполнимо в силу равенства  $\alpha = 0, b_1 b_2 \dots b_n = 0, b_1 b \dots b_n (0)$ . Согласно определению предела действительное число  $\alpha$  является пределом последовательности  $\{a_n\}$  рациональных чисел (приближений)

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

В представлении действительного числа фундаментальной последовательностью рациональных чисел характер приближений (по недостатку, по избытку, в комбинировании приближений) ничем не ограничен, значит, фундаментальных последовательностей приближений действительного числа  $\alpha$  достаточно много. Выделенные фундаментальные последовательности приближения действительного числа  $\alpha$  являются эквивалентными – разности соответствующих членов приближений стремятся в пределе к нулю. Тогда действительному числу  $\alpha$  соответствует класс эквивалентности – класс фундаментальных последовательностей рациональных чисел, сходящихся к действительному числу  $\alpha$ . В силу свойства единственности предела последовательности множество действительных чисел можно отождествить с множеством классов эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Алгебраическая модель  $\mathbb{R}_5$  системы действительных чисел – совокупность всех классов эквивалентности сходящихся фундаментальных последовательностей рациональных чисел. В алгебраической модели  $\mathbb{R}_5$ :

- действительное число  $\alpha$  отождествляется с классом сходящихся к  $\alpha$  фундаментальных последовательностей рациональных чисел;
- теоремы о свойствах предела суммы, произведения, частного последовательностей позволяют установить алгебраическую структуру поля;
- отношение порядка на множестве последовательностей задает отношение линейного порядка;
- классы последовательностей, сходящихся к рациональным числам, образуют поле, изоморфное полю рациональных чисел.

Модель  $\mathbb{R}_5$  системы действительных чисел, построенная на базе представлений непрерывной арифметической модели  $\mathbb{R}_1$ , позволяет сформировать в процедуре приближений действительного числа рациональными понятие предела последовательности, установить его базовые свойства, использовать предельный переход в конструкции новой модели действительных чисел.

6.  $\mathbb{R}_6$  – номинальная (символическая) модель. В практике математической деятельности, в физических, химических приложениях выработалась и закрепились номинальная (символическая) форма аналитического изображения действительных чисел:

- символы определенных действительных чисел, играющих важную роль в различных математических теориях, разделах -

$$\pi = 3,14159 \dots, e = 2,71828 \dots, \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803 \dots, \delta_s = 1 + \sqrt{2} = 2,41421 \dots;$$

- символы корней фиксированной степени из действительных чисел -  $\sqrt{2} = 1,41421 \dots, \sqrt{3} = 1,73205 \dots, \sqrt{5} = 2,23606 \dots, \sqrt[3]{5}, \sqrt[n]{a}$  с изображением в линейной геометрической модели  $\mathbb{R}_3$ , операциями в моделях  $\mathbb{R}_1$  и  $\mathbb{R}_2$  действительных чисел, условной символической записью системы свойств оперирования, сравнения;

- символы значений элементарных функций - показательных  $2^{\frac{1}{2}}, 3^{-1}, 5^{\frac{2}{3}}$ , логарифмических  $\log_2 5, \ln 12, \log_{\frac{1}{3}} 9$ ,

тригонометрических  $\sin \frac{\pi}{3}, \cos 2, \tan \frac{n\pi}{k}$

, ...;

- символы определенных физических величин – нормальное ускорение свободного падения  $g = 9,81 \left(\frac{м}{с^2}\right)$ , гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \left(\frac{м^3}{кг \cdot с^2}\right)$ , элементарный заряд  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  (Кл), масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  (Кг), постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  (Дж·с), ...;

- символы определенных химических величин – постоянная Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  (моль<sup>-1</sup>), универсальная газовая постоянная  $R = 8,314$  (Дж·моль<sup>-1</sup>·К<sup>-1</sup>), постоянная Фарадея  $F = (9,64 \cdot 85 \cdot 10^4)$  (Кл·моль<sup>-1</sup>), нормальный молярный объем газа  $V_m = 22,4$  (Л·моль<sup>-1</sup>), средняя атомная масса серебра  $m_{Ag} = 107,87$  г·моль<sup>-1</sup>, ... .

На безусловную необходимость символической модели системы действительных чисел указывал И. Ньютон во «Всеобщей арифметик или книге об арифметических синтезе и анализе»: «Приступающий к изучению науки вычисления должен сначала ознакомиться со значением употребляемых в ней терминов и знаков и изучить основные действия, как то: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней, приведение дробей и радикалов и методы приведения членов уравнений и исключения неизвестных (когда их несколько). Далее нужно приобрести сноровку во всех этих действиях, приводя задачи к уравнениям, и, наконец, изучить природу и решение уравнений» [11, с. 7-8].

Представление системы действительных чисел в номинальной модели  $\mathbb{R}_6$  базируется на анализе понятия действительного числа как элемента непрерывной модели  $\mathbb{R}_1$ , дискретной модели  $\mathbb{R}_2$ , линейной  $\mathbb{R}_3$  и периодической  $\mathbb{R}_4$  геометрических моделей в их взаимосвязи, в системе модельных представлений операций, фундаментальных свойств.

Культура физических, химических приложений характеризуется схемой соответствия «действительное число  $\rightarrow$  конечная или бесконечная десятичная дробь с системой приближений по недостатку и по избытку  $\rightarrow$  приближенное (округленное) значение действительного числа с заданной степенью точности  $\rightarrow$  точка числовой прямой  $\rightarrow$  точка числовой окружности с учетом периода  $\rightarrow$  действительное число» и в условиях ее

сформированности представление системы действительных чисел в номинальной модели  $\mathbb{R}_6$  оказываются доминирующими.

В рамках учебной математической деятельности номинальная модель выступает не только средой формирования логико-символической культуры в приведенной схеме соответствия, но и важным фактором развития теоретико-модельных представлений числового, геометрического, функционального пространств:

- в системе фундаментальных свойств «конечность – счетность – континуальность», «дискретность - непрерывность», «рациональность - иррациональность», «алгебраичность - трансцендентность» каждой из теорий числовых систем с соответствующими моделями;
- в исследовании метрического компонента геометрической деятельности в содержании понятий длины, угловой величины, площади, объема;
- в совокупности классов числовых элементарных функций с аналитическими свойствами монотонности, экстремальности, периодичности с их функционально-графическим представлением, преобразованием.

Теоретическое представление системы действительных чисел  $\mathbb{R}$  формируется в содержании анализа целостного числового пространства и его закономерностей с позиций абстрактного алгебраического подхода в условиях аксиоматизации модельных представлений каждой из числовых систем (Рис.4.):

а) фиксируются модельные представления и система аксиом предыдущих числовых систем натуральных, целых, рациональных чисел в условиях наследования свойств моделей, адекватного усложнения алгебраической структуры абстрактных множеств объектов;

б) исследуется развитие фундаментальных свойств конечности, счетности, устанавливается счетность систем целых, рациональных чисел;

в) в анализе модельными средствами фундаментального свойства дискретности устанавливаются свойства изолированности натуральных, целых чисел, свойства плотности, граничности рациональных чисел;

г) в спектре арифметических, геометрических, алгебраической, номинальной моделей строится представление системы действительных чисел с фундаментальными свойствами континуальности, непрерывности, с построением вывода об эквивалентности моделей  $\mathbb{R}_1 \equiv \mathbb{R}_2 \equiv \mathbb{R}_3 \equiv \mathbb{R}_4 \equiv \mathbb{R}_5 \equiv \mathbb{R}_6$ ;

д) в процедуре аксиоматизации системы действительных чисел на базе ее моделей фиксируются аксиомы расширения системы рациональных чисел, алгебраической структуры линейно-упорядоченного поля, аксиома непрерывности либо ее эквиваленты;

Теория действительных чисел строится как содержательная (не абстрактная):

- в непрерывной арифметической модели  $\mathbb{R}_1$  конечных или бесконечных десятичных дробей устанавливается несчетность (континуальность) действительных чисел, свойство непрерывности характеризуется в форме сходимости бесконечной системы вложенных отрезков с рациональными концами;

- в дискретной арифметической модели  $\mathbb{R}_2$  формируется приближенная (округленная) форма действительного числа, вводится система операций, отношение порядка, используемые впоследствии в математической деятельности, в приложениях;

- в линейной геометрической модели  $\mathbb{R}_3$  в форме числовой прямой осуществляется визуализация непрерывной арифметической модели, арифметических операций, отношения порядка, свойство непрерывности;

- в периодической геометрической модели  $\mathbb{R}_5$  формируется представление о свойстве периодичности изображения точек  $M(t)=M(t+2k\pi)$ ;

- в номинальной модели  $\mathbb{R}_6$  выделяются символы конкретных действительных чисел



Рис. 4. Интеграция теории действительных чисел и её моделей.

	Теория натуральных чисел и её модели	Теория целых чисел и её модели	Теория рациональных чисел и её модели	Теория действительных чисел и её модели
Фундаментальные основы	<p>Исследуется категория числа на разных уровнях модельного представления числового пространства в системе его теоретических закономерностей.</p> <p>Числовые системы – абстрактные множества объектов с операциями и отношением порядка, сконструированные в аксиоматическом подходе на базе систем аксиом кольца, поля.</p> <p>Теория натуральных чисел базируется на абстрагировании фундаментальных процедур счета и измерения, основана на представлениях геометрической и арифметической моделей, в системе аксиом отражает фундаментальные свойства моделей.</p> <p>Теория каждой из систем целых, рациональных, действительных чисел развивается как абстрактная алгебраическая, наследующая систему аксиом теории натуральных чисел.</p> <p>В модельно-теоретическом подходе к конструированию, исследованию теорий числовых систем реализуется преемственная связь расширяющихся моделей, алгебраических структур, фундаментальных свойств.</p> <p>Система адекватных моделей каждой из теорий числовых систем отражает спектр различных представлений числа, операций, отношений, способы приложения числовых систем в математической деятельности, в многочисленных приложениях.</p>			
Фундаментальные свойства	<p>Конечности, бесконечности, счетности, континуальности;  алгебраической структуры, упорядоченности;  дискретности, плотности, непрерывности;  рациональности и иррациональности;  алгебраичности и трансцендентности;  теоретического и модельного конструирования;  изоморфного включения.</p>			
Базовые модели.	<p>Система геометрических моделей систем натуральных, целых, рациональных, действительных чисел в содержании процедур расширения.</p> <p>Система арифметических моделей натуральных, целых, рациональных, действительных чисел в расширении представлений, свойств, оперирования, приложений.</p> <p>Система алгебраических моделей целых, рациональных, действительных чисел в представлении чисел классами эквивалентности, оперировании на классах, в содержании изоморфного включения.</p>			

Рис. 5. Математическая картина мира в числовых системах.

В теории действительных чисел фиксируется «эффект ограничений точности измерения»: в системах натуральных, целых, рациональных чисел, измерение величины – неточное (приблизительное) в силу дискретности; в системе действительных чисел измерение величин – точное, но действительные числа – результаты измерения – могут быть зафиксированы лишь приближенно.

Интеграция числовых систем. Анализ классов объектов, систем аксиом, фундаментальных свойств, базовых моделей показывает, что каждая из теорий числовых

систем  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  - самостоятельная современная математическая теория. Однако их основным свойством выступает преемственная связь, выраженная:

- в исследовании одной категории – понятие числа – на различных уровнях его становления;

- в развёртывании теорий как алгебраических, т.е. как абстрактных, в содержании аксиоматического метода, в конкретной алгебраической структуре (полукольца, кольца, поля, непрерывного поля);

- в наследовании свойств арифметических операций, отношений через общую всем теориям систему аксиом теории натуральных чисел;

- в наличии системы геометрических, арифметических моделей, наследующих свойство предыдущих.

Преемственная связь теорий числовых систем обосновывает «механизм наследования» моделей:

- геометрическая модель теории натуральных чисел в процедуре «загущения» симметрией, делением единицы измерения превращается в последовательные модели теории целых, рациональных чисел, линейную и периодическую геометрические модели системы действительных чисел.

- представление числа в систематической записи по степеням основания  $q=10$  системы счисления (от положительных до отрицательных, от конечной записи до бесконечной) приводит к последовательности расширяющихся арифметических моделей с условием включения

$$\mathbf{N} \leq \mathbf{Z} \leq \mathbf{Q} \leq \mathbf{R}$$

- последовательность алгебраических моделей теории целых, рациональных, действительных чисел не обладает свойством прямого расширения, однако, наследование числовых систем здесь имеет форму изоморфного включения, т.е.  $\mathbf{N} \simeq \mathbf{N}_0 \leq \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}_0 \leq \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \simeq \mathbf{Q}_0 \leq \mathbf{R}$ .

Фактически, преемственная связь теорий каждой из числовых систем обосновывает построение их расширяющихся геометрических, арифметических моделей, механизм наследования алгебраических моделей, соответствие свойств, объектов, операций, отношений в теории и её моделях.

Структурно-содержательный анализ числового пространства в сочетании абстрактно-алгебраического и адекватных модельных представлений методологии развития числовых систем общеобразовательного курса математики с соответствующими теоретико-числовыми представлениями интегрируется в общее фундаментальное представление теорий и адекватных моделей каждой из числовых систем – «числовую картину мира» учебной математической деятельности (Рис. 5).

### Список литературы

1. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел / И.К. Андронов. М.: Просвещение, 1979. 158с.
2. Бескин Н.М. Аксиоматический метод / Математика в школе. 1993, №3. с.25-29. №4. с.48-54.
3. Дедекин Р. Непрерывность и иррациональные числа / Р. Дедекин. Пер. с нем. / Под ред. проф. С.О. Шатуновского. Одесса, 1923. 44с.
4. Горбачев В.И. Развитие аксиоматического метода в содержании общеобразовательного курса математики / Вестник Калужского университета. 2009. № 3. с.31-38.
5. Горбачев В.И. Развитие аксиоматического метода в содержании общеобразовательного курса математики (алгебра, теория меры) // Вестник Калужского университета. 2009. №4. с.59-65.

6. Горбачев В.И. Теория числовых систем в методологии теоретического типа мышления (общее представление числового пространства, теория) // Вестник Калужского университета, 2016. №2. С.37-45
7. Горбачев В.И. Методология математической картины мира в числовых системах общеобразовательного курса математики // Ученые записки Брянского государственного университета: физико-математические науки/ биологические науки/ ветеринарные науки. №1 (2016). Брянск: РИО БГУ. 2016. С. 9 – 22. Точка доступа: <http://scim-brgu.ru>
8. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2х томах. Т. I Арифметика. Алгебра. Анализ/ Ф. Клейн. Пер. с нем. / Под ред. В.Г. Болтянского. 4-е изд.- М.: Наука. 1987. 432 с.
9. Колмогоров А.Н. Натуральные числа / Математика в школе, 1969, №5, с. 8-17. Обобщение понятия числа. Неотрицательные рациональные числа // Математика в школе. 1970. № 2. с. 27- 32.
10. Курдюмова Н.А. Формальное и интуитивное в процессе развития понятия числа / Математика в школе. 1994. №4. с.73-77.
11. Ньютон И. Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе / М.: Изд-во АН СССР. 1948. 448с.
12. Маркушевич А.И. Символ бесконечности и его употребление в математике / Математика в школе. 1948. №1. с. 1-11.
13. Мордкович А.Г. Новая концепция школьного курса алгебры // Математика в школе. 1996. № 6. С. 28-33.

#### Сведения об авторах

Горбачев Василий Иванович – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, Заслуженный учитель Российской Федерации – директор естественно-научного института Брянского государственного университета имени акад. И.Г. Петровского. E-mail: [enibgu@mail.ru](mailto:enibgu@mail.ru).

## INTEGRATION OF THE THEORY OF NUMERICAL SYSTEMS IN A NUMERIC PICTURE OF THE WORLD

V.I. Gorbachev

Bryansk State University

The content and learning mathematic activity projection are analyzed during study of the numeral system theory and models in methodology of developmental teaching.

**Keywords:** *Developmental teaching theory, learning mathematic activity methods, theory of numeral system.*

#### References

1. Andronov I. K. Mathematics real and complex numbers / by I. K. Andronov. M.: Education. 1979. 158с.
2. Beskin N. M. Axiomatic method / Mathematics in school. 1993. No. 3. pp. 25-29. No. 4. pp. 48-54.
3. Dedekind R. Continuity and irrational numbers / Under the editorship of Professor S. O. Shatunovsky. Odessa. 1923. 44С.
4. Gorbachev V. I. the Development of the axiomatic method in the content of secondary mathematics / Herald of the Kaluga University. 2009. No. 3. pp. 31-38.
5. Gorbachev V. I. the Development of the axiomatic method in the content of secondary mathematics (algebra, measure theory // journal of Kaluga University. 2009. No. 4. pp. 59-65.

6. Gorbachev V. I. the Theory of numerical systems in the methodology of theoretical thinking (a common representation of the numeric space theory // journal of Kaluga University. 2016. No. 2. P. 37-45

7. Gorbachev V. I. Methodology of mathematical picture of the world in a numerical system of General education course in mathematics// proceedings of the Bryansk state University physical and mathematical Sciences/ biological Sciences/ veterinary science. No. 1 (2016). Bryansk: RIO BSU, 2016. С. 9 – 22 ... the access Point: <http://scim-brgu.ru>

8. Klein F. Elementary mathematics from the point of view of higher: In 2 volumes. So I Arithmetic. Algebra. Analysis. 4-e Izd. M.: Nauka, 1987. 432 p.

9. Kolmogorov A. N. Natural numbers/ Mathematics in school, 1969, no. 5,pp. 8-17. A generalization of the concept of number. Nonnegative rational numbers // Mathematics in school. 1970. No. 2. pp. 27 - 32.

10. Kurdyumova N. The formal and the intuitive in the process of development of the concept of number / Mathematics in school. 1994. №4. pp. 73-77.

11. Newton I. the universal arithmetic or a book on arithmetic synthesis and analysis / Newton. M.: Izd-vo an SSSR. 1948. 448 p.

12. Markushevich A. I. infinity Symbol, and its use in mathematics / Mathematics in school. 1948. no. 1. pp. 1-11.

13. Mordkovich, A. G. New concept of school course of algebra // Mathematics at school. – 1996. – No. 6. – S. 28-33.

#### **About author**

Gorbachev V.I. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, doctor of pedagogical sciences, professor, honored teacher of the Russian Federation - the director of science Institute of Bryansk State University, e-mail: [enibgu@mail.ru](mailto:enibgu@mail.ru).

УДК 519.6

## О НОВОМ ПОДХОДЕ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.В. Трубников

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Предлагается новый подход к численному решению нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** численные методы; краевые задачи; обыкновенные дифференциальные уравнения.

В 2008 году был предложен новый подход к численному решению линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2 порядка [1], а в 2011 году был разработан новый подход к численному решению линейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Для представления приближенного решения краевых задач использовались эрмитовы локальные сплайны. В данной работе вниманию читателей предлагается новый подход к численному решению нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2 порядка идейно тесно связанный с подходами, описанными ранее.

Рассматривается первая краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (2)$$

где  $a, b$  ( $a < b$ ),  $\alpha, \beta$  - заданные постоянные,  $f(x, y, z)$  - заданная непрерывно дифференцируемая функция и такая, что краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, которое мы в дальнейшем будем называть точным решением и обозначать  $y(x)$ .

Для построения приближенного решения этой краевой задачи сделаем замену переменных. Зададим натуральное число  $m$  и введем вещественную величину

$$h = \frac{b-a}{m}. \quad (3)$$

Введем новую переменную  $t$ :

$$x = a + \frac{b-a}{m} \cdot t = a + h \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{x-a}{b-a} \cdot m = \frac{x-a}{h}, \quad (4)$$

и функцию

$$u(t) = y(a + h \cdot t) \Leftrightarrow y(x) = u\left(\frac{x-a}{h}\right). \quad (5)$$

Преобразуем краевую задачу (1), (2), используя новые переменные  $t$  и  $u$ , и получим следующую краевую задачу:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + h^2 f\left(a + ht, u, \frac{1}{h} \frac{du}{dt}\right) = 0, \quad t \in [0, m], \quad (6)$$

$$u(0) = \alpha, \quad u(m) = \beta, \quad (7)$$

Обозначим точное решение  $u(t)$  краевой задачи (6), (7) связано с точным решением  $y(x)$  краевой задачи (1), (2) отношениями (5).

В работе [3] были введены составные кинематические кривые, задаваемые векторным параметрическим уравнением вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_i(\tau) &= T_0^5(\tau-i+1) \cdot \mathbf{Q}_{0 \ i-1} + T_1^5(\tau-i+1) \cdot \mathbf{Q}_{1 \ i-1} + T_2^5(\tau-i+1) \cdot \mathbf{Q}_{2 \ i-1} + \\ &+ T_3^5(\tau-i+1) \cdot \mathbf{Q}_{2 \ i} + T_4^5(\tau-i+1) \cdot \mathbf{Q}_{1 \ i} + T_5^5(\tau-i+1) \cdot \mathbf{Q}_{0 \ i} = \\ &= \sum_{j=0}^2 T_j^5(\tau-i+1) \cdot \mathbf{Q}_{j \ i-1} + \sum_{j=3}^5 T_j^5(\tau-i+1) \cdot \mathbf{Q}_{5-j \ i}, \text{ при } \tau \in [i-1, i], \ i=1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{Q}_{j \ i}$  - заданные вектора, а

$$\begin{aligned} T_0^5(t) &= 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5, \quad T_1^5(t) = t - 6t^3 + 8t^4 - 3t^5, \quad T_2^5(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^5, \\ T_3^5(t) &= \frac{1}{2}t^3 - t^4 + \frac{1}{2}t^5, \quad T_4^5(t) = -4t^3 + 7t^4 - 3t^5, \quad T_5^5(t) = 10t^3 - 15t^4 + 6t^5. \end{aligned}$$

Обозначим компоненты векторов  $\mathbf{Q}_{j \ i}$  -  $Q_{t \ j \ i}$  и  $Q_{u \ j \ i}$ , а компоненты  $\mathbf{r}(\tau)$  -  $t(\tau)$  и  $u(\tau)$  ( $\mathbf{Q}_{j \ i} = Q_{t \ j \ i} \cdot \mathbf{n}_t + Q_{u \ j \ i} \cdot \mathbf{n}_u$ ,  $\mathbf{r}(\tau) = t(\tau) \cdot \mathbf{n}_t + u(\tau) \cdot \mathbf{n}_u$ ). Здесь  $\mathbf{n}_t$  и  $\mathbf{n}_u$  - единичные орты системы координат  $Otu$ . Тогда

$$\begin{aligned} u(\tau) = u_i(\tau) &= \sum_{j=0}^2 T_j^5(\tau-i+1) \cdot Q_{u \ j \ i-1} + \sum_{j=3}^5 T_j^5(\tau-i+1) \cdot Q_{u \ 5-j \ i}, \text{ при } \tau \in [i-1, i], \ i=1, 2, \dots, m. \\ t(\tau) = t_i(\tau) &= \sum_{j=0}^2 T_j^5(\tau-i+1) \cdot Q_{t \ j \ i-1} + \sum_{j=3}^5 T_j^5(\tau-i+1) \cdot Q_{t \ 5-j \ i}, \text{ при } \tau \in [i-1, i], \ i=1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Приведем некоторые существенные для дальнейшего изложения свойства составной кинематической кривой:

1. Компоненты  $t(\tau)$ ,  $u(\tau)$  векторной функции  $\mathbf{r}(\tau)$  на каждом  $[i-1, i]$  представляют собой интерполяционные многочлены Эрмита 5 порядка с двумя трехкратными узлами интерполяции:  $\tau = i-1$  и  $\tau = i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ). Условия интерполяции для функции  $t(\tau) = t_i(\tau)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} t(i-1) &= Q_{t \ 0 \ i-1}, \quad \frac{dt(i-1)}{d\tau} = Q_{t \ 1 \ i-1}, \quad \frac{d^2t(i-1)}{d\tau^2} = Q_{t \ 2 \ i-1}, \\ t(i) &= Q_{t \ 0 \ i}, \quad \frac{dt(i)}{d\tau} = Q_{t \ 1 \ i}, \quad \frac{d^2t(i)}{d\tau^2} = Q_{t \ 2 \ i}. \end{aligned}$$

Условия интерполяции для функции  $u(\tau) = u_i(\tau)$ :

$$\begin{aligned} u(i-1) &= Q_{u \ 0 \ i-1}, \quad \frac{du(i-1)}{d\tau} = Q_{u \ 1 \ i-1}, \quad \frac{d^2u(i-1)}{d\tau^2} = Q_{u \ 2 \ i-1}, \\ u(i) &= Q_{u \ 0 \ i}, \quad \frac{du(i)}{d\tau} = Q_{u \ 1 \ i}, \quad \frac{d^2u(i)}{d\tau^2} = Q_{u \ 2 \ i}. \end{aligned}$$

2. Векторная функция  $\mathbf{r}(\tau)$  и ее производные  $\mathbf{r}'(\tau)$  и  $\mathbf{r}''(\tau)$  - непрерывны на  $[0, m]$ .

3.  $\mathbf{r}(i) = \mathbf{Q}_{0 \ i}$ ,  $\frac{d\mathbf{r}(i)}{d\tau} = \mathbf{Q}_{1 \ i}$ ,  $\frac{d^2\mathbf{r}(i)}{d\tau^2} = \mathbf{Q}_{2 \ i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ .

4. Если  $Q_{t \ 0 \ i} = i$ ,  $Q_{t \ 1 \ i} = 1$ ,  $Q_{t \ 2 \ i} = 0$  при  $i = 0, 1, \dots, m$ ,

то  $t(\tau) = \tau$  и кинематическая кривая представляет собой график функции, которая является результатом кусочно-многочленной интерполяции многочленами Эрмита 5 порядка:

$$u(t) = u_i(t) = \sum_{j=0}^2 T_j^5(t-i+1) \cdot Q_{u_j i-1} + \sum_{j=3}^5 T_j^5(t-i+1) \cdot Q_{u_{5-j} i}, \text{ при } t \in [i-1, i], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Используем выражение (8) для представления приближенного решения краевой задачи (6), (7). Зададим натуральное число  $m$ . Введем на  $[0, m]$  равномерную сетку точек  $t_i = i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ). Ей соответствует равномерная сетка точек  $x_i = a + h \cdot t_i = a + h \cdot i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) на  $[a, b]$ . Шаги этих сеток равны 1 и  $h$ , соответственно.

Будем искать *непрерывное приближенное решение* задачи Коши (6), (7) в виде интерполяционной функции, задаваемой формулой (8):

$$u_m(t) = \sum_{j=0}^2 T_j^5(t-i+1) \cdot Q_{u_j i-1} + \sum_{j=3}^5 T_j^5(t-i+1) \cdot Q_{u_{5-j} i}, \text{ при } t \in [i-1, i], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Здесь  $Q_{u_j i}$  ( $j = 0, 1, 2; i = 0, 1, \dots, m$ ) – постоянные, полностью определяющие приближенное решение  $u_m(t)$ . График приближенного решения  $u_m(t)$  совпадает с кинематической кривой, задаваемой формулой:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau) = \tau \cdot \mathbf{n}_t + u_m(\tau) \cdot \mathbf{n}_u, \text{ при } \tau \in [i-1, i], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Из первого и четвертого свойств составных кинематических кривых следует, что

$$Q_{u_0 i} = u_m(i), \quad Q_{u_1 i} = \frac{du_m(i)}{dt}, \quad Q_{u_2 i} = \frac{d^2 u_m(i)}{dt^2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Соответствующее *непрерывное приближенное решение*  $y_m(x)$  задачи Коши (1), (2) получим с помощью (5). Таким образом,

$$y_m(x) = u_m\left(\frac{x-a}{h}\right) \Leftrightarrow u_m(t) = y_m(a+ht). \quad (12)$$

Для отыскания значений неизвестных постоянных  $Q_{u_j i}$  ( $j = 0, 1, 2; i = 0, 1, \dots, m$ ) нам потребуется понятие невязки. Невязкой дифференциального уравнения (6) на непрерывном приближенном решении (9) называется функция

$$R_m^u(t) = \frac{d^2 u_m}{dt^2} + h^2 f\left(a+ht, u_m, \frac{1}{h} \frac{du_m}{dt}\right), \quad t \in [0, m] \quad (13)$$

Невязкой дифференциального уравнения (1) на непрерывном приближенном решении (12) называется функция

$$R_m^y(x) = \frac{d^2 y_m}{dx^2} + f\left(x, y_m, \frac{dy_m}{dx}\right), \quad x \in [a, b]. \quad (14)$$

Несложно показать, что

$$R_m^y(x) = \frac{1}{h^2} R_m^u\left(\frac{x-a}{h}\right), \quad x \in [a, b], \quad (15)$$

$$R_m^u(t) = h^2 \cdot R_m^y(a+ht), \quad t \in [0, m], \quad (16)$$

Наряду с непрерывными приближенными решениями  $u_m(t)$  и  $y_m(x)$  краевых задач (6), (7) и (1), (2) можно рассматривать и *сеточные приближенные решения*. В самом деле, согласно (11) и (12), величины  $Q_{u_0 i} = u_m(i) = y_m(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ). Поэтому их можно интерпретировать как компоненты приближенного сеточного решения задачи (6), (7), а так же и задачи (1), (2). Из (11) и (12) также следует, что  $Q_{u_1 i}$  и  $Q_{u_2 i}$  можно интерпретировать как компоненты сеточных аппроксимаций первой и второй производной точного решения

задачи (6), (7). А множество  $\{(Q_{u0i}, Q_{u1i}, Q_{u2i}) : i=0,1,\dots,m\}$  можно интерпретировать как *обобщенное сеточное приближенное решение* задачи (6), (7).

С другой стороны, непрерывное приближенное решение  $u_m(t)$  задачи (6), (7) можно интерпретировать как результат кусочно-многочленной интерполяции обобщенного сеточного решения.

Из определений невязок (13) и (14) следует, что непрерывные приближенные решения  $u_m(t)$  и  $y_m(x)$  краевых задач (6), (7) и (1), (2) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2 u_m}{dt^2} + h^2 f\left(a + ht, u_m, \frac{1}{h} \frac{du_m}{dt}\right) = R_m^u(t), \quad t \in [0, m], \quad (17)$$

$$\frac{d^2 y_m}{dx^2} + f\left(x, y_m, \frac{dy_m}{dx}\right) = R_m^y(x), \quad x \in [a, b]. \quad (18)$$

Граничные условия для этих дифференциальных уравнений выберем такие же, как и для точных решений:

$$u_m(0) = \alpha, \quad u_m(m) = \beta, \quad (19)$$

$$y_m(a) = \alpha, \quad y_m(b) = \beta. \quad (20)$$

Таким образом, непрерывное приближенное решение  $u_m(t)$  краевой задачи (6), (7) удовлетворяет краевой задаче (17), (19), а непрерывное приближенное решение  $y_m(x)$  краевой задачи (1), (2) удовлетворяет краевой задаче (18), (20). Введем погрешности непрерывных приближенных решений  $u_m(t)$  и  $y_m(x)$  как функции  $\varepsilon_m^u(t)$  и  $\varepsilon_m^y(x)$ , определенные на соответствующих отрезках интегрирования:

$$\varepsilon_m^u(t) = u_m(t) - u(t), \quad t \in [0, m], \quad (21)$$

$$\varepsilon_m^y(x) = y_m(x) - y(x), \quad x \in [a, b]. \quad (22)$$

Из (5) и (12) следует, что

$$\varepsilon_m^y(x) = \varepsilon_m^u\left(\frac{x-a}{h}\right), \quad x \in [a, b], \quad (23)$$

$$\varepsilon_m^u(t) = \varepsilon_m^y(a + ht), \quad t \in [0, m]. \quad (24)$$

Вычитая из уравнения (17) уравнение (6) и учитывая краевые условия (19), и (7), получим краевую задачу для погрешности  $\varepsilon_m^u(t)$ :

$$\frac{d^2 \varepsilon_m^u}{dt^2} + h^2 \left( f\left(a + ht, u_m, \frac{1}{h} \frac{du_m}{dt}\right) - f\left(a + ht, u_m - \varepsilon_m^u, \frac{1}{h} \left(\frac{du_m}{dt} - \frac{d\varepsilon_m^u}{dt}\right)\right) \right) = R_m^u(t), \quad t \in [0, m], \quad (25)$$

$$\varepsilon_m^u(0) = 0, \quad \varepsilon_m^u(m) = 0. \quad (26)$$

Вычитая из уравнения (18) уравнение (1) и учитывая краевые условия (20), и (2), получим краевую задачу для погрешности  $\varepsilon_m^y(x)$ :

$$\frac{d^2 \varepsilon_m^y}{dx^2} + \left( f\left(x, y_m, \frac{dy_m}{dx}\right) - f\left(x, y_m - \varepsilon_m^y, \left(\frac{dy_m}{dx} - \frac{d\varepsilon_m^y}{dx}\right)\right) \right) = R_m^y(x), \quad x \in [a, b], \quad (27)$$

$$\varepsilon_m^y(a) = 0, \quad \varepsilon_m^y(b) = 0. \quad (28)$$

Наряду с погрешностью непрерывного решения введем погрешности компонент обобщенного сеточного решения

$$\varepsilon_{m0i}^u = Q_{u0i} - u(i) = Q_{u0i} - y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (29)$$

$$\varepsilon_{m1i}^u = Q_{u1i} - \frac{du(i)}{dt} = Q_{u1i} - h \frac{dy(x_i)}{dx}, \quad i=0,1,\dots,m, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{m2i}^u = Q_{u2i} - \frac{d^2u(i)}{dt^2} = Q_{u2i} - h^2 \frac{d^2y(x_i)}{dx^2}, \quad i=0,1,\dots,m. \quad (31)$$

Погрешности введенных непрерывных приближенных решений и компонент приближенного сеточного решения связаны очевидными соотношениями:

$$\varepsilon_m^u(i) = \varepsilon_m^y(a+hi) = \varepsilon_{m0i}^u, \quad i=0,1,\dots,m. \quad (32)$$

Пусть на множестве функций  $w(x)$  (определенных на  $[a,b]$ ), к которому принадлежат  $y(x)$ ,  $y_m(x)$  и  $\varepsilon_m^y(x)$ , введена норма  $\|w\|_{Y_x}$ .

Пусть на множестве функций  $\psi(x)$  (определенных на  $[a,b]$ ), к которому принадлежат  $\frac{d^2y(x)}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2y_m(x)}{dx^2}$  и  $R_m^y(x)$ , введена норма  $\|\psi\|_{F_x}$ .

Пусть существует такое  $\Delta > 0$ , что для любой функции  $R(x)$ , удовлетворяющей неравенству  $\|R\|_{F_x} \leq \Delta$ , краевая задача

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} + f\left(x, \hat{y}, \frac{d\hat{y}}{dx}\right) = R(x), \quad x \in [a,b], \quad (33)$$

$$\hat{y}(a) = \alpha, \quad \hat{y}(b) = \beta, \quad (34)$$

имеет единственное решение  $\hat{y}(x)$ .

Будем называть линейную краевую задачу (1), (2) *устойчивой по дифференциальному уравнению на пространствах*  $(Y_x, F_x)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любой функции  $R(x)$ , удовлетворяющей условию  $\|R\|_{F_x} < \delta$ , будет выполнено неравенство

$$\|\hat{y} - y\|_{Y_x} \leq \varepsilon. \quad (35)$$

### Теорема 1

Если краевая задача (1), (2) устойчива по дифференциальному уравнению и  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|R_m^y(x)\|_{F_x} = 0$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varepsilon_m^y(x)\|_{Y_x} = 0$ .

*Доказательство:* Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . В соответствии с определением устойчивости подберем соответствующее  $\delta > 0$ . Так как  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|R_m^y(x)\|_{F_x} = 0$ , для выбранного значения  $\delta$  найдется натуральное число  $M$  такое, что для всех  $m > M$  будет выполнено:  $\|R_m^y\|_{F_x} < \delta$ . Заметим, что краевая задача (33), (34) совпадает с задачей (18), (20), если  $R(x) = R_m^y(x)$ . Положим  $R(x) = R_m^y(x)$ . При  $m > M$  выполняется неравенство:  $\|R\|_{F_x} = \|R_m^y\|_{F_x} < \delta$ . Тогда из определения устойчивости краевой задачи (1), (2) следует, что, существует единственное решение задачи (33), (34),  $\hat{y}(x)$ . Но задача (18), (20) совпадает с задачей (33), (34) и их единственные решения тоже совпадают:  $\hat{y}(x) = y_m(x)$ . А в силу устойчивости краевой задачи (1), (2) по дифференциальному уравнению, должно выполняться неравенство (35). Подставляя туда равенство  $\hat{y}(x) = y_m(x)$ , получим:

$$\|y_m - y\|_{Y_x} \leq \varepsilon. \quad (36)$$

Из неравенства (36) непосредственно следует доказываемое утверждение.

*Теорема 2*

Пусть на  $[a, b]$  невязка  $R_m^y(x)$  удовлетворяет условию Липшица и при каждом значении  $m$  на этом отрезке задана сетка точек  $\{x_j^m | j = 0, 1, \dots, k_m\}$ , покрывающая  $[a, b]$ , а расстояние от любой точки  $[a, b]$  до ближайшего узла сетки не превышает положительной постоянной  $h_m$ , причем  $h_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Пусть значения неизвестных постоянных  $Q_{u j i}$  при каждом натуральном значении  $m$ , единственным образом определяются из условий обнуления невязки в узлах сетки

$$R_m^y(x_j^m) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k_m. \quad (37)$$

Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |R_m^y(x)| = 0. \quad (38)$$

*Доказательство:* Зафиксируем произвольное натуральное значение  $m$ . Модуль невязки  $|R_m^y(x)|$  также удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, является непрерывной и ограниченной функцией на  $[a, b]$  и имеет максимум на этом отрезке. Обозначим константу Липшица для модуля невязки  $L$ . Пусть  $x^*$  - одна из точек максимума модуля невязки, а  $x_j^m$  - ближайший узел сетки, в котором модуль невязки обращается в 0. Расстояние между этими точками

$$|x_j^m - x^*| \leq h_m. \quad (39)$$

Запишем условие Липшица для модуля невязки:

$$|R_m^y(x^*) - R_m^y(x_j^m)| \leq L \cdot |x^* - x_j^m|. \quad (40)$$

Учитывая (39), а также то, что  $|R_m^y(x^*)| = \max_{x \in [a, b]} |R_m^y(x)|$ ,  $|R_m^y(x_j^m)| = 0$ , из (40) получим:

$$\max_{x \in [a, b]} |R_m^y(x)| \leq L \cdot h_m \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Отсюда следует утверждение нашей теоремы.

Из сходимости приближенного непрерывного решения к точному непрерывному решению следует, очевидно, сходимость приближенного сеточного решения к точному сеточному решению.

При достаточной степени гладкости точного решения краевой задачи, позволяющей использовать оценку погрешности интерполяции, будет справедливо и обратное утверждение.

Исходя из описанных выше соображений, можно сформулировать общий принцип постановки условий для определения неизвестных величин  $Q_{u j i}$ , которые могли бы (в определенных условиях) обеспечить сходимость непрерывного приближенного решения краевой задачи  $u_m(x)$  к точному решению  $u(x)$  при  $m \rightarrow \infty$ . В условиях теоремы 1 – эти условия должны обеспечивать предельное обнуление невязки:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|R_m^y(x)\|_{F_x} = 0$ . А в условиях теорем 1 и 2 можно использовать условия обнуления невязки в узлах сетки (37).

Аналогично формулируется принцип предельного обнуления невязки и условия обнуления невязки в узлах сетки для краевой задачи (6), (7).

Пусть на множестве функций  $v(t)$  (определенных на  $[0, m]$ ), к которому принадлежат  $u(t)$ ,  $u_m(t)$  и  $\varepsilon_m^u(t)$ , введена норма  $\|v\|_{U_t}$ .

Пусть на множестве функций  $\varphi(t)$  (определенных на  $[0, m]$ ), к которому принадлежат  $\frac{d^2u(t)}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2u_m(t)}{dt^2}$  и  $R_m^u(t)$ , введена норма  $\|r\|_{F_t}$ .

Сформулируем без доказательства аналоги теорем 1 и 2 для задачи (6), (7).

*Теорема 3 (первый аналог теоремы 1)*

Если для любого натурального  $m$  краевая задача (6), (7) устойчива по дифференциальному уравнению и  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|R_m^u(t)\|_{F_t} = 0$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varepsilon_m^u(t)\|_{U_t} = 0$ .

*Теорема 4 (второй аналог теоремы 1)*

Если для любого натурального  $m$  краевая задача (1), (2) устойчива по дифференциальному уравнению и  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{h^2} R_m^u \left( \frac{x-a}{h} \right) \right\|_{F_x} = 0$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \varepsilon_m^u \left( \frac{x-a}{h} \right) \right\|_{Y_x} = 0$ .

*Теорема 5 (аналог теоремы 2)*

Пусть на  $[a, b]$  функция  $\frac{1}{h^2} R_m^u \left( \frac{x-a}{h} \right)$  удовлетворяет условию Липшица и при каждом значении  $m$  на отрезке  $[0, m]$  задана сетка точек  $\{t_j^m | j = 0, 1, \dots, k_m\}$ , покрывающая  $[0, m]$ , а расстояние от любой точки  $[0, m]$  до ближайшего узла сетки, умноженное на  $h$ , не превышает положительной постоянной  $h_m$ , причем  $h_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Пусть значения неизвестных постоянных  $Q_{u j i}$  при каждом натуральном значении  $m$ , единственным образом определяются из условий обнуления невязки в узлах сетки

$$R_m^u(t_j^m) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k_m. \tag{42}$$

Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} \left\| \frac{1}{h^2} R_m^u \left( \frac{x-a}{h} \right) \right\| = 0. \tag{43}$$

В условиях теорем 3, 4 – условия, из которых определяются компоненты приближенного сеточного решения, должны обеспечивать предельное обнуление невязки:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{h^2} R_m^u \left( \frac{x-a}{h} \right) \right\|_{F_x} = 0. \text{ А в условиях теорем 3, 4 и 5 можно использовать условия}$$

обнуления невязки в узлах сетки (42).

Приведём пример построения вычислительной схемы на основе доказанных принципов и условий сходимости.

Зададим последовательность значений параметра  $m$ , например:

$$m_k = 3^k, \quad k = 0, 1, \dots, K. \tag{44}$$

Для каждого значения  $k$  и  $m = m_k$  введем непрерывные приближенные решения  $u_{m_k}(t)$  и  $y_{m_k}(x)$  краевых задач (6), (7) и (1), (2), определяемые по формулам (9) и (12):

$$u_{m_k}(t) = \sum_{j=0}^2 T_j^5(t-i+1) \cdot Q_{u j i-1}^k + \sum_{j=3}^5 T_j^5(t-i+1) \cdot Q_{u 5-j i}^k \quad \text{при } t \in [i-1, i], \quad i = 1, 2, \dots, m_k, \tag{45}$$

$$y_{m_k}(x) = u_{m_k} \left( \frac{x-a}{h_k} \right). \tag{46}$$

Здесь

$$h_k = \frac{b-a}{m_k} = \frac{b-a}{3^k}. \quad (47)$$

Непрерывные приближенные решения полностью определяются обобщенным приближенным сеточным решением с компонентами  $Q_{u^k j i}^k$  ( $j=0,1,2$ ;  $i=0,1,\dots,m_k$ ). Компоненты  $Q_{u^k 0 0}^k$  и  $Q_{u^k 0 m_k}^k$  будем определять точно, используя граничные условия (7) и свойства (11):

$$Q_{u^k 0 0}^k = u_{m_k}(0) = u(0) = \alpha, \quad Q_{u^k 0 m_k}^k = u_{m_k}(m) = u(m) = \beta. \quad (48)$$

Для определения остальных компонент обобщенного сеточного решения сформулируем условия, аналогичные условию (42). Потребуем, чтобы на каждом  $[i-1, i]$  ( $i=1,2,\dots,m_k$ ) выполнялись условия:

$$R_{m_k}^u(i-1) = 0, \quad (49)$$

$$R_{m_k}^u(i) = 0. \quad (50)$$

Учитывая определение невязки и свойства (11), условия (49) и (50) можно записать в виде

$$Q_{u^k 2 i-1}^k = -h_k^2 f\left(a + h_k(i-1), Q_{u^k 0 i-1}^k, \frac{1}{h_k} Q_{u^k 1 i-1}^k\right), \quad (51)$$

$$Q_{u^k 2 i}^k = -h_k^2 f\left(a + h_k i, Q_{u^k 0 i}^k, \frac{1}{h_k} Q_{u^k 1 i}^k\right). \quad (52)$$

Формулы (48), (51), (52) сводят вычисление приближенных решений к определению компонент  $Q_{u^k 0 i}^k$  ( $i=1,2,\dots,m_k-1$ ) и  $Q_{u^k 1 i}^k$  ( $i=0,1,\dots,m_k$ ). Для определения этих компонент приближенного сеточного решения потребуем, чтобы на каждом  $[i-1, i]$  ( $i=1,2,\dots,m_k$ ) выполнялись условия, аналогичные (42):

$$R_{m_k}^u\left(i - \frac{2}{3}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_k, \quad (53)$$

$$R_{m_k}^u\left(i - \frac{1}{3}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_k. \quad (54)$$

Уравнения (53) и (54) нелинейные. Получить точные решения системы (48), (53), (54) в общем виде невозможно. Поэтому мы заменим требования (53) и (54) эквивалентным требованием минимизации функции:

$$\begin{aligned} \Psi(Q_{u^k 1 0}^k, Q_{u^k 0 1}^k, Q_{u^k 1 1}^k, Q_{u^k 0 2}^k, Q_{u^k 1 2}^k, \dots, Q_{u^k 0 m_k-1}^k, Q_{u^k 1 m_k-1}^k, Q_{u^k 1 m_k}^k) = \\ = \sum_{i=1}^{m_k} \left( \left( R_{m_k}^u\left(i - \frac{2}{3}\right) \right)^2 + \left( R_{m_k}^u\left(i - \frac{1}{3}\right) \right)^2 \right) \rightarrow \min = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Решать задачу минимизации можно приближенно, с помощью модифицированного метода покоординатного спуска, на каждом шаге которого можно использовать, например, метод парабол [4].

Для реализации описанной вычислительной схемы необходимы начальные приближения для неизвестных компонент приближенного сеточного решения. Их можно достаточно легко получить при  $k=0$ . А для всех последующих значений  $k=1,2,\dots,K$  начальные приближения для неизвестных компонент приближенного сеточного решения  $Q_{u^k 0 i}^k, Q_{u^k 1 i}^k$  можно получать с помощью приближенного решения  $u_{m_{k-1}}(t)$ , полученного на предыдущем шаге.

Для получения оценки погрешности получаемых приближенных решений можно воспользоваться следующими соображениями. Погрешности непрерывных решений  $\varepsilon_m^y(x)$  и  $\varepsilon_m^u(t)$  являются решениями краевых задач (27), (28) и (25), (26), соответственно. Для их получения необходимо решить эти задачи. Но задача (27), (28) совпадает с задачей (1), (2), если положить  $\alpha = \beta = 0$ , и для другой функции  $f$ . Поэтому для определения  $\varepsilon_m^y(x)$  можно использовать, например, описанный выше численный метод. Можно и упростить задачу (27), (28), линеаризовав уравнение (27):

$$\frac{d^2 \varepsilon_m^y}{dx^2} + \frac{\partial f\left(x, y_m(x), \frac{dy_m(x)}{dx}\right)}{\partial z} \frac{d\varepsilon_m^y}{dx} + \frac{\partial f\left(x, y_m(x), \frac{dy_m(x)}{dx}\right)}{\partial y} \varepsilon_m^y = R_m^y(x), \quad x \in [a, b], \quad (56)$$

$$\varepsilon_m^y(a) = 0, \quad \varepsilon_m^y(b) = 0. \quad (57)$$

Эту линейную краевую задачу можно решать методом, описанным в работе [1].

В заключение можно заметить, что описанный в работе общий подход численного решения нелинейных краевых задач позволяет строить различные вычислительные схемы. Кроме того, в работе рассмотрена первая краевая задача, но совершенно аналогично можно рассмотреть решение второй и третьей краевых задач.

#### Список литературы

1. Трубников С.В. О новом подходе к численному решению линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Брянского государственного технического университета. №3. Брянск: БГТУ, 2008. С. 128-137.
2. Трубников С.В. О новом подходе к построению численных методов решения линейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе эрмитовых сплайнов // Вестник Брянского государственного университета. №4 (2011) Точные и естественные науки. Брянск: РИО БГУ, 2011. С. 48-54.
3. Трубников С. В. О новом подходе к построению численных методов решения одномерных задач Коши на основе эрмитовой кусочно-многочленной интерполяции. // Вестник Брянского государственного университета. №4(2006): Естественные и точные науки. Брянск: РИО БГУ, 2006.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

#### Сведения об авторе

Трубников Сергей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и прикладной математики Брянского государственного университета имени акад. И.Г. Петровского, e-mail: serg.trubnikov@yandex.ru.

#### ABOUT THE NEW APPROACH TO THE NUMERICAL SOLUTIONS FOR NONLINEAR BOUNDARY PROBLEM FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.V. Trubnikov

Bryansk State University

The new approach to the numerical solutions for nonlinear boundary problem for the ordinary differential equations is proposed.

**Keywords:** numerical methods; boundary problems; the ordinary differential equations.

### References

1. Trubnikov S.V. A new approach to the numerical solution of linear boundary value problems for ordinary differential equations of the second order // Herald Bryansk State Technical University. No. 3. Bryansk: BSTU, 2008, pp 128-137.
2. Trubnikov S.V. A new approach to the construction of numerical methods for solving linear boundary value problem for a system of ordinary differential equations on the basis of Hermitian splines. // Herald Bryansk State University. №4 (2011) Natural sciences. Bryansk: RIO BSU, 2011. P. 48-54.
3. Trubnikov S.V. On a new approach to the construction of numerical methods for solving one-dimensional Cauchy problems on the basis of Hermitian piecewise polynomial interpolation. // Herald Bryansk State University. №4 (2006): Natural and exact sciences. Bryansk: RIO BSU 2006.
4. Vasilyev F.P. Numerical methods for solving extreme problems. М.: Nauka, 1980.

### About author

Trubnikov S.V. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, the associate professor, a head of department of computer science and applied mathematics at BSU, e-mail: serg.trubnickov@yandex.ru.

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ БИОЛОГИЯ**

УДК 581.526.425 : (581.9)

**ВЛИЯНИЕ РЕКРЕАЦИОННОГО ФАКТОРА НА ЦЕНОФЛОРУ СОСНЯКА  
ЗЕЛЕНОМОШНО-БРУСНИЧНОГО**

А.Д. Булохов, Д.С. Тужиков

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Под воздействием рекреационного фактора из травяно-кустарничкового яруса выпадают характерные виды ассоциации *Vaccinio vitis-idaeae–Pinetum sylvestris* и союза *Dicrano–Pinion: Orthilia secunda, Goodyera repens, Trientalis europaea, Hylocomium splendens, Pyrola rotundifolia, Lycopodium clavatum, Antennaria dioica, Pulsatilla patens, Trientalis europaea, Hylocomium splendens*. Сокращается обилие и жизненность *Vaccinium vitis-idaea, Vaccinium myrtillus, Fragaria vesca*. Возрастает активность луговых видов: *Agrostis tenuis, Hieracium umbellatum, Phleum pratense, Poa angustifolia, Anthoxanthum odoratum, Veronica chamaedrys, Achillea millefolium, Pilosella officinarum*. Появляются рудеральные виды: *Galeopsis bifida, Berteroa incana, Viola tricolor, Chenopodium album, Polygonum aviculare*. Из древесно-кустарниковой флоры особенно активны *Amelanchier spicata, Sambucus racemosa, Robinia pseudacacia*.

**Ключевые слова:** рекреация, сосновый лес, ассоциация, фитоценотическая активность, Брянская область.

**Введение.** Изменение и деградация лесных сообществ под влиянием рекреации – один из самых распространенных вариантов влияния человека на лесные фитоценозы в пригородных лесах, городских лесопарках, которые активно посещаются отдыхающими. Цель исследования – изучить влияние рекреационного фактора на состав ценофлоры сосновых лесов распространенных вблизи городов и других населенных пунктов.

**Материал и методика исследования.** Описание растительности проведено детально-маршрутным методом в сочетании с работой на ключевых участках. В ходе полевых работ (2014–2016 гг.) было выполнено 62 полных геоботанических описаний сосновых лесов на территории Жуковского и Ржаницкого лесничеств. Сбор геоботанического материала проведен вблизи санатория «Жуковский» и пос. Ржаница (Жуковский р-н). Пробные площади закладывались на различном удалении от населенных пунктов: рядом с поселением (в 40–50 м) и на расстоянии 100–500 м. Был использован стандартный размер пробной площади в 400 м<sup>2</sup>. Оценка количественного участия видов дана по комбинированной шкале Ж. Браун-Бланке (Braun-Blanquet, 1964). Синэкологические режимы (амплитуды) сообществ синтаксонов по влажности, кислотности и обеспеченности азотом почвы определены по оптимальным экологическим шкалам Х. Элленберга (Ellenberg et al., 1992).

**Природные условия района исследования.** Обследованная территория расположена на первой террасе реки Десны. Терраса сформирована мощными песками и супесями. Доминирующий тип почв – дерново-подзолистые песчаные или легко-супесчаные. Это характерные местообитания сосновых лесов. На этой территории А. Д. Булохов и А. И. Соломещ (2003) выделили Снопотско-Ветминско-Болвинский массив елово-сосновых кустарничково-зеленомошных лесов. В долине рек Ветьмы и Десны (в пределах Жуковского р-на) распространены елово-сосновые леса, представляющие союз *Dicrano–Pinion sylvestris* (Libbert 1933) Mat. 1962. Диагностические виды союза: *Pinus sylvestris* (доминант), *Antennaria dioica, Chimaphila umbellata, Calluna vulgaris, Dicranum polysetum, Diphasiastrum complanatum, Festuca ovina, Melampyrum pratense, Monotropa hypopitys, Moneses uniflora, Pyrola chlorantha, Veronica officinalis*. Союз объединяет олиготрофные лишайниковые и ацидофильные моховые сосновые леса. Они широко распространены в Брянской области по террасам реки Десны и ее крупных притоков и представляют собой зонально-азональную

растительность. Обследованный лесной массив активно посещается отдыхающими, изрезан тропами, местами загрязнен бытовым мусором.

**Результаты и обсуждение.** По результатам геоботанического обследования была разработана эколого-флористическая классификации сосновых лесов. В районе обследования широко распространена ассоциация *Vaccinio vitis-idaeae–Pinetum sylvestris* Caj. 1921 (табл.), сообщества которой занимают большие площади в обследованном лесном массиве.

Для выявления влияния рекреационного фактора на состав ценофлоры этой ассоциации в качестве контроля была принята типичная субассоциация *Vaccinio vitis-idaeae–Pinetum typicum*, сообщества которой были описаны на значительном удалении от населенных пунктов, где влияние рекреационного фактора отсутствует или влияние весьма незначительно. Контроль приведен в таблице и обозначен «Тип». Группа сообществ ассоциации, описанных вблизи населенных пунктов (табл.), сравнивалась с контролем.

Ниже дается анализ полученных материалов.

**Ассоциация *Vaccinio vitis-idaeae–Pinetum sylvestris* Caj. 1921 (табл., 1–6)**

Диагностические виды (д. в.) ассоциации: *Pinus sylvestris* (доминант), *Vaccinium myrtillus*, *Vaccinium vitis-idaea*, *Festuca ovina*.

Сообщества ассоциации занимают ровные и слегка возвышенные участки на первой террасе реки Десны на суховатых и свежих (3,0–4,6), кислых (2,3–3,0), бедных минеральным азотом (2,4–2,6) легкосупесчаных почвах. Состав древостоя: 10С Ед. Б. Бонитет II класса. Изредка в составе древостоя встречается ель. Подлесок формируют *Sorbus aucuparia* и *Rubus idaeus*. В травяно-кустарничковом ярусе наблюдается сочетание бореальных и суббореальных видов. Преобладают бореальные виды *Vaccinium myrtillus* и *V. vitis-idaea*. Рассеянно встречаются *Calamagrostis arundinacea*, *Polygonatum odoratum*, *Luzula pilosa*, *Oxalis acetosella*. В травяном покрове константны и неморальные виды *Convallaria majalis*, *Melica nutans*. Моховой ярус мозаичный. В нем на отдельных площадях фон создает *Pleurozium schreberi*. На этом фоне отдельными латками распространены *Dicranum polysetum*, *D. scoparium*, *Ptilium crista-castrensis*. Иногда моховой покров не развит. Общее проективное покрытие варьирует от 35 до 60%. Альфа-разнообразие варьирует от 13 до 36 видов на 400 м<sup>2</sup>.

В пределах ассоциации установлено 5 вариантов (табл., 1–6).

Вариант **типика** собственных диагностических видов не имеет и представляет типичные сообщества ассоциации (табл., «Тип»).

Вариант ***Sorbus aucuparia–Rubus idaeus***. Д. в.: *Sorbus aucuparia*, *Rubus idaeus* (табл., 1). Подлесок пышный высотой до 3 м. Обилие рябины и малины в подлеске отмечено только вблизи санатория. Из-за большой сомкнутости подлеска общее проективное покрытие в травяно-кустарничковом ярусе сокращается до 25%. В нем на отдельных участках доминирует черника. Брусника встречается редко и с небольшим обилием. Константны, но не обильны *Calamagrostis arundinacea*, *Fragaria vesca*, *Convallaria majalis*, *Dryopteris carthusiana*, *Melica nutans*. Альфа-разнообразие варьирует от 13 до 29 видов на 400 м<sup>2</sup>. На ценофлору сообществ синтаксона оказывает большое влияние фактор рекреации. В ценофлоре появляются луговые и синантропные виды: *Agrostis tenuis*, *Veronica chamaedrys*, *Trifolium medium*, *Amelanchier spicata*, *Crataegus curvisepala*, *Galeopsis bifida*. Но их роль в ценофлоре невелика. Они не обильны и встречаются изредка.

Вариант ***Geranium sanguineum***. Д. в.: *Geranium sanguineum*, *Galium mollugo*, *Succisa pratensis*. Влияние рекреации слабое. В сообществах варианта сохраняют свои позиции характерные виды ассоциации. Усиливается роль луговых видов: *Agrostis tenuis*, *Galium mollugo*, *Veronica chamaedrys*.

Вариант ***Agrostis tenuis***. Вариант возникает при высокой рекреационной нагрузке. Диагностические луговые виды: *Agrostis tenuis*, *Phleum pratense*, *Anthoxanthum odoratum*, *Trifolium medium*, *Pilosella officinarum*, *Hypericum perforatum*, *Hieraceum umbellatum* (табл., 3–4). Общее проективное покрытие варьирует от 30 до 70%. Идет олуговение травяно-

кустарничкового яруса. В травостое доминирует *Agrostis tenuis*. Резко сокращается обилие характерных видов ассоциации. Исчезают *Vaccinium myrtillus*, *Ptilium crista-castrensis*, *Dicranum polysetum*, *D. scoparium*. Подлесок не развит. В нем изредка встречается *Sorbus aucuparia*. Появляется группа рудеральных видов: *Chenopodium album*, *Galeopsis bifida*, *Tanacetum vulgare*, *Polygonum aviculare* *Viola tricolor*.

Вариант *Calamagrostis epigeios* (табл., 5). Д. в. *Calamagrostis epigeios*. Опознается по доминированию вейника наземного. Сообщества занимают ровные возвышенные участки. В травяно-кустарничковом ярусе изредка присутствует брусника, но не плодоносит. Исчезают мхи. Лишь мелкими латками иногда встречается *Pleurozium schreberi*. Среднее число видов на 400 м<sup>2</sup> – 14.

Вариант *Amelanchier spicata* (табл., 6). Д. в. *Amelanchier spicata*. В сообществах варианта в подлеске доминирует ирга колосистая. Из-за большой сомкнутости подлеска травяно-кустарничковый ярус неразвит. В нем рассеянно встречаются: *Chelidonium majus*, *Impatiens parviflora*, *Dryopteris carthusiana*, *Oxalis acetosella*. Появляются в кустарничковом ярусе *Robinia pseudacasia*, *Sambucus racemosa*.

Таблица 2

Синоптическая таблица синтаксонов ассоциации *Vaccinio vitis-idaeae–Pinetum sylvestris*

Номера синтаксонов	Ярус	Тип	1	2	2	3	4	5	6
Число описаний		42	7	5	8	6	9	4	22
Среднее число видов в описании		33	20	20	26	20	18	15	14
Д. в. асс. <i>Vaccinio vitis-idaeae–Pinetum sylvestris</i>									
<i>Pinus sylvestris</i>	A	V <sup>5</sup>	V	V	V <sup>5</sup>	V <sup>5</sup>	V <sup>5</sup>	V <sup>5</sup>	V <sup>5</sup>
<i>Vaccinium myrtillus</i>	D	V	V	V <sup>+3</sup>	V <sup>+3</sup>	.	.	I <sup>r</sup>	IV
<i>Vaccinium vitis-idaea</i>	D	V	III <sup>+</sup>	V <sup>+1</sup>	V	III	II	III	II
Вариант <i>Sorbus aucuparia–Rubus idaeus</i>									
<i>Sorbus aucuparia</i>	C	V	V <sup>2-5</sup>	III <sup>r+</sup>	V <sup>+</sup>	IV	II	IV	V
<i>Rubus idaeus</i>	C	I	V <sup>1-2</sup>	III <sup>r+</sup>	V <sup>+</sup>	IV	III	I	IV
Вариант <i>Geranium sanguineum</i>									
<i>Geranium sanguineum</i>	D	I	I	I	V <sup>+</sup>	.	.	.	.
<i>Galium mollugo</i>	D	I	I	II	IV	.	III	.	.
<i>Succisa pratensis</i>	D	I	II	I	IV	.	.	.	.
Вариант <i>Agrostis tenuis</i>									
<i>Agrostis tenuis</i>	D	I	II	IV	IV	V <sup>1</sup>	V <sup>3</sup>	IV	II
<i>Hypericum perforatum</i>	D	I	.	.	.	IV	II	.	.
<i>Hieracium umbellatum</i>	D	I	I	III	.	IV	.	I	.
<i>Phleum pratense</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.
<i>Poa angustifolia</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.
<i>Anthoxanthum odoratum</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.
Вариант <i>Calamagrostis epigeios</i>									
<i>Calamagrostis epigeios</i>	D	.	.	II	.	IV <sup>+</sup>	.	V <sup>3</sup>	.
Вариант <i>Amelanchier spicata</i>									
<i>Amelanchier spicata</i>	C	I	II	III	IV	.	.	.	V <sup>2</sup>
<i>Impatiens parviflora</i>	D	.	.	.	II	.	.	.	IV
<i>Chelidonium majus</i>	D	.	I	I	.	.	.	.	IV
<i>Chamaecytisus ruthenicus</i>	C	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Poa compressa</i>	D	.	.	.	.	II	.	I	.
<i>Trifolium medium</i>	D	I	.	.	.	II	II	.	.
<i>Carex montana</i>	D	I	I <sup>r</sup>	.	I	.	.	.	.
<i>Geranium sylvaticum</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.

Номера синтаксонов	Ярус	Тип	1	2	2	3	4	5	6
<i>Molinia caerulea</i>	D	I	III <sup>r</sup>	I	V <sup>r</sup>	.	.	.	.
<i>Polytrichum commune</i>	E	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Solidago virgaurea</i>	D	IV	II	I	IV	IV	III	II	II
<i>Fragaria vesca</i>	D	III	V	III	IV	V	IV	IV	III

Д. в. союза *Dicrano–Pinion sylvestris* и порядка *Pinetalia sylvestris*

<i>Festuca ovina</i>	D	I	III <sup>r+</sup>	V <sup>r-1</sup>	III	V <sup>3</sup>	V <sup>1</sup>	IV <sup>+</sup>	.
<i>Polygonatum odoratum</i>	D	III	III	II	V	II	II	I	I
<i>Veronica officinalis</i>	D	IV	I	II	III	IV	III	III	II
<i>Ptilium crista-castrensis</i>	E	II	III	.	III	.	.	.	I
<i>Melampyrum pratense</i>	D	III	.	I	I	.	.	.	.
<i>Dicranum polysetum</i>	E	IV	I	I	.	.	.	.	.
<i>Antennaria dioica</i>	D	II	.	.	.	.	.	.	.
<i>Pulsatilla patens</i>	D	II	.	.	.	.	.	.	.

Д. в. класса *Vaccinio–Piceetea*

<i>Picea abies</i>	A	III	.	.	.	.	.	.	.
<i>P. abies</i>	B	V	.	I	I	.	I	.	.
<i>P. abies</i>	C	IV	.	.	.	.	.	.	.
<i>Juniperus communis</i>	C	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Oxalis acetosella</i>	D	III	V	IV	III	II	II	II	IV
<i>Luzula pilosa</i>	D	V	IV	IV	V	II	.	.	IV
<i>Pteridium aquilinum</i>	D	IV	.	I	II	.	.	.	II
<i>Maianthemum bifolium</i>	D	IV	I	I	.	.	.	.	.
<i>Orthilia secunda</i>	D	IV	.	I	I	.	.	.	.
<i>Trientalis europaea</i>	D	IV	.	.	.	.	.	.	.
<i>Goodyera repens</i>	D	III	.	.	.	.	.	.	.
<i>Pyrola rotundifolia</i>	D	II	.	.	.	.	.	.	.
<i>Antennaria dioica</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Calluna vulgaris</i>	D	I	I	.	.	.	.	.	.
<i>Peucedanum oreoselinum</i>	D	I	.	I	I	..	.	.	.
<i>Campanula rotundifolia</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Chimaphila umbellata</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Hypopitys monotropa</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Scorzonera humilis</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Lycopodium clavatum</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Pyrola chlorantha</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Pleurozium schreberi</i>	E	V	IV	III	V	V	II	II	III
<i>Dicranum scoparium</i>	E	IV	.	.	.	.	.	.	.
<i>Hylocomium splendens</i>	E	III	.	.	.	.	.	.	.
<i>Polytrichum juniperinum</i>	E	I	.	.	.	.	.	.	.

Д. в. класса *Carpino–Fagetea*

<i>Quercus robur</i>	A	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Q. robur</i>	B	II	.	.	.	.	.	.	.
<i>Q. robur</i>	C	III	.	F	.	.	.	.	.
<i>Tilia cordata</i>	C	I	I	I	.	.	.	.	.
<i>Malus sylvestris</i> s. l.	B	I	.	.	II	.	.	.	I
<i>Acer platanoides</i>	C	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Corylus avellana</i>	C	IV	.	.	.	.	.	.	.
<i>Euonymus verrucosa</i>	C	II	.	I	.	.	.	.	.

Номера синтаксонов	Ярус	Тип	1	2	2	3	4	5	6
<i>Crataegus curvisepala</i>	C	.	.	II	.	.	.	.	.
<i>Lonicera xylosteum</i>	C	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Convallaria majalis</i>	D	V	IV	IV	V	II	III	IV	IV
<i>Calamagrostis arundinacea</i>	D	IV	V <sup>+</sup>	V <sup>+</sup>	V	II	II	I	II
<i>Dryopteris carthusiana</i>	D	I	IV	IV	IV	II	II	I	III
<i>Carex digitata</i>	D	III	II	II		IV	III	III	II
<i>Melica nutans</i>	D	IV	IV	I	II				II
<i>Poa nemoralis</i>	D			I	III	II	III	.	II
<i>Viola riviniana</i>	D	I	I	I	III	II	II	I	.
<i>Geum urbanum</i>	D	I	I	I	I	III	.	.	III
<i>Carex pilosa</i>	D		II	.	.	.	.	.	.
<i>Asarum europaeum</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Athyrium filix-femina</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Mycelis muralis</i>	D	I	I	.	.	.	.	.	.
<i>Dryopteris filix-mas</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	II
<i>Daphne mezereum</i>	C	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Ajuga reptans</i>	D	I	.	.	I	.	.	.	.
<i>Actaea spicata</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Brachypodium pinnatum</i>	D	I	I	I	.	.	.	.	.
<i>Galium intermedium</i>	D		I	I	I	.	.	.	.
<i>Lilium martagon</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Campanula persicifolia</i>	D	II	I	.	.	.	.	.	.
<i>Clinopodium vulgare</i>	D	I	I	.	II	.	.	.	.
Прочие виды									
<i>Betula pendula</i>	A	IV	.	.	II	.	.	.	.
<i>B. pendula</i>	B	II	.	.	I	.	.	.	.
<i>B. pendula</i>	C	III	.	.	.	.	.	.	.
<i>Frangula alnus</i>	C	II	.	.	I	.	.	.	.
<i>Populus tremula</i>	C	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Robinia pseudacacia</i>	C	.	.	F <sup>r</sup>	.	.	.	.	I
<i>Padus avium</i>	C	.	.	F <sup>r</sup>	.	.	.	.	I
<i>Sambucus racemosa</i>	C	.	.	F <sup>r</sup>	.	.	.	.	I
<i>Fragaria vesca</i>	D	III	III	V	IV	IV	IV	III	III
<i>Veronica chamaedrys</i>	D	II	II	I	IV	III	III	I	.
<i>Achillea millefolium</i>	D	.	.	.	.	III	III	.	.
<i>Pilosella officinarum</i>	D	.	.	.	I	II	II	.	.
<i>Silene nutans</i>	D	.	.	.	.	II	II	.	.
<i>Trifolium medium</i>	D	.	II	II	.	.	.	.	.
<i>Knautia arvensis</i>	D	I	.	.	.	II	II	I	.
<i>Platanthera bifolia</i>	D	III	.	.	.	.	.	.	.
<i>Rubus saxatilis</i>	D	IV	.	.	.	.	.	.	.
<i>Potentilla erecta</i>	D	I	I	.	II	.	.	.	.
<i>Galeopsis bifida</i>	D	.	I	IV		I	III	I	II
<i>Pimpinella saxifraga</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Potentilla erecta</i>	D	I	I	.	.	.	.	.	.
<i>Prunella vulgaris</i>	D	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Sambucus racemosa</i>	C	I	.	.	.	.	.	.	.
<i>Carex hirta</i>	D	.	.	.	.	II	.	.	.

Номера синтаксонов	Ярус	Тип	1	2	2	3	4	5	6
<i>Anthriscus sylvestris</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.
<i>Berteroa incana</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.
<i>Viola tricolor</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.
<i>Tanacetum vulgare</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.
<i>Chenopodium album</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.
<i>Polygonum aviculare</i>	D	.	.	.	.	.	II	.	.

**Заключение.** Анализ ценофлоры синтаксона показывает, что под воздействием рекреационного фактора из травяно-кустарничкового яруса выпадают характерные виды ассоциации *Vaccinio vitis-idaeae–Pinetum sylvestris* и союза *Dicrano–Pinion: Orthilia secunda, Goodyera repens, Trientalis europaea, Hylocomium splendens, Pyrola rotundifolia, Lycopodium clavatum, Antennaria dioica, Pulsatilla patens, Trientalis europaea, Hylocomium splendens*. Сокращается обилие и жизненность *Vaccinium vitis-idaea, Vaccinium myrtillus, Fragaria vesca*.

Возрастает активность луговых видов: *Agrostis tenuis, Anthoxanthum odoratum, Hieracium umbellatum, Phleum pratense, Poa angustifolia, Veronica chamaedrys, Achillea millefolium, Pilosella officinarum*. Появляются в ценофлоре и рудеральные виды: *Galeopsis bifida, Berteroa incana, Viola tricolor, Chenopodium album, Polygonum aviculare* и др. Из древесно-кустарниковой флоры особенно активны *Amelanchier spicata, Sambucus racemosa, Robinia pseudacacia*.

На основе полученных материалов будут разработаны мероприятия по сохранению видового богатства обследованного лесного массива.

#### Список литературы

1. Булохов А. Д., Соломещ А. И. Эколого-флористическая классификация лесов Южного Нечерноземья России. – Брянск: Изд-во БГУ, 2003. 359 с.
2. Braun-Blanquet J. Pflanzensoziologie. 3 Aufl. Wein–N.-Y., 1964. 865 S.
3. Ellenberg H., Weber H. E., Dull R., Wirth V., Werner W., Paulißen D. Zeigewerte von Pflanzen in Mitteleuropa // Scripta Geobotanica. 1992. Vol. 18. 2. Aufl. 258 p.

#### Сведения об авторах

Булохов Алексей Данилович – доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой биологии, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

Тужиков Денис Сергеевич – магистр Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

### INFLUENCE OF THE RECREATIONAL FACTOR ON COWBERRY PINE FORESTS COENOFLORE

**A.D. Bulokhov, D.S. Tuzhikov**

Bryansk State University

Under the influence of the recreational factor the coenoflora of cowberry pine forests loses some characteristic species of the alliance *Dicrano–Pinion* and association *Vaccinio vitis-idaeae–Pinetum sylvestris: Orthilia secunda, Goodyera repens, Trientalis europaea, Hylocomium splendens, Pyrola rotundifolia, Lycopodium clavatum, Antennaria dioica, Pulsatilla patens, Trientalis europaea, Hylocomium splendens*. The activity of meadow species increases: *Agrostis tenuis, Hieracium umbellatum, Phleum pratense, Poa angustifolia, Anthoxanthum odoratum, Veronica chamaedrys, Achillea millefolium, Pilosella officinarum*. Some ruderal species appear in coenoflora: *Galeopsis bifida, Berteroa incana, Viola tricolor, Chenopodium album, Polygonum aviculare*. among wood and shrubby flora are especially active: *Amelanchier spicata, Sambucus racemosa, Robinia pseudacacia*.

**Keywords:** recreation factor, pine forest, association, phytocoenotic activity, Bryansk region.

### References

1. Bulohkov A. D., Solomeshch A. I. *Ecologo-floristicheskaya klassificacia lesov Yuzhnogo Nechernozemya Rossii*. Bryansk: BGU, 2003. 359 p.
2. Braun-Blanquet J. *Pflanzensoziologie*. 3 Aufl. Wein-N.-Y., 1964. 865 S.
3. Ellenberg H., Weber H. E., Dull R., Wirth V., Werner W., Paulißen D. *Zeigewerte von Pflanzen in Mitteleuropa // Scripta Geobotanica*. 1992. Vol. 18. 2. Aufl. 258 p.

### About author

Bulohkov A. D. – doctor of Biology, professor Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

Tuzhikov D. S. - Bryansk State University Undergraduate, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

УДК 581. 526.425

**ОНТОГЕНЕЗ И ФИТОЦЕНОТИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ  
*ACER PLATANOIDES L.* В ЛЕСАХ БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ****А.Д. Булохов, А.Н. Шкотов**

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Изучен онтогенез *Acer platanoides L.* в широколиственных лесах Брянской области. Выявлены фитоценотические связи и фитоценотическая активность клена платановидного в ассоциациях елово-широколиственных и широколиственных лесов. Синэкологический оптимум вида выявлен на богатых минеральным азотом и слабощелочных почвах.

**Ключевые слова:** онтогенез, ценопопуляция, ассоциация, фитоценотические связи, фитоценотическая активность, Брянская область.

**Введение.** В настоящее время для разработки теоретических основ экологического мониторинга, оценки состояния возобновляемых растительных ресурсов необходимы глубокие знания популяционной жизни растений. Для этого необходимо детально изучать онтогенез растений в ценопопуляциях с выявлением в них онтогенетических состояний как совокупностей особей одного биологического возраста.

Цель работы – изучить онтогенез клена платановидного (*Acer platanoides L.*) и проанализировать его фитоценотические связи и фитоценотическую активность в различных сообществах.

Клен платановидный (остролистный) – *Acer platanoides L.* – типичный европейский вид широколиственных лесов, распространенный в Европе за исключением северо-западной части Западной Европы, Скандинавского полуострова, Крыма и степной части Восточной Европы [8, 9, 12, 13].

**Методика сбора материала и обработки материала.** При изучении онтогенеза деревьев использовалась единая методика сбора и обработки материала. В полевых условиях описание возрастных состояний проводилось на пробных площадях размером в 100 м<sup>2</sup>. За особь принималось морфологически и физически целостное образование, обособленное от других [16]. Для установления возрастных состояний использованы следующие признаки: высота, диаметр ствола, характеристика его покровных тканей, диаметр кроны, порядок ветвления, прирост ствола в высоту, форма листьев, глубина проникновения корней, жизненность. На пробных площадях проводилось геоботаническое описание фитоценозов. Оценка количественного участия видов дана по комбинированной шкале Ж. Браун-Бланке [23].

Сбор полевого материала для установления онтогенетических состояний клена платановидного проведен на территории памятника природы «Роща Соловьи» в г. Брянск и в Ивотском участковом лесничестве (Дятьковский р-н) в 2014–2016 годах в сообществах елово-кленовых лещиновых и липово-дубовых снытево-волосистоосоковых лесов. Для оценки фитоценотической связи и фитоценотической активности вида выполнено геоботаническое описание сообществ на этих же территориях. Синэкологические режимы (амплитуды) сообществ синтаксонов по влажности, кислотности и обеспеченности минеральным азотом почвы определены по оптимумным экологическим шкалам Х. Элленберга [24].

**Результаты и обсуждение.** Установлено 9 возрастных (онтогенетических) состояний у клена платановидного. Ниже дается их характеристика.

**Плод** – двукрылатка. Семена нуждаются в стратификации, которая в естественных условиях происходит лишь после опадения плодов в позднеосенний и даже зимний период.

Прорастает семя на тающем снегу в конце апреля – начале мая. Есть данные, что небольшая часть семян способна прорасти в год формирования до массового листопада [16].

**Проросток** клена имеет надземные семядоли и I пару настоящих листьев. Семядоля плоские (длиной до 35 мм и шириной до 9 мм), закругленные на вершине, при основании суженные в небольшой черешок. Первые листья супротивные, яйцевидные, по краю крупнозубчатые. Семядоля обычно к концу июня опадают, растение становится ювенальным. Корневая система проростков стержневая по форме, представлена системой главного корня (табл. 1).

**Ювенильные растения** – одноосные, имеют 1–4 пары супротивных листьев. Листья пальчато-, иногда тройчато-лопастные, отличаются от взрослых меньшей глубиной расчленения пластинки и небольшими размерами зубцов. Особи нарастают моноподиально, но при пониженной жизненности – большей частью симподиально.

В табл. 1 приведены биометрические показатели семенных особей.

Таблица 1

Биометрические показатели семенных особей клена остролистного

Возрастное состояние	Жизненность	Возраст, годы	Высота, м	Диаметр ствола, см	Диаметр кроны, м	Порядок ветвления	Подрост главной оси, см/год	Глубина проникновения корней, м
<b>p</b>	?	1–2	0,04–1,0	0,02–0,1		1	0,04–0,1	1–5
<b>j</b>	1	1–5	0,1–0,8	0,1–0,8		1	9,1	5–35
<b>im</b>	1	2–10	0,2–2,2	0,2–1,8	0,2–0,9	2–3	19,7	15–35
<b>v</b>	1	9–18	4,0–6,0	2,5–3,8	0,8–2,8	4	58,9	25–45
<b>g<sub>1</sub></b>	1	25–55	8,2–17,0	8,0–22,0	2,2–4,5	5–7	43,3	40–80
<b>g<sub>2</sub></b>	1	50–110	18,0–27,0	22,0–35,0	4,8–6,3	7–8	19,1	70–150
<b>g<sub>3</sub></b>	1	100–180	23,0–35,0	3,03–80,0	6,0–14,0	8–9	5,0–7,0	100–250
<b>s</b>	1	170 (200)	8,0–14,0	55,0–60,0				

**Имматурные особи (im)** – малоразветвленные растения.

**Виргинильные (молодые вегетативные) (v)** имеют дифференцированный ствол и крону. Форма крона узкопирамидальная. Листья взрослого типа.

**Молодые генеративные деревья (g<sub>1</sub>)** имеют широкопирамидальную крону, быстро растут в высоту. Корка в основании ствола глубоко трещиноватая. Цветки в верхушечных соцветиях отмечены только в верхних частях кроны. Молодые генеративные особи обычно плодоносят необильно.

**Средневозрастные генеративные деревья (g<sub>2</sub>)** имеют округло-пирамидальную крону, медленно растут в высоту (табл.). Ствол покрыт глубоко трещиноватой коркой почти наполовину. Плодоносят обильно и регулярно, ежегодно.

**Старые генеративные деревья (g<sub>3</sub>)** обладают широко округлой, частично или полностью вторичной кроной. Плодоносят обильно. Ствол почти на всем протяжении покрыт коркой с глубокими трещинами, растет в основном в толщину, а не в высоту.

**Сенильные деревья (s)** встречаются в сообществах редко. Это усыхающие, уже не плодоносящие особи с полностью вторичной кроной. Сенильные растения, имеет крупных кустов с листьями ювенального или полувзрослого типа.

Основной способ самоподдержания ценопопуляции клена остролистного – семенной. Редко встречаются особи вегетативного происхождения.

На основе проведенных исследований составлен ключ для определения онтогенетических состояний по их морфологическим признакам.

### Ключ для определения возрастных состояний Клена платановидного

1. Семядоля плоские, при основании суженные в небольшой черешок. Первые листья супротивные, яйцевидные, по краю крупнозубчатые – **проросток**.

- Семядолей нет. Растения одноосные ..... 2
- 2. Растения имеют 1–4 пары супротивных листьев. Листья пальчато-, иногда тройчатолопастные, отличаются от взрослых меньшее глубиной расчленения пластинки и небольшими размерами зубцов по ее краю – *ювенильные особи*.
- Совокупность признаков иная ..... 3
- 3. Малоразветвленные растения, высотой 0,2–2,2 м – *имматурные особи*.
- Совокупность признаков иная ..... 4
- 4. Растения имеют дифференцированный ствол и узко пирамидальную крону, листья взрослого типа – *виргинильные особи*.
- Совокупность признаков иная ..... 5
- 5. Деревья имеют островеишинную пирамидальную крону. Корка в основании ствола глубоко трещиноватая – *молодые генеративные особи*.
- Совокупность признаков иная ..... 6
- 5 Деревья с округло-пирамидальной кроной, ствол покрыт глубокотрещиноватой коркой почти наполовину – *старые генеративные особи*.
- Усыхающее уже не плодоносящие особи – *сенильные особи*.

### Фитоценотическая активность клена платановидного

#### в елово-широколиственных и широколиственных лесах Брянской области

**Понятие о фитоценотической активности вида.** Одна из актуальных проблем фитоценологии, флористики и ботанической географии – проблема оценки фитоценотической роли видов в растительном покрове. Этой проблеме посвящена обширная ботаническая литература [2–4, 7, 11, 14, 15, 17–20, 21]. Активность вида – это мера присутствия вида в данных ландшафтно-климатических условиях [20]. Активность вида можно рассматривать как меру его преуспевания. Величина активности определяется ценотической ролью, местом, которое вид занимает среди других в результате сложившихся связей в сообществах.

При изучении активности вида в фитоценотическом аспекте преследуется цель выявления приуроченности оптимума активности к синтаксонам определенного ранга.

Активность вида по Б. А. Юрцеву включает:

1. Разнообразие заселенных им экотопов;
2. Степень равномерности распределения вида в характерном для него экотопе и частоту экотопа на территории для стенотопных видов;
3. Обилие на основных местах обитания.

В дальнейшем Б. А. Юрцев [18, 20] рассматривал возможность выявления активности через проективное покрытие, занимаемое видом в ландшафте или в виде процентного числа присутствия в конкретной флоре или округе.

Флористы стремятся дифференцировать виды по их вкладу в формирование растительных сообществ, то есть потенциальные возможности выступления в роли доминантов, содоминантов или второстепенных видов. Это также отражает стратегию видов – их виолентность, пациентность или эксплерентность [14]. Чем шире экологическая амплитуда вида при его доминировании, тем он считается фитоценотически более активным. Для оценки активности видов используют разные показатели. Не вдаваясь в обзор используемых показателей, следует сказать, что все они в той или иной мере учитывают постоянство и массовость вида в различных типах сообщества, то есть его эколого-фитоценотическую амплитуду.

При анализе активности видов используют модифицированную шкалу активности Б. А. Юрцева и В. В. Петровского [22]. С выделением категорий от особо активных до неактивных. Я. П. Дидух [11] при изучении активности видов использовал подход Юрцева, но вместо экологической амплитуды ввел понятие «фитоценотическая амплитуда», а

вычисление ступеней по каждому критерию устанавливал на основе обработки геоботанических описаний.

Как уже отмечалось, существуют различные способы оценки активности вида.

Для оценки фитоценотической активности видов в синтаксономическом пространстве А. Д. Булоховым (2005) [4] была предложена комбинированная 5-балльная шкала:

5 – особо активные – класс постоянства – IV–V с проективным обилием-покрытием 4–5 баллов по шкале Ж. Браун-Бланке (проективное покрытие от 50 до 100%).

4 – высокоактивные – III–V класс постоянства и обилие-покрытие 2–3 балла (от 5 до 49%).

3 – среднеактивные, имеющие II–V класс постоянства и обилие-покрытие +–2 (1–25%).

2 – малоактивные, имеющие I–II классы постоянства и проективное покрытие «+» (до 1%).

1 – неактивные, имеющие I класс постоянства, единично произрастающие в сообществах отдельных ассоциаций с обилием «г». Это в основном стенотопные виды.

Оценка фитоценотической активности клена платановидного исследовалась в сообществах 9 синтаксонов широколиственно-еловых и широколиственных лесов (табл. 2).

Таблица 2

Фитоценотическая активность клена платановидного  
в синтаксонах еловых-широколиственных и широколиственных лесов

Синтаксоны	В	К	N	Кп
1. <i>Galio intermedii–Piceetum</i>	5,3	5,0	4?2	V <sup>+2</sup>
2. <i>Aceri platanioidis–Piceetum</i>	5,3	5,5	4,6	V <sup>2</sup>
3. <i>Corylo avellanae–Pinetum</i>	4,7	5,4	5,5	II <sup>+</sup> -III <sup>+</sup>
4. <i>Mercurialo perennis–Quercetum carpinetosum betuli</i>	5?0	5,4	6,0	V <sup>1</sup>
5. <i>Mercurialo perennis–Quercetum typicum</i>	5,5	7,0	6,0	V <sup>3-4</sup>
6. <i>Aceri campestris–Quercetum roboris</i>	5,3	7,1	6,5	V <sup>2</sup>
7. <i>Quercus roboris–Coryllus avellana</i>	5,5	7,3	5,0	V <sup>+2</sup>
8. <i>Fraxino excelsioris–Quercetum</i>	6,6	5,5	7,0	V <sup>1</sup>
9. <i>Pulmonario obscurae–Quercetum</i>	5,0	5,7	5,3	IV- V <sup>+</sup>

Условные обозначения. Характеристика почвы по экологическим шкалам Н. Ellenberg et al. [23]: В – влажность, К – кислотность, N – обеспеченность минеральным азотом. Кп – класс постоянства; верхний индекс – обилие-покрытие вида в сообществах ассоциации.

Кроме личных геоботанических описаний на территории памятника природы «Роща оловьи» и в Дятьковском р-не были использованы описания из монографии А. Д. Булохова, А. И. Соломеща [5] и А. Д. Булохова, А. В. Харина [6]. Результаты исследования показаны на рис.

В сообществах широколиственно-еловых лесов асс. *Galio intermedia–Piceetum* Bulokhov et Solomechch 2003 (ельник с с кленом подмаренниково-лещиновый) и *Aceri platanioidis–Piceetum* Bulokhov et Solomechch 2003 (клено-ельник лещиновый) клен платановидный особо активен (балл «5», класс постоянства – V<sup>2</sup>). В сообществах асс. *Corylo–Pinetum* (сосняк лещиновый) клен средне активен (балл «3», класс постоянства – II–III<sup>+</sup>) с небольшим обилием-покрытием.

Леса с кленом платановидным распространены по всей территории Брянской области, но высокая фитоценотическая активность его выявлена в 7 ассоциациях (табл. 2). Синэкологический оптимум клена платановидного находится на богатых минеральным азотом и слабощелочных почвах.

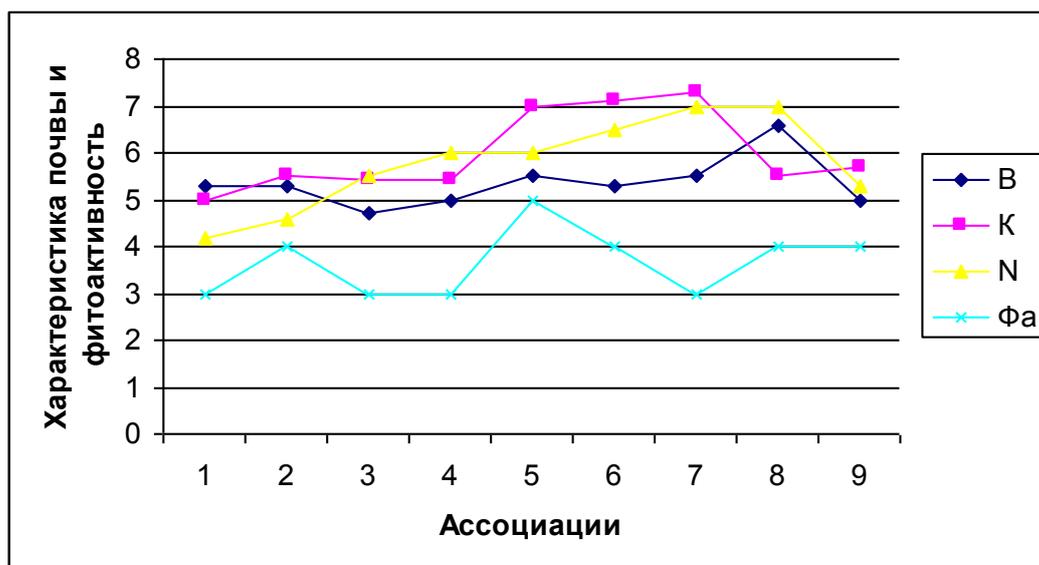


Рис. Фитоценотическая активность клена платановидного в коренных широколиственно-еловых и широколиственных лесах.

Условные обозначения. Характеристика почвы по экологическим шкалам Н. Ellenberg et al. [24]: В – влажность, К – кислотность, N – обеспеченность минеральным азотом. Фа – фитоценотическая активность.

Синтаксоны: 1 – асс. *Galio intermedii-Piceetum* Bulokhov et Semenishchenkov 2010 – ельник подмаренниково-лещиновый; 2 – *Aceri platanoidis-Piceetum* Bulokhov et Solomechch 2003 – клено-ельник лещиновый; 3 – асс. *Corylo avellanae-Pinetum* Bulokhov et Solomechch 2003 – сосняк лещиновый; 4 – субасс. *Mercurialo-Quercetum carpinetosum betuli* Bulokhov et Solomechch 2003 – дубняк с грабом пролесниковый; 5 – субасс. *Mercurialo-Quercetum typicum* Bulokhov et Solomechch 2003 – дубняк пролесниковый; 6 – *Aceri campestris-Quercetum* Bulokhov et Solomechch 2003 – дубняк с кленом полевым; 7. Сообщество *Quercus roboris-Coryllus avellana* – дубняк лещиновый; 8 – асс. *Fraxino excelsioris-Quercetum* Bulokhov et Solomechch 2003 – ясене-дубняк; 9 – *Pulmonario obscurae-Quercetum* Bulokhov et Solomechch 2003 – дубняк медуничный.

В широколиственных лесах, представленных синтаксонами *Mercurialo-Quercetum carpinetosum*, *Aceri campestris-Quercetum*, *Fraxino excelsioris-Quercetum*, *Pulmonario obscurae-Quercetum* и *Quercus roboris-Coryllus avellana*, клен платановидный особо активен в ассоциации дубняк пролесниковый (балл «5»); наиболее низкая активность отмечена в сообществах дубняка лещинового.

**Заключение.** Установлены онтогенетические (возрастные) состояния клена платановидного и дается их подробная характеристика. Составлен ключ для определения возрастных состояний по морфологическим признакам.

Изучена фитоценотическая активность клена платановидного в различных лесных ассоциациях. В сообществах широколиственно-еловых и широколиственных лесов выявлена его высокая фитоценотическая активность, особенно – в ассоциации *Mercurialo perennis-Quercetum*. Синэкологический оптимум находится на богатых минеральным азотом и слабощелочных почвах.

Полученные в ходе исследований результаты могут быть использованы для изучения популяционной жизни *Acer platanoides* и послужить основой для дальнейшего более полного изучения биологии и экологии этого вида в центральной части ареала.

## Список литературы

1. Букштынов А.Ф. Клен. М.: Лесная промышленность, 1982. 86 с.
2. Булохов А. Д. Фитоценология и флористика: анализ флоры в синтаксономическом пространстве // Журн. общ. биологии, 1993. Т. 54, № 2. С. 201–209.
3. Булохов А. Д. Фитоиндикация и её практическое применение. Брянск. Изд-во БГУ, 2004. 245 с.
4. Булохов А. Д. Синтаксономия и флористика: анализ фитоценотической активности вида в синтаксономическом пространстве // Юбилейный сб. статей профессоров БГУ. Брянск: РИО БГУ, 2005. С. 74–80.
5. Булохов А. Д., Соломещ А. И. Эколого-флористическая классификация лесов Южного Нечерноземья России. Брянск: Изд-во БГУ, 2003. 359 с.
6. Булохов А. Д., Харин А. В. Растительный покров Брянска и его пригородной зоны (синтаксономия и мониторинг). Брянск: РИО БГУ, 2008. 311 с.
7. Миркин Б. М., Наумова Л. Г. Современное состояние основных концепций науки о растительности. Уфа: Гилем, 2012. 488 с.
8. Вахрамеева М. Г. Клен остролистный // Биологическая флора Московской области. М. Изд-во МГУ, 1974. Вып.1. С. 106–119.
9. Вахрамеева М. Г. Морфологическая характеристика возрастных состояний остролистого клена // Вестник МГУ. Сер. VI, биология и почвоведение, 1975. С. 116–119.
10. Диагнозы и ключи возрастных состояний лесных растений. Деревья и кустарники. М. Изд-во МГПИ, 1989. 106 с.
11. Дидух Я. П. Проблемы активности видов растений // Бот. журн., 1982. Т. 82, №7. С. 925–936.
12. Замятин В.Н. *Aceraceae* Lindl. // Деревья и кустарники. М.–Л.: АН СССР, 1958. С. 405–499.
13. Пояркова А. И. Ботанико-географический обзор кленов в связи с историей всего рода *Acer* L. // Тр. Бот. ин-та АН СССР. 1933. Сер 1, вып. 1. С. 225–274.
14. Раменский Л. Г. Проблемы и методы изучения растительного покрова. Изб. работы. Л.: Наука, 1971. 334 с.
15. Уиттекер Р. Сообщества и экосистемы. М.: Изд-во Прогресс, 1980. 327 с.
16. Ценопопуляции растений. М.: Наука, 1976. 215 с.
17. Юрцев Б. А. Флора Сунтар-Хаята. Проблемы истории высокогорных ландшафтов Северо-Востока Сибири. Л.: Наука, 1968. 236 с.
18. Юрцев Б. А. Флора как базовое понятие флористики: содержание понятия, подходы к изучению // Теоретические и методические проблемы сравнительной флористики. Л.: Наука, 1987. С. 13–28.
19. Юрцев Б. А. Флора как природная система // Бюл. МОИП. Отд. биол. 1982. Т.87, вып.4. С. 3–22.
20. Юрцев Б. А. Флористический и фитоценологический подходы к растительному покрову: соотношение, проблемы синтеза // Журн. общ. биол. 1988. Т. 49, № 4. С. 437–450.
21. Юрцев Б. А., Камелин Р. В. Очерк системы основных понятий флористики // Теоретические и методические проблемы современной флористики. Л.: Наука, 1987. С. 242–266.
22. Юрцев Б. А., Петровский В. В. Флора окрестностей бухты Сомнительной // Арктические тундры остова Врангеля. СПб, 1994. С. 7–66.
23. Braun-Blanquet J. Pflanzensoziologie. 3 Aufl. Wein–N.-Y. 865 S.
24. Ellenberg H., Weber H.E., Dull R., Wirth V., Werner W., Paulißen D. Zeigewerte von Pflanzen in Mitteleuropa // Scripta Geobotanica. 1992. Vol. 18. 2. Aufl. 258 S.

**Сведения об авторах**

Булохов Алексей Данилович – доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой биологии, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

Шкотов Алексей Николаевич – магистр Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

**ONTOGENESIS AND PHYTOCOENOTIC ACTIVITY  
OF ACER PLATANOIDES L. IN FORESTS OF THE BRYANSK REGION****A.D. Bulokhov, A.N. Shkotov**

Bryansk State University

The ontogenesis of *Acer platanoides* L. studied in mixed coniferous-broad-leaved and broad-leaved forests of the Bryansk region. The phytocoenotic activity of a maple studied in associations of broad-leaved forest. Synecological optimum of species on rich with mineral nitrogen and alkaline soils.

**Keywords:** *Acer platanoides*, ontogenesis, coenopopulation, association, phytocoenotic activity, Bryansk region.

**References**

1. Bukshtynov A.F. Klen. M.: Lesnaja promyshlennost', 1982. 86 s.
2. Bulokhov A. D. Fitocenologija i floristika: analiz flory v sintaksonomicheskom prostranstve // Zhurn. obshh. biologii, 1993. T. 54, № 2. S. 201–209.
3. Bulokhov A. D. Fitoindikacija i ejo prakticheskoe primenenie. Brjansk. Izd-vo BGU, 2004. 245 s.
4. Bulokhov A. D. Sintaksonomija i floristika: analiz fitocenoticheskoj aktivnosti vida v sintaksonomicheskom prostranstve // Jubilejnyj sb. statej professorov BGU. Brjansk: RIO BGU, 2005. S. 74–80.
5. Bulokhov A. D., Solomeshch A. I. Jekologo-floristicheskaja klassifikacija lesov Juzhnogo Nechernozem'ja Rossii. Brjansk: Izd-vo BGU, 2003. 359 s.
6. Bulokhov A. D., Kharin A. V. Rastitel'nyj pokrov Brjanska i ego prigorodnoj zony (sintaksonomija i monitoring). Brjansk: RIO BGU, 2008. 311 s.
7. Mirkin B. M., Naumova L. G. Sovremennoe sostojanie osnovnyh koncepcij nauki o rastitel'nosti. Ufa: Gilem, 2012. 488 s.
8. Vakhrameeva M. G. Klen ostrolistnyj // Biologicheskaja flora Moskovskoj oblasti. M. Izd-vo MGU, 1974. Vyp.1. S. 106–119.
9. Vakhrameeva M. G. Morfologicheskaja charakteristika vozrastnyh sostojanij ostrolistogo klenu // Vestnik MGU. Ser.VI, biologija i pochvovedenie, 1975. S. 116–119.
10. Diagnozy i kljuchi vozrastnyh sostojanij lesnyh rastenij. Derev'ja i kustarniki. M. Izd-vo MGPI, 1989. 106 s.
11. Didukh Ya. P. Problemy aktivnosti vidov rastenij // Bot. zhurn., 1982. T. 82, №7. S. 925–936.
12. Zamjatin B.N. *Aceraceae* Lindl. // Derev'ja i kustarniki. M.–L.: AN SSSR, 1958. S. 405–499.
13. Poyarkova A. I. Botaniko-geograficheskij obzor klenov v svjazi s istoriej vsego roda *Acer* L. // Tr. Bot. in-ta AN SSSR. 1933. Ser 1, vyp. 1. S. 225–274.
14. Ramenskiy L. G. Problemy i metody izuchenija rastitel'nogo pokrova. Izb. raboty. L.: Nauka, 1971. 334 s.
15. Wittaker R. Soobshhestva i jekosistemy. M.: Izd-vo Progress, 1980. 327 s.
16. Cenopuljacija rastenij. M.: Nauka, 1976. 215 s.
17. Yurcev B. A. Flora Suntar-Hajata. Problemy istorii vysokogornyh landshaftov Severo-Vostoka Sibiri. L.: Nauka, 1968. 236 s.

18. Yurcev B. A. Flora kak bazovoe ponjatie floristiki: sodержanie ponjatija, podhody k izucheniju // Teoreticheskie i metodicheskie problemy sravnitel'noj floristiki. L.: Nauka, 1987. S. 13–28.
19. Yurcev B. A. Flora kak prirodnaaja sistema // Bjul. MOIP. Otd. biol. 1982. T.87, vyp.4. S. 3–22.
20. Yurcev B. A. Floristicheskiy i fitocenologicheskiy podhody k rastitel'nomu pokrovu: sootnoshenie, problemy sinteza // Zhurn. obshh. biol. 1988. T. 49, № 4. S. 437–450.
21. Yurcev B. A., Kamelin R. V. Oчерк sistemy osnovnyh ponjatij floristiki // Teoreticheskie i metodicheskie problemy sovremennoj floristiki. L.: Nauka, 1987. S. 242–266.
22. Yurcev B. A., Petrovskiy V. V. Flora okrestnostej buhty Somnitel'noj // Arkticheskie tundry ostova Vrangelja. SPb, 1994. S. 7–66.
23. Braun-Blanquet J. Pflanzensoziologie. 3 Aufl. Wein–N.-Y. 865 S.
24. Ellenberg H., Weber H.E., Dull R., Wirth V., Werner W., Paulißen D. Zeigewerte von Pflanzen in Mitteleuropa // Scripta Geobotanica. 1992. Vol. 18. 2. Aufl. 258 S.

#### **About author**

Bulokhov A. D. – doctor of Biology, professor Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

Shkotov A.N - Bryansk State University Undergraduate, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

УДК 613.95/96

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА НЕКОТОРЫЕ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ СТУДЕНТОВ-МЕДИКОВ ПЕРВОГО КУРСА****А.С. Князева, Т.Г. Иванова**

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Представлены результаты изучения влияния воздействия учебной деятельности, как сильного стрессорного фактора, в медицинском колледже на некоторые показатели здоровья – вес, пульс, скорость его восстановления после нагрузки, артериальное давление. Показано, что максимальное снижение показателей отмечается в начале учебного года и после первой сессии.

**Ключевые слова:** стресс, артериальное давление, заболеваемость.

**Введение.** Интенсивность и содержание учебного процесса в медицинских колледжах влияют на работоспособность и состояние здоровья студентов-медиков, особенно первого курса. Специфика обучения в медицинских училищах и колледжах определяется чрезвычайно высокими и разнообразными требованиями, предъявляемыми к среднему медицинскому персоналу [2].

Студенчество является особой социальной группой населения нашей страны, в среде которой наиболее ярко проявляются последствия экономического кризиса, ухудшения экологической обстановки, возрастающей учебной нагрузки. Инновации в сфере образования, не могут не сказаться на работоспособности, а следовательно и здоровье студенческой молодежи [1].

Поэтому изучение состояния здоровья студентов, особенно первого курса, не теряет своей актуальности и практической значимости, тем более, что эта проблема обусловлена ростом заболеваемости подростков и юношей не только к концу обучения в школе и на начальных этапах профессионального обучения.

**Цель работы** – исследование изменения физиологических показателей соматического здоровья студентов на протяжении первого года обучения в медицинском колледже.

Для выполнения поставленной цели нами были определены следующие **задачи:**

1. Изучить изменчивость антропометрических показателей и показателей сердечно-сосудистой системы в течение первого года обучения.

2. Проследить динамику заболеваемости студентов в течение учебного года.

**Методика исследований.** Экспериментальное исследование проведено на базе ГАПОУ «Брянский базовый медицинский колледж» с сентября 2015 по апрель 2016 г. В исследовании приняли участие 15 юношей и 25 девушек, обучающихся на 1 курсе, в возрасте 17-18 лет.

В ходе исследования проведены замеры роста (см), веса (кг), пульса и артериального давления, а так же времени восстановления пульса по стандартным методикам [3]. Расчет весо-ростового индекса проводили по формуле Кетле [3].

**Результаты и обсуждения.** Уровень физического развития студентов первого курса медколледжа можно оценить как удовлетворительный. Изменения антропометрических показателей студенток и студентов в течение года статистически недостоверны ( $p > 0,05$ ). Нормальная масса тела на протяжении учебного года отмечается у 50% юношей и 20-33,3% девушек. Недостаточная масса тела у 40% юношей и 56,7-77% девушек; избыточная масса тела отмечается у 10% юношей и 3,33-10% девушек. Снижение массы тела у девушек отмечается к середине и к окончанию учебного года, что, вероятно, связано с действием стресса и напряжением механизмов адаптации. Гендерные отличия массы тела, роста статистически достоверны ( $p = 0,001$ ), и составляют  $9,21 \pm 1,15$  см и  $11,56 \pm 1,24$  кг.

Показания артериального давления юношей стабильны в течение учебного года. В ходе наблюдения выявлены только два отклонения от нормы: у одного юноши наблюдается гипертония в начале учебного года и нормотония к концу учебного года, у другого студента гипертония отмечается в середине и к окончанию учебного года. У 10% девушек наблюдается к окончанию учебного года гипотония, а у 3,33% студенток – гипертония. Статистической достоверностью отличаются только гендерные различия систолического артериального давления ( $p=0,05$ ).

Показатели ЧСС у юношей относительно стабильны в течение всего периода обследования. Для всех обследованных студентов определена нормокардия, в то время как у студенток в осенний период отмечается у 10% респондентов брадикардия, а к концу учебного года брадикардия выявлена у 23,33% девушек.

У обследуемых студентов не зависимо от половой принадлежности наблюдается улучшение показателя скорости восстановления пульса после дозированной нагрузки к окончанию учебного года. В осенний период у юношей восстановление пульса происходило в среднем через 2-2,5 минуты, у девушек соответственно через 2,5 – 3 минуты, к концу учебного года у студентов пульс восстанавливался в среднем за 1 минуту, а у студенток – за 1,5 минуты.

Анализ заболеваемости студентов показал, что пик приходится на второй месяц обучения (чаще всего респонденты отмечают насморк и легкую форму ОРЗ). Вторая волна простудных заболеваний приходится на постсессионный период (ОРЗ, ангины). Эти данные свидетельствуют об уровне напряженности адаптационных механизмов и силе стрессорного воздействия [1].

#### **Выводы:**

1. В отличие от юношей, организм девушек на процесс смены типа учебной деятельности ответил снижением массы тела. В начале учебного года недостаток массы тела был зафиксирован у 56% обследованных, а в конце учебного года – у 77%.

2. У юношей в течение года изменений артериального давления и пульса не выявлено. Среди девушек к концу учебного года у 1% респондентов выявлена устойчивая гипотония и тахикардия.

3. Обследованные девушки и юноши к концу учебного года улучшили показатели скорости восстановления пульса после дозированной нагрузки. У юношей время восстановления достоверно уменьшилось на 50%, у девушек – на 30%.

4. Студенты обследованной группы более подвержены инфекционным заболеваниям в ранне-осенний и постсессионный периоды, что дополнительно свидетельствует о силе стрессорного воздействия, приводящего к снижению иммунитета.

#### **Список литературы**

1. Агаджанян, Н.А. Адаптация и резервы организма. – М.: Физкультура и спорт, 1983. – 176 с.
2. Адаптация организма учащихся к учебной и физической нагрузкам / Под ред. А.Г. Хрипковой, М.В. Антроповой; Науч.-иссл. Ин-т физиологии детей и подростков Акад. пед. наук СССР. – М.: Педагогика, 1982. – 240 с.
3. Казин Э.М. и др. Практикум по психофизиологической диагностике. – М.: Гуманит. Изд. Центр ВЛАДОС, 2000. – С. 7-54.

#### **Сведения об авторах**

Иванова Татьяна Геннадьевна – кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: kafbot2002@mail.ru

Князева Анна Сергеевна – магистр Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: kafbot2002@mail.ru

**ANALYSIS OF INFLUENCE OF EDUCATIONAL ACTIVITY ON SOME  
PHYSIOLOGICAL INDICATORS OF MEDICAL STUDENTS OF THE FIRST COURSE**

**A.S. Knyazeva, T.G. Ivanova**

Bryansk state university

Results of studying of influence of impact of educational activity, as strong stressor factor, in medical college on some indicators of health – the weight, pulse, speed of its restoration after loading, arterial pressure are presented. It is shown that the maximum decrease in indicators is noted at the beginning of academic year and after the first session.

**Keywords:** *stress, arterial pressure, incidence.*

**References**

1. Agadzhanian, N. A. Adaptation and reserves of an organism. – M.: Physical culture and sport, 1983. – 176s.
2. Adaptation of an organism of pupils to educational and physical loadings / Under the editorship of A.G. Hripkova, M. V. Antropova; Науч. - иссл. Ученые записки по физиологии детей и подростков Аккад. пед. sciences of the USSR. – M.: Pedagogics, 1982. – 240s.
3. Kazin E.M., etc. Workshop on psychophysiological diagnostics. – M.: Gumanit. Prod. VLADOS center, 2000. – Page 7-54.

**About authors**

Ivanova T. G. - candidate of Biological Science, associate professor, department of Biology at the BSU, e-mail: kafbot2002@mail.ru

Knyazeva A.S. – Bryansk State University Undergraduate, e-mail: kafbot2002@mail.ru.

УДК 631.4

**МНОГОЛЕТНЯЯ ДИНАМИКА NDVI КАК ХАРАКТЕРИСТИКА  
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЛЕСНЫХ ЛАНДШАФТОВ  
(НА ПРИМЕРЕ БРЯНСКОГО УЧЕБНО-ОПЫТНОГО ЛЕСНИЧЕСТВА)**

**Г.В. Лобанов<sup>1</sup>, А.И. Башкирский<sup>1</sup>, А.Ю. Зверева<sup>1</sup>, Б.В. Тришкин<sup>2</sup>, А.П. Протасова<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Брянский государственный университет им. акад. И. Г. Петровского

<sup>2</sup>Брянский филиал Московского психолого-социального университета

Функционирование экосистем Брянского лесного массива в многолетний период рассматривается через колебания их биопродуктивности под влиянием метеорологических условий. Биопродуктивность характеризуется распределением вегетационного индекса NDVI, рассчитанного по данным дистанционного зондирования поверхности спектрорадиометром MODIS. Различия NDVI в границах относительно небольшого участка Брянского лесного массива обусловлены неодинаковой реакцией сообществ на изменения метеорологических условий в зависимости от эдафических факторов, породного состава и возраста древесного яруса. Продуктивность отдельных участков леса изменяется от года к году, иных остаётся устойчиво высокой или низкой. На особенностях распределения NDVI в многолетний период может быть основана оценка благоприятности условий существования лесных экосистем и планирование лесоустроительных работ.

**Ключевые слова:** функционирование лесных экосистем, биопродуктивность, NDVI

**Введение.** Методы оценки и мониторинга состояния лесных ландшафтов через биопродуктивность распространяются от начала использования регулярного зондирования поверхности Земли мультиспектральными радиометрами, установленными на борту спутниковых платформ. Величину биопродуктивности характеризует значения вегетационных индексов – показателей, построенных на соотношении спектральной яркости отражающей поверхности в разных диапазонах спектра, обычно красном и ближнем инфракрасном (БИК). Физиологическую основу вегетационных индексов составляют зависимости между интенсивностью отражения радиации в красной зоне спектра листьями и концентрацией хлорофилла, которая в свою очередь характеризует скорость образования органических веществ и прирост биомассы. Поглощение излучения в ближней инфракрасной области в меньшей степени зависит от физиологического состояния растений, поэтому используется для нормализации индексов – приведения к диапазону значений [0, 1]. На соотношение отражения в красной и инфракрасной области, таким образом, существенно влияет концентрация хлорофилла и, незначительно – условия съёмки (прозрачность атмосферы) [3]. Отражающую поверхность лесных экосистем в течение вегетационного периода составляют участки крон лиственных и хвойных деревьев (за исключением вырубок, гарей, редин). Наиболее представительные результаты по количеству, географическому охвату и разнообразию объектов исследований получены для нормализованного вегетационного индекса NDVI (разрабатываются и используются разнообразные варианты расчёта). Распределение значений NDVI (далее индекс) во времени и пространстве характеризует особенности функционирования экосистем разного типа. Сезонная и многолетняя динамика индекса отражает влияние метеорологических условий на интенсивность вегетации в экотопах с разной литогенной основой – геологическим строением, рельефом, почвами. Буферные свойства почв частично компенсируют влияние неблагоприятных метеорологических изменений условий на физиологическое состояние растений. В слабоизменённых хозяйственной деятельностью экосистемах видовой состав сообществ приспособлен к определённому сочетанию климатических и эдафических условий. Для антропогенно изменённых экосистем (лесотехнических, агроценозов) сведения о многолетних изменениях индекса могут рассматриваться как информационная основа уменьшения потерь прироста лесных культур или урожая от метеорологических факторов.

Снижение потерь предполагается подбором культур, обеспечивающих наилучшие средние многолетние показатели биопродуктивности на почвах разных таксонов. Для лесных культур обоснование лесорастительных условий наилучшей продуктивности отличается долгосрочными последствиями выбора. Подробность сведений о сезонной и многолетней динамике индекса, накопленных за время работы программ дистанционного зондирования вполне достаточна для оценки условий наиболее высокой биопродуктивности экосистем. Актуальность таких исследований для Брянской области обусловлена, как особенностями самого объекта - хорошей изученностью и большим разнообразием лесных экосистем и лесорастительных условий, так и важностью достижения высокой продуктивности лесного хозяйства как отрасли специализации области.

**Методика исследований.** В данной работе закономерности динамики индекса рассматриваются на примере Брянского учебно-опытного лесничества – сравнительно небольшой части Брянского лесного массива, расположенного в 5 км к востоку от границы областного центра. Территория лесничества находится на участке аллювиально-зандровой равнины, между второй классической «боровой» и третьей надпойменной террасами Десны [2]. В породном составе древесного яруса преобладает сосна, реже встречается ольха, присутствует дуб и ель. Пространственную структуру леса образуют монодоминантные участки, привязанные к определённым эдафическим условиям [1]. Сосняки занимают участки поверхности равнины в интервале абсолютных высот от 170 до 195 м, ольшаники и дубравы преобладают в относительных понижениях (170-180 м).

Сведения о распределении индекса в границах лесничества получены из архива данных съёмки поверхности спектрорадиометром MODIS. Исходный материал для анализа влияния метеорологических и почвенных факторов на распределение NDVI составляют данные по 17 монодоминантным по составу пород ключевым участкам площадью от 1 до 12 га. Используются ряды средних значений индекса за две недели, календарный сезон и тёплый период года (от разрушения до становления снежного покрова) за 2010-2015 гг. Самый короткий интервал осреднения - около двух недель регламентируется форматом хранения архивных данных. С такой подробностью материалы спутниковой съёмки предоставляются пользователю через геопортал. [4] Из последовательностей средних двухнедельных значений далее рассчитаны средние величины за сезон и тёплый период года. Их распределение рассматривается в связи с метеорологическими особенностями сезонов и лет, систематизированных в свободно доступных архивах данных наблюдений [5].

**Результаты и обсуждение.** Результаты анализа факторов распределения индекса в самом грубом приближении показывают, что средние значения NDVI тёплого периода обратно связаны с температурой и прямо с относительной влажностью воздуха. В Брянской области дефицит тепла обычно не является лимитирующим фактором вегетации, напротив высокие температуры часто сопровождаются атмосферной (реже почвенной) засухой (2011 и 2012 г), которая заметно снижает биопродуктивность экосистем (табл. 1).

Таблица 1

Динамика средней биопродуктивности лесного массива Брянского учебно-опытного лесничества (по распределению NDVI) и метеорологические условия года

Показатель	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Т°С	11,6	10,1	9,8	14,7	14,4	11,3
Относительная влажность, %	65,7	74,1	83,3	69,8	66,6	78,5
среднее значение NDVI в тёплый период года	0,729	0,700	0,696	0,734	0,712	0,727

В относительно прохладные годы соотношение факторов иное – биопродуктивность возрастает при невысокой влажности. Вероятно, здесь имеет место действие двух факторов: экологического, через угнетающее влияние избыточной влажности на вегетацию, и

технического (особенностей расчёта NDVI) через увеличение поглощения радиации в ближней инфракрасной области тканями растений с высоким содержанием влаги и, следовательно, уменьшением значений индекса.

Устойчивой связи средних годовых значений индекса с породным и возрастным составом участков леса не обнаружено. Относительно высокая биопродуктивность (по данным о распределении NDVI за тёплый период 2010-2015 года) типична для участков дубово-липового спелого леса, некоторых средневозрастных сосняков, спелых ольшаников; низкая биопродуктивность - для отдельных участков спелых сосняков, березняков, приспевающих ольшаников. По-видимому, распределение объясняется разной благоприятностью экотопа для породного состава леса, которая усиливается или ослабляется колебаниями метеорологических условий.

Анализ распределения индекса в ряду лет дополняет общие выводы о факторах распределения NDVI (табл. 2). Небольшой объём выборки определяет высокую биопродуктивность в ряду лет, сохраняются отдельные участки леса независимо от возраста, породного состава древесного яруса и метеорологических условий года (некоторые сосняки, участки дубового леса). Вероятно, на распределение индекса влияет литогенная основа экотопа – механический и химический состав почв, почвообразующих пород, особенности грунтового увлажнения. Влияние климатических факторов проявляется в чередовании «лидеров» биопродуктивности – в относительно сухие и тёплые годы – ольшаников, в умеренно тёплые и влажные - сосняков. В отдельные годы, особенно неблагоприятные по условиям вегетации для определённых пород деревьев на участках их распространения отмечается невысокая биопродуктивность – ельник в тёплом и сухом 2011 году. В иные годы биопродуктивность ельника остаётся на среднем уровне

Таблица 2

Динамика биопродуктивности отдельных участков массива Брянского учебно-опытного лесничества (по распределению NDVI), в скобках номера ключевых участков

Год	Общая характеристика метеоусловий тёплого периода	Высокая биопродуктивность	Низкая биопродуктивность
2010	Умеренно тепло и влажно	Сосняк средневозрастной (3), дубово-липовый лес (1), спелый сосняк (12)	Сосняк средневозрастной (10), березняк спелый (15), березняк спелый (16)
2011	Тепло и сухо	Ольшаник спелый (6), ольшаник приспевающий (9), дубово-липовый лес (1)	Ельник (17), сосняк спелый (11), березняк спелый (15)
2012	Тепло и сухо	Ольшаник спелый (6), дубово-липовый лес (1), сосняк спелый (13)	Ольшаник приспевающий (8), ольшаник спелый (14), сосняк спелый (11)
2013	Прохладно и очень влажно	Сосняк спелый (13), сосняк средневозрастной (7), дубово-липовый лес (1)	Ольшаник приспевающий (8), сосняк приспевающий (4), березняк спелый (15)
2014	Прохладно и умеренно влажно	Ольшаник спелый (6), сосняк спелый (12), сосняк средневозрастной (3)	Сосняк средневозрастной (10), сосняк спелый (11), березняк спелый (15)
2015	Умеренно тепло и сухо	Сосняк средневозрастной (3), сосняк спелый (13), ольшаник приспевающий (9)	Ольшаник приспевающий (8), сосняк спелый (11), березняк спелый (15)

**Вывод.** Предварительные результаты анализа распределения индекса позволяют рассматривать его как возможный индикатор соответствия породного состава участков леса лесорастительным условиям для обоснования предложений по перспективному лесоустройству.

#### Список литературы

1. План лесонасаждений учебно-опытного лесхоза БГТИ Брянской области. Устройство 1985 г. Масштаб 1:10000
2. Природные ресурсы и окружающая среда субъектов Российской Федерации. Центральный федеральный округ. Брянская область / Рыбальский Н. Г., Самотесов Е. Д., Митюков А. Г. и др. М.: НИИ-Природа, 2007. 1144 с.
3. Черепанов А.С. Вегетационные индексы // Геоматика, 2011. №3. С.98-102.
4. [http://reverb.echo.nasa.gov/reverb/#utf8=%E2%9C%93&spatial\\_map=satellite&spatial\\_type=rectangle](http://reverb.echo.nasa.gov/reverb/#utf8=%E2%9C%93&spatial_map=satellite&spatial_type=rectangle)
5. [http://rp5.ru/archive.php?wmo\\_id=26898&lang=ru\\_](http://rp5.ru/archive.php?wmo_id=26898&lang=ru_)

#### Сведения об авторах

Лобанов Григорий Владимирович – кандидат географических наук, доцент кафедры географии, экологии и землеустройства Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: geobgu@mail.ru.

Башкирский Алексей Игоревич – студент Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: geobgu@mail.ru.

Зверева Анна Юрьевна – аспирант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: geobgu@mail.ru.

Тришкин Борис Викторович – кандидат биологических наук, доцент, профессор кафедры управления и информационных технологий БФ МПСУ, e-mail: geobgu@mail.ru.

Протасова Алина Петровна - аспирант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: geobgu@mail.ru.

### THE LONG-TIME DYNAMIC OF NDVI AS INDICATORS OF FOREST LANDSCAPES FUNCTIONING (ON THE EXAMPLE OF BRYANSK TRAINING AND EXPERIMENTAL FOREST)

G.V. Lobanov, A.I. Bashkirskii, A.Yu. Zvereva, B.V. Trishkin, A.P. Protasova

Bryansk State University

Bryansk branch of Moscow psycho-social university

The functioning of the Bryansk woodland ecosystems in the long period is seen through fluctuation of bio-productivity, influenced by meteorological conditions. Bio-productivity is characterized by the distribution of the vegetation index NDVI, calculated from data of remote sensing of the surface by MODIS. Differences of NDVI within the boundaries of the relatively small area of the Bryansk forest is due to different response of communities to changes in meteorological conditions depending on edaphic factors, species composition and age structure of the tree layer. The productivity of individual parts of the forest varies from year to year, the other remains steadily high or low. On the features of the NDVI distribution in a multi-year period may be based the estimation of conditions for the existence of forest ecosystems favorability and the planning of forest management works.

**Keywords:** forest ecosystem functioning, productivity, NDVI

### References

1. The afforestation plan of the educational-experimental forestry, BGTI Bryansk region. Device 1985, Scale 1:10000
2. Natural resources and environment of constituent entities of the Russian Federation. The Central Federal district. Bryansk oblast / Rybalskiy N. G., Samotesov E. D., Mitiukov A. G. and others M.: NIA-Priroda, 2007. 1144 p.
3. Cherepanov, A. S. Vegetation index, Geomatika, 2011. №. 3. p. 98-102.
4. [http://reverb.echo.nasa.gov/reverb/#utf8=%E2%9C%93&spatial\\_map=satellite&spatial\\_type=rectangle](http://reverb.echo.nasa.gov/reverb/#utf8=%E2%9C%93&spatial_map=satellite&spatial_type=rectangle)
5. [http://rp5.ru/archive.php?wmo\\_id=26898&lang=ru](http://rp5.ru/archive.php?wmo_id=26898&lang=ru).

### About author

- Lobanov G.V. - Ph.D. in Geography, associate professor, Department of geography, ecology and land management, Bryansk State University, e-mail: geobgu@mail.ru.
- Bashkirsky A. I. – student Bryansk State University, e-mail: geobgu@mail.ru.
- Zvereva A.Y. - postgraduate Bryansk State University, e-mail: geobgu@mail.ru.
- Trishkin B. V. - Ph.D. in Biology, Associate professor, Dpt. of Management and information technology MPSU, e-mail: geobgu@mail.ru.

**ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ**

УДК 591.3:636.5+636.058

**К МОРФОЛОГИИ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ ПТИЦ****М.И. Ежикова, Е.В. Зайцева**

Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского

В статье приводится современное состояние науки по вопросам морфологических особенностей сердечно-сосудистой системы птиц. Произведен анализ современной научной литературы, позволяющий обобщить и систематизировать данные по строению сердца у сельскохозяйственных птиц.

**Ключевые слова:** *сердечно-сосудистая система, эпикард, миокард, эндокард.*

**Введение.** Сердце является одним из самых важных органов животных, что связано с ролью этого органа в процессе кровообращения, передвижение крови с питательными веществами и кислородом, и регуляцией нормального функционирования и роста всех органов и организма в целом. Изучение морфологии сердца позволяет не только раскрыть вопрос об особенностях возрастной морфологии, топографии развития данного органа у домашних птиц, но и до настоящего времени остается актуальным (Крикливый Н.Н., 2007; Чумина Н.Г., 2010; Разлугу Ю.В., 2011). Для студентов тем или иным способом связанных с птицеводческой деятельностью могут быть использованы при решении возникших проблем, результаты исследования позволят получить и раскрыть многие аспекты в вопросах морфофизиологии птиц (Харлан А.Л., 2011).

**Материалы и методы исследования.** Был проведен анализ современной научной литературы по вопросам особенностей морфологии сердечно-сосудистой системы. Были обобщены и систематизированы исследования современных авторов.

**Результаты исследования.** Сердце является центральным органом кровеносной системы, который представляет собой полый мышечный орган, имеющий конусовидную форму, функционирующий в качестве насоса и обеспечивающий движение крови по системе кровообращения. Оно представляет собой окологердечную сумку, размещенное в грудной полости. Сердце птиц расположено несколько правее, чем у большинства млекопитающих животных, и частично прикрыто воздухоносными мешками. Верхушка сердца расположена между долями печени и мышечным отделом желудка (Чебышев Н.В., 2006; Гиляров М.С., 2003; Анашкина Е.Н., 1997; Грин Н., 1993; Каурр В.Ф., 1988).

Различают основание сердца и верхушку, направленную кпереди, книзу и влево. В основании сердца находятся предсердия. Из основания сердца выходят: аорта и легочный ствол, в основание сердца входят: верхняя и нижняя полые вены, правые и левые легочные вены. Таким образом, сердце фиксировано на перечисленных выше крупных сосудах (Воробьев В.П., 2000; Шнейберг Я.И., 1988; Вили К., 1968).

Внутренняя полость сердца разделена продольной перегородкой на правую и левую половину. Каждая из них, в свою очередь, разделена на две камеры. Всего в сердце имеется четыре камеры: две верхние - левое и правое предсердия, две нижние - левый и правый желудочки. Как правое, так и левое предсердие с боковых сторон имеют небольшие выступающие части – ушки (Черкашина А.Л., 2007; Калашникова В.А., 2006; Саленко Т.П., 2001; Каурр В.Ф., 1988).

Левое предсердие принимает, а левый желудочек выталкивает артериальную кровь, насыщенную кислородом. Правое предсердие принимает, а правый желудочек выталкивает венозную кровь, насыщенную углекислотой. На поверхности сердца имеются две бороздки:

одна из них поперечная, на границе между предсердиями и желудочками, а другая - продольная, на границе между желудочками (Исембергенова С.К., 2006; Билич Г.Л., 2001; Комаров А.В., 1981).

В правое предсердие впадают две передние и одна задняя полые вены. Они снабжены перепончатыми клапанами, которые препятствуют обратному поступлению крови из предсердия в вены. В перегородке предсердий имеется овальная впадина - остаток овального отверстия, имеющегося в сердце эмбриона (Пасечник В.В., 2008; Калюжник В.Г., 2002; Парсонс Т., 1992; Auctik R.E., 1986).

Правый желудочек имеет форму трехгранной пирамиды, обращенной основанием кверху, его тонкие стенки не доходят до верхушки сердца. Между предсердием и желудочком расположено атриовентрикулярное отверстие в форме косой щели. Отверстие закрывается треугольной мышечной заслонкой, которая свободным концом вдается в полость желудочка. Когда кровь поступает из предсердия в желудочек, треугольная заслонка опускается. Артериальное отверстие, ведущее из правого желудочка в легочную артерию, закрывается тремя полулунными клапанами (Васильев К.А., 1999; Козлов М.А., 1999; Полищук С.В., 1991; Fazzini U., 1987).

В левое предсердие открывается одно общее отверстие двух легочных вен. Впереди него имеется утолщенный выступ в виде заслонки, обращенный своим свободным концом в полость левого предсердия. Заслонка препятствует обратному поступлению крови в легочные вены (Журавлева В.Н., 2004; Михайлов С.С., 1987; Fazzini U., 1987).

Левый желудочек конической формы, толстостенный, доходит до верхушки сердца. Левое атриовентрикулярное отверстие, ведущее из левого предсердия в левый желудочек, закрывается двустворчатой заслонкой. В полость левого желудочка вдаются сосцевидные мышечные возвышения. Концы их переходят в сухожильные нити, которые прикрепляются к двустворчатой заслонке левого желудочка (Солодовникова И.И., 2003; Бурак Г.Г., 1984; Антипчук Ю.П., 1983; Каурр В.Ф., 1988).

Артериальное отверстие, ведущее из левого желудочка в аорту, снабжено полулунными клапанами. Отверстие аорты расположено между двустворчатой заслонкой и продольной перегородкой (Хрусталева И.В., 2000).

Снабжение кровью самого сердца осуществляется по двум коронарным артериям, отток венозной крови - по трем венам (Вракин В.Ф., 2001; Ниматулина Р.Р., 1999).

Стенка сердца состоит из трех слоев: наружного - эпикарда, среднего - миокарда и внутреннего - эндокарда (Скопичев В.Г., 2005; Abbas S.K., 2006).

Эпикард - наружная третья оболочка сердца. Она представляет собой серозную оболочку, состоящую из тонкого слоя соединительной ткани, включающей крупные кровеносные сосуды и жировую ткань. Сверху эпикард покрыт мезотелием. Эпикард, являясь висцеральным листком перикарда, имеет строение серозной оболочки (Зинкович И.И., 2000; Nesbit T., 2006). Он очень тонок и состоит из соединительной ткани, в которой часто, особенно у сосудов, располагаются жировые дольки. Снаружи эпикард покрыт серозным эпителием, состоящим из плоских клеток полигональной формы. В эпителии эпикарда встречаются и многоядерные клетки. В эпикарде проходят крупные кровеносные и лимфатические сосуды, а также нервы (Гуков Ф.Д., 2002; Ковальский П.А., 1957; Winter E.M., 2007; Abbas S.K., 2006).

Миокард представляет собой сложную оболочку. Он образован двумя разновидностями мышечной ткани - рабочей и проводящей (Скопичев В.Г., 2005; Синев А.Ф., 1985; Каурр В.Ф., 1988; Auctik R.E., 1986).

Сердечная мышца, образующая среднюю часть сердечной стенки, хотя и подразделяется на миокард предсердий и желудочков, но по своему происхождению и строению представляет собой единое целое. Такое строение миокарда как нельзя более соответствует его функциональным особенностям (Бакшутова Е.В., 2006; Ромер А., 1992).

Миоциты желудочков и предсердий имеют некоторые отличия. В миоцитах

предсердий меньше митохондрий, миофибрилл, саркоплазматической сети, слабее развита Т-система (Скрипник Т.Г., 2005; Аршавский И.А., 1967; Prinzing R., 1995).

Установлено, что предсердные кардиомиоциты выделяют вещества, участвующие в регуляции кровяного давления и препятствующие образованию тромбов. Прочно соединяясь, кардиомиоциты образуют мышечные волокна, которые окружены тонковолокнистой соединительной тканью с многочисленными капиллярами (Наточин Ю.В., 2001; Баженов Е.М., 2000).

Эндокард по своему происхождению соответствует сосудистой стенке, а перечисленные слои – трем оболочкам сосудов. Эндокард развит не одинаково в различных отделах сердца. Он толще в левых камерах. Наибольшей толщины и сложности эндокард достигает на левой поверхности перегородки желудочков и у выходных отверстий аорты и легочной артерии. Наиболее тонок эндокард на трабекулах, где нет отчетливого деления на слои (Скрипник Т.Г., 2005; Ковальский П.А., 1957).

В сердце имеется опорный скелет из фиброзных колец на границе между предсердиями и желудочками и в устьях аорты и лёгочной артерии. Фиброзные кольца образованы коллагеновыми пучками плотной соединительной ткани. Эти кольца препятствуют растяжению отверстий и обеспечивают прикрепление свободных концов волокон миокарда (Павлович Е.Р., 2001; Ильин П.А., 1994).

Нервы сердца группируются из ветвей пограничного симпатического ствола, из нервных волокон блуждающего нерва и спинномозговых волокон. Во всех трёх оболочках они образуют нервные сплетения, сопровождаемые интрамулярными ганглиями. В сплетениях наблюдаются как чувствительные, так и двигательные нервные волокна. Эти нервные сплетения и узлы регулируют частоту и силу сокращений сердца, работу сердечных клапанов (Суслова О.В., 2005; Ниматулина Р.Р., 1999; Косицкий Г.И., 1995).

Ритмичная работа сердца обусловлена нервно-мышечной системой, проводящей возбуждение (Селянский В.М., 1992; Auctik R.E., 1986).

Первичное возбуждение возникает в предсердии, в наиболее возбудимом синусном узле. Атипическая ткань этого узла находится в протоплазматической связи с мышцей правого предсердия. Поэтому возбуждение переходит и на мышцу предсердия во всех направлениях. Затем возбуждение распространяется на узел Ашоф-Тавара и по ножкам пучка Гисса проходит к мышцам правого и левого желудочков (Высоцкий Ю.А., 2004; Селянский В.М., 1992).

В зависимости от вида и возраста птицы, функционального состояния мышц сердца и нервных возбуждений, к ним поступающих, температуры окружающего воздуха сердце может делать 200-300 сокращений в минуту, молодняка - 400-500 (Тамбиев А.Х., 2008; Акаевский А.И., 2003; Смирнов Ю.И., 1997; Брем А.Э., 1992).

Импульсы возбуждения возникают в сердце под влиянием протекающих в нем самом процессов. Это явление получило название автоматии. В сердце существуют центры, которые генерируют импульсы, ведущие к возбуждению миокарда с последующим его сокращением. Такие центры обеспечивают ритмичное сокращение в необходимой очередности предсердий и желудочков сердца. Сокращения обоих предсердий, а затем обоих желудочков осуществляются практически одновременно (Иванов И.Н., 2006; Гуляева А.С., 2005; Somlyo A.P., 1994).

Внутри сердца, вследствие наличия клапанов, кровь движется в одном направлении. В фазе диастолы (расширение полостей сердца, связанное с расслаблением миокарда) кровь поступает из предсердий в желудочки. В фазе систолы (последовательные сокращения миокарда предсердий, а затем желудочков) кровь поступает из правого желудочка в легочный ствол, из левого желудочка - в аорту (Леках В.А., 2002; Кузьменко Т.В., 1981; Хабарова А.Я., 1961; Каурр В.Ф., 1988).

В фазе диастолы сердца давление в его камерах близко к нулю; 2/3 объема крови, поступающей в фазе диастолы, притекает из-за положительного давления в венах вне сердца

и 1/3 подкачивается в желудочки в фазу систолы предсердий. Предсердия являются резервуаром для притекающей крови; объем предсердий может возрасти, благодаря наличию предсердных ушек (Поляков В.П., 1993; Фисинин В.И., 1990; Мелехин Г.П., 1977; Austik R.E., 1986).

Отрицательное воздействие на деятельность сердца оказывают резкие колебания температуры, шум, магнитные поля, многие химические вещества (сероуглерод, металлоорганические соединения, бензол, свинец) (Алексеев В.И., 2005; Привес М.Г., 1999; Оганов Э.О., 1990).

### Список литературы

1. Афанасьев Ю.И., Юрина Н.А., Котовский Е.Ф. и др. Гистология. М.: Медицина. 2001. 744 с.
2. Бакшутова Е.В. Современные представления об архитектонике миокарда / Морфологические ведомости. 2006. №1–2. С. 43.
3. Васильев, К.А. Марышев А.В., Малакшинов М.Б. и др. Практикум по анатомии домашних животных и птиц. Улан-Удэ. 1999. 360 с.
4. Воробьев В.П. Атлас анатомии человека. Мн.: Харвест. 2000. 1472 с.
5. Высоцкий Ю.А., Бородина Г.Н., Хаменский С.А., Требушинина Т.Г., Мегедекова И.Ю. Особенности строения опорно-сократительного комплекса сердца / Морфологические ведомости. 2004. №1-2. С.46-49.
6. Журавлева В.Н., Кондратьева Е.А., Кондратьева И.А. и др. Анатомия. Учебный словарь: толкование и сочетаемость терминов. М.: Наука. 2004. 312 с.
7. Зинкович И.И., Удод А.А. Патологическая физиология органов и систем. Типовые патологические процессы / Тезисы докладов Второго Российского конгресса по патологической физиологии. М. 2000. С. 132.
8. Харлан А.Л., Крикливый Н.Н., Тельцов Л.П. Критические периоды развития внутренних органов сельскохозяйственной птицы / Научные труды Южного филиала Национального университета биоресурсов и природопользования Украины Крымский агротехнологический университет. Серия: Ветеринарные науки. 2012. № 148. С. 52-58.

### Сведения об авторе

Ежикова Марина Ивановна – магистрант Брянского государственного университета И.Г. Петровского, e-mail: marina.ezhikova.93@mail.ru

Зайцева Елена Владимировна – доктор биологических наук, профессор кафедры биологии Брянского государственного университета И.Г. Петровского, e-mail: z\_ev11@mail.ru

## MORPHOLOGY CARDIOVASCULAR SYSTEM OF BIRDS

M.I. Ezhikova, E.V. Zaitseva

Bryansk state University

The article presents the current state of science on the morphological features of the cardiovascular system in birds. The analysis of the current scientific literature, allowing compiling and organizing data on heart structure in farm birds.

**Keywords:** *cardiovascular system, epicardium, myocardium, endocardium.*

### References

1. Afanasiev Y.I., Yurina N.A., Kotovsky E.F. et al. Histology. M.: Medicine. 2001. 744 p.
2. Bakshutova E.V. Current concepts of architectonic infarction / Morphological statements. 2006. №1-2 - S. 43.

3. Vasilyev K.A., Maryshev A.V., Malakshinov M.B. et al. Workshop on the anatomy of domestic animals and birds. Ulan-Ude. 1999. 360 p.
4. Vorobyov V.P. Atlas of Human Anatomy. Mn .: Harvest. 2000. 1472 p.
5. Vysotsky Yu., Borodin G.N., Hamensky S.A., Trebushinina T.G., Megedekova I.Y. Features of the structure of support-contractile cardiac complex / Morfology statements. 2004. №1-2. S.46-49.
6. Zhuravleva V.N., Kondratyev E.A., Kondratiev I.A. et al. Anatomy. Study Dictionary: interpretation and compatibility terms. M .: Nauka. 2004. 312 p.
7. Zinkovich I.I., Udod A.A. Pathophysiology of organs and systems. Typical pathological processes / Abstracts of the Second Congress of the Russian pathophysiology. M. 2000. P. 132.
8. Kharlan A.L., Krikliiviy N.N., Teltsov L.P. Critical periods in the development of the internal organs of poultry / Proceedings of the Southern Branch of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine Crimean Agriculture technology university. Series: Veterinary Science. 2012. № 148. S. 52-58.

#### **About author**

Egikova M.I – Bryansk State University Undergraduate, e-mail: marina.ezhikova.93@mail.ru

Zaytseva E.V. - Doctor of Biological sciences, professor of the Bryansk State University, e-mail: z\_ev11@mail.ru

УДК 581.2

**МОЛЕКУЛЯРНО-ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПО ГЕНУ VoLA-DRB3 КОРОВ,  
ИНФИЦИРОВАННЫХ ВИРУСНЫМ ЛЕЙКОЗОМ КРС****М.Н. Салина, М.С. Кобозева, Р.Б. Ахмедов**

Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского

Одним из важнейших факторов ограничения продуктивности и ухудшения качества продукции животноводства являются различные заболевания, в частности вирусный лейкоз КРС. Он наносит большой экономический ущерб из-за снижения продуктивности заболевших животных, уменьшения периода эксплуатации лактирующих больных коров на несколько лет, гибели и вынужденной выбраковки животных, утраты генофонда высокопродуктивных животных. В данной работе был изучен аллельный полиморфизм гена VoLA-DRB3 с помощью метода ПЦР-ПДРФ у крупного рогатого скота товарного хозяйства ОАО «Бежицкое».

**Ключевые слова:** вирус лейкоза крупного рогатого скота (ВЛКРС), главный комплекс гистосовместимости (ГКГ), VoLA-DRB3, полимеразная цепная реакция с изучением полиморфизма длин рестрикционных фрагментов (ПЦР-ПДРФ).

Лейкоз крупного рогатого скота – хроническая инфекционная болезнь опухолевой природы. Характеризуется злокачественным разрастанием кроветворной ткани, нарушением процесса созревания клеток крови с интенсивным образованием молодых клеточных форм, образованием опухолей в кроветворных и других органах и тканях [2,3].

Основным характерным признаком лейкоза является изменение кроветворных органов и периферической крови.

Инкубационный период (до появления изменений в периферической крови) при экспериментальном заражении длится 60 - 750 дней, а при спонтанном - 2-6 лет [1].

Взаимодействие вируса лейкоза КРС и макроорганизма в конкретных условиях внешней среды проходит по следующим стадиям:

1. Предлейкозная
2. Начальная (доклиническая)
3. Развернутая
4. Терминальная (опухолевая).

Лейкоз крупного рогатого скота вызывается РНК-содержащим вирусом. Согласно современной классификации вирус лейкоза КРС- ретровирус, похожий на вирус лейкемии Т-клеток человека, принадлежит к семейству Retroviridae, подсемейству Onkornaviridae. Источником возбудителя заболевания являются инфицированные животные на всех стадиях инфекционного процесса. Основным местом локализации вируса служат лимфоциты крови, кроветворных органов, селезенки, лимфатических узлов, костного мозга, молока [4,10].

В геноме млекопитающих имеется система антигенов лейкоцитов, называемая главным комплексом гистосовместимости (ГКГ).

Установлено, что в пределах ГКГ локализуются не только гены, контролирующие главные трансплантационные антигены, но и гены, определяющие уровень иммунного ответа на тот или иной антиген, так называемые Ir-гены (Immune response genes). Главный комплекс гистосовместимости играет главную роль в развитии клеточного и гуморального иммунитета [12,16,21].

Система VoLA — это главный комплекс гистосовместимости у крупного рогатого скота. Так же, как и ГКГ у других видов, VoLA подразделяется на гены класса I, класса II и класса III [8].

Система VoLA закодирована в 23 хромосоме [5,13,18,19], содержит более 154 генов [17] и разделена на три класса I, II, III [15,22].

Геномная организация ГКГ I класса очень сложна и отличается у разных видов млекопитающих [24].

Молекулы ГКГ I класса обладают высокой степенью полиморфизма, высоким уровнем экспрессии в конкретных клетках, а также способностью связывать небольшие молекулы пептида и предоставлять их Т-клеткам [20].

Гены ГКГ класса II расположены в двух областях IIa и IIb. Эти две области разделены относительно большим расстоянием, охватывающим не менее 15 сМ от DYA региона IIb класса до DRB3 региона класса IIa. Такая организация генов II класса у КРС возникла в результате хромосомной инверсии [11].

На сегодняшний день в базе данных (IPD)- ГКГ определены 119 аллелей гена DRB3 [23].

III класс ГКГ включает гены C4 и BF – факторы системы комплемента, ген CYP 21 – стероид-21-гидролаза, гены TNFA и TNFB –  $\alpha$  и  $\beta$  факторы некроза опухоли, а также ген HSP70.

Высокий уровень полиморфизма многих генов ГКГ играет важную роль в развитии устойчивости или чувствительности животных к инфекционным заболеваниям.

Определяющую роль в генетической устойчивости коров к лейкозу играет ген BoLA-DRB3, аллели которого отвечают за восприимчивость или устойчивость животного к вирусу лейкоза.

Среди пород КРС России ген BoLA-DRB3 представлен 54 аллелями (или более, согласно последним данным), из которых 3 определяют устойчивость к вирусу, а 4 связаны с восприимчивостью. Показано, что животные, несущие аллели \*11, \*23, \*28 - устойчивые (У), они не склонны к переходу лейкоза в стадию персистентного лимфоцитоза. В частности, Сулимовой Г.Е. на большой выборке было показано, что \*11, \*23, \*28 аллели гена BoLA-DRB3.2 являются устойчивыми к лейкемии. Животные, несущие в своем генотипе аллели \*22, \*24, \*16, \*8, являются чувствительными. Остальные аллели являются нейтральными (Н) и не связаны ни с устойчивостью, ни с чувствительностью к персистентному лимфоцитозу [7]. Носители аллелей устойчивости гена BoLA DRB3 не заболевают лейкемией, несмотря на то, что они могут быть вирусносителями. Исследованиями было доказано, что аллели устойчивости имеют доминирующее положение, и животные, несущие их в гетерозиготном состоянии, не заболевают лейкозом [14].

### **Материалы и методы**

Исследования проведены в ИННО - центре биотехнологии и экологии БГУ в период с 2014 по 2015 года.

В работе были исследованы образцы крови РИД+ животных черно-пестрой породы из ОАО «Бежицкое» (85 образцов).

Отбор крови проведен из яремной вены одноразовыми шприцами объемом 5 мл в стерильные пробирки Флоринского, содержащие 1 мл 0,5М раствора Трилона Б. Кровь хранилась в этих же пробирках в холодильнике при температуре +2<sup>0</sup> Цельсия.

Изучение генетической устойчивости крупного рогатого скота к вирусу лейкоза КРС методом ПЦР-ПДРФ основано на определении генетического полиморфизма гена BoLA-DRB3 и выявлении аллелей, ассоциированных с устойчивостью или чувствительностью к ВЛКРС и ответственных за формирование иммунной реакции к вирусу.

Метод ПЦР-ПДРФ для анализа аллельного полиморфизма гена BoLA-DRB3 животных включает несколько этапов работы:

1. Выделение ДНК из крови или спермы животных.
2. Проведение ПЦР с праймерами к гену BoLA-DRB3 для получения фрагмента длиной 284 п.о.
3. Электрофорез продукта амплификации.
4. Рестрикция фрагмента 284 п.о. ферментами RsaI, HaeIII, BstIY.
5. Электрофорез продуктов рестрикции в полиакриламидном геле (ПААГ).

На ДНК, выделенной из крови животных, проводится полимеразная цепная реакция с использованием праймеров, позволяющих амплифицировать фрагмент гена *BoLA-DRB3* размером 284 п.о.

Специфичность праймеров, подбор температуры их отжига и глубину протекания реакции ПЦР проверяли с помощью электрофореза амплифицированного фрагмента в агарозном геле. Получаемые спектры рестрикции анализировали с помощью программного обеспечения фирмы BioRad на основании таблиц рестрикции аллелей гена *BoLA-DRB3.2*.

Состав праймеров: HLO-30: прямой 5' - ATC CTC TCT CTG CAG CAC ATT TCC - 3'; HLO-32: обратный 5' - TCG CCG CTG CAC AGT GAA ACT CTC - 3'[14].

В состав ПЦР смеси кроме праймеров и ДНК входили 200 мкМ каждого нуклеозидтрифосфата (НПО «СибЭнзим»); 1,0 единицы Hot Start Taq-полимеразы (НПО «СибЭнзим»); 2мкМ хлористого магния (НПО «СибЭнзим»); 2.0 мкл 10-кратного буфера для полимеразы. Состав буфера: 670 mM Трис-НСl, pH 8.8/25°C, 166 mM (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. (НПО «СибЭнзим»); автоклавированная дистиллированная вода.

Реакцию проводили в амплификаторе «Терцик» фирмы «ДНК-технология». ДНК денатурировали при 95°C в течение 15 мин, далее проводили 30 циклов амплификации в следующем режиме: 95°C – 2 сек., отжиг праймеров при 68°C – 16 сек., элонгация при 72°C – 15 сек.. Заключительная элонгация 72°C – 2 мин.

Для определения полиморфизма гена *BoLA-DRB3* ПЦР смесь обрабатывали эндонуклеазами *Rsa I* в 1x буфер SE B, *Hae III* в 1x буфер SE G и *Bst X2I* в 1x буфер SE G при 37°C 1ч. для разделения фрагментов ДНК проводили электрофорез в 9% ПААГ. Фиксацию и обработку результатов ПЦР осуществляли с помощью системы GelDoc фирмы BioRad.

### Результаты исследования

Было проанализировано 85 образцов крови РИД+ животных черно-пестрой породы из товарного хозяйства ОАО «Бежицкое».

При проведении ПЦР в указанных выше условиях амплифицировался фрагмент ДНК длиной 284 п.о, что соответствует литературным данным. После его расщепления рестрицирующими эндонуклеазами *Rsa I*, *Hae III*, *Bst X2I* на электрофореграммах появились специфические наборы полос (рис. 1, рис. 2, рис. 3).

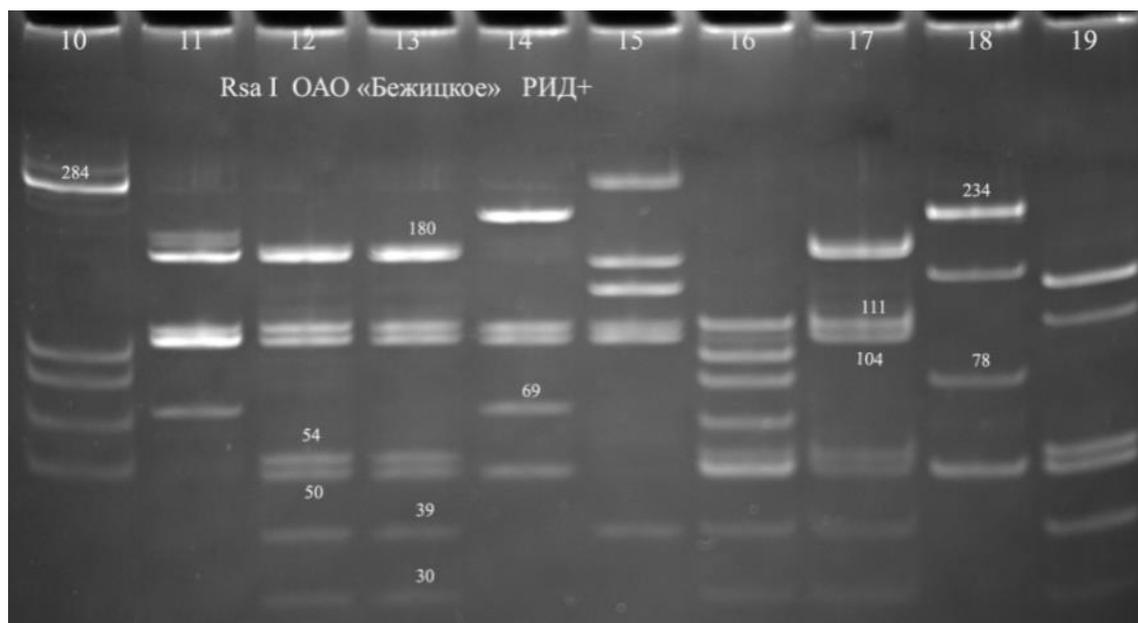


Рис. 1 Электрофореграмма продуктов рестрикции эндонуклеазой *Rsa I*.

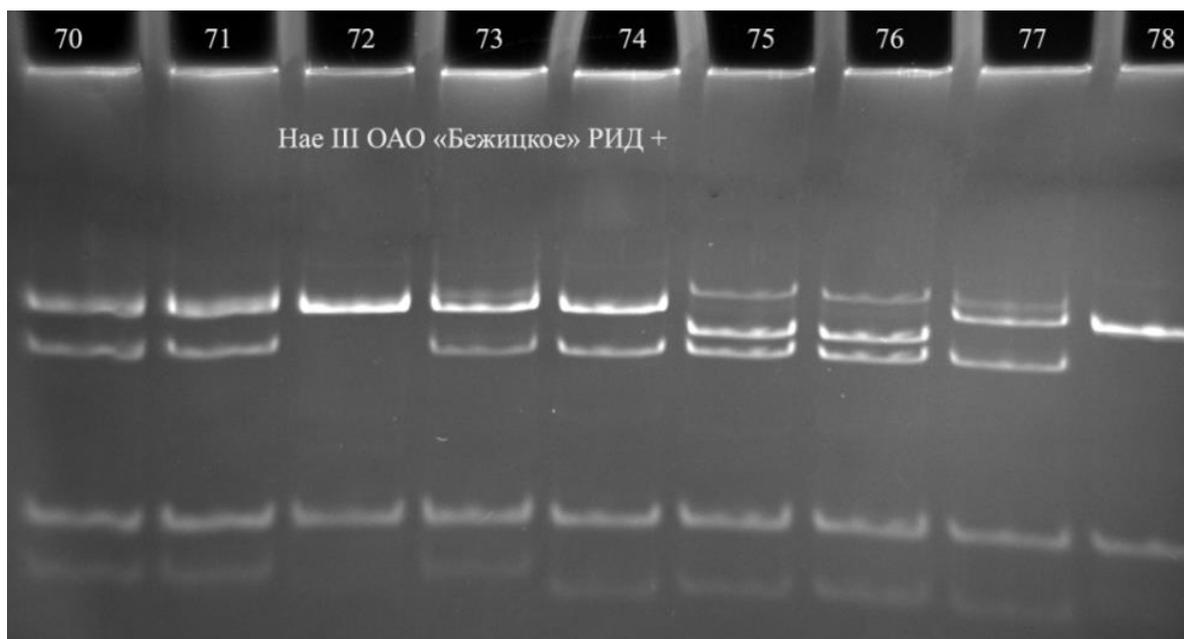


Рис. 2 Электрофореграмма продуктов рестрикции эндонуклеазой Hae III.

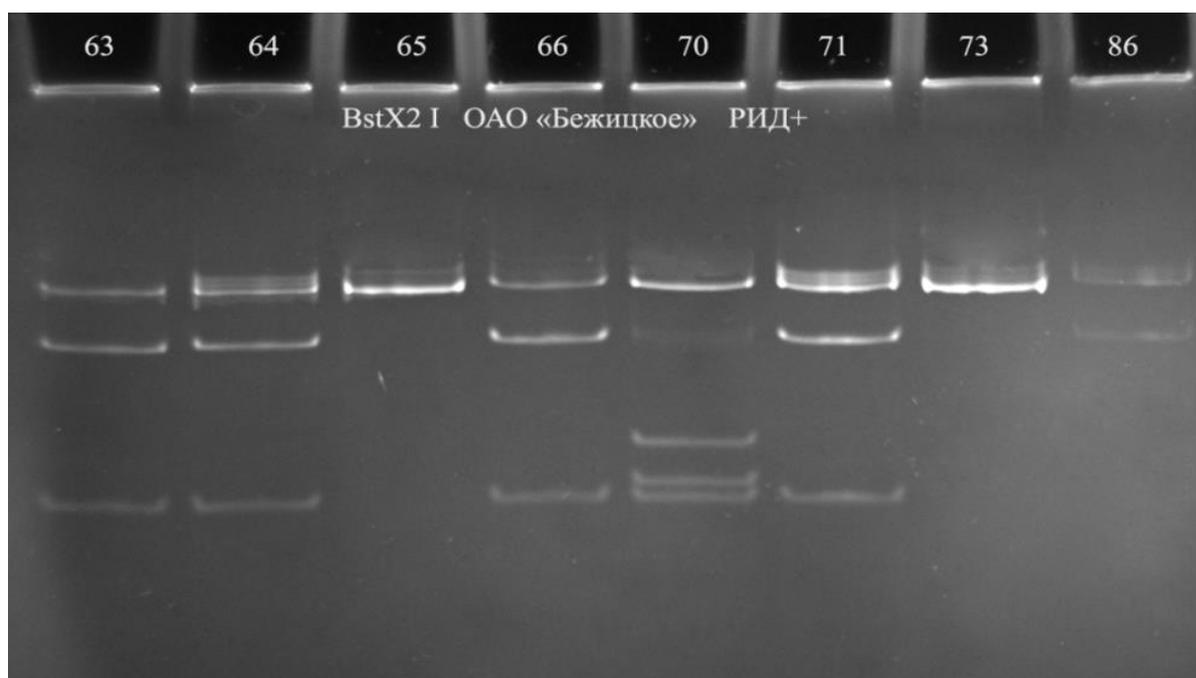


Рис. 3 Электрофореграмма продуктов рестрикции эндонуклеазой Bst X2 I.

Нами было проведено генотипирование РИД+ животных из товарного хозяйства ОАО «Бежицкое» по гену BoLA-DRB3.

Проведен анализ распределения частот аллелей BoLA-DRB3, ассоциированных с устойчивостью и восприимчивостью к лейкозу у изученных пород КРС. Полученные результаты представлены в таблице 1.

Как следует из данных таблицы 1, коровы имеют в совокупности 19 разных аллелей из 54 возможных. При этом наблюдается значительное преобладание в этих популяциях коров, несущих аллели, нейтральные по отношению к вирусу лейкоза. Наибольшее количество животных несет аллели, нейтральные по отношению к вирусу лейкоза КРС \*3 и меньшее количество коров - \*1, \*15, \*31, \*44. Общее количество нейтральных аллелей составляет 47,7%, аллелей чувствительности – 37%, аллелей устойчивости – 15,3%.

Таблица 1

## Частота встречаемости аллелей BoLA-DBD3 у коров

№ аллеля	Частота аллелей	
	ОАО «Бежицкое», (n = 170)	
Аллели, определяющие чувствительность к лейкозу		
8	9,4	37
16	8,8	
22	7,6	
24	11,2	
Аллели, определяющие устойчивость к лейкозу		
11	10	15,3
23	0,6	
28	4,7	
Аллели, нейтральные по отношению к лейкозу		
3	24,1	47,7
7	2,3	
15	0,6	
18	9,4	
29	1,8	
10	1,8	
12	1,8	
31	0,6	
44	0,6	
20	1,2	
27	2,9	
1	0,6	
Все аллели		

Анализ генотипической структуры коров по гену BoLA-DRB3 представлен в таблице 2. Животные были распределены по 6 группам: ЧЧ, ЧН, УУ, УН, УЧ, НН.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что преобладающее большинство составляют особи, имеющие генотипы ЧЧ, ЧН, Н/Н. При этом среди них большинство составляют особи, несущие нейтральные аллели в гомозиготном состоянии: 25,9%. Также в гомозиготном состоянии присутствуют аллели восприимчивости – 16,35%. Реже встречаются аллели устойчивости в гомозиготном состоянии – 5,85%.

В гетерозиготном состоянии аллели восприимчивости встречаются совместно с нейтральными аллелями достаточно часто – 32,9%. Генотипы, имеющие сочетание аллелей устойчивости и восприимчивости наблюдаются у 8,4% коров. Также имеются генотипы, сочетающие в себе нейтральные и устойчивые аллели – 10,6%.

**Выводы**

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что для направленной работы по снижению количества лейкозных животных и повышению генетической устойчивости к вирусу лейкоза КРС необходимо вести селекционную работу по насыщению стада аллелями устойчивости.

Таблица 2

## Распределение коров по генотипам BoLA-DRB3

Генотип по гену BoLA-DRB3		Частота встречаемости генотипа, %	
Отношение к ВЛКРС	Генотип	ОАО «Бежицкое», (n = 85)	
Ч/Ч	8/8	4,6	16,35
	8/16	2,35	
	22/24	3,5	
	16/24	2,35	
	24/24	2,35	
	16/16	1,2	
Ч/Н	22/3	2,35	32,9
	16/3	4,6	
	24/3	7,1	
	22/20	1,2	
	16/27	1,2	
	22/18	3,5	
	8/15	1,2	
	22/29	2,35	
	24/10	2,35	
	24/12	1,2	
	8/3	3,5	
16/7	2,35		
У/У	11/11	3,5	5,85
	11/28	2,35	
У/Н	28/7	1,2	10,6
	28/27	1,2	
	11/3	4,6	
	11/7	1,2	
	11/29	1,2	
	28/3	1,2	
У/Ч	11/8	1,2	8,4
	28/16	1,2	
	23/22	1,2	
	11/16	1,2	
	28/24	1,2	
	11/22	1,2	
	28/8	1,2	
Н/Н	3/31	1,2	25,9
	18/44	1,2	
	3/10	1,2	
	18/18	2,35	
	1/18	1,2	
	3/12	2,35	
	3/18	7,1	
	3/27	3,5	
	3/3	4,6	
	18/20	1,2	
Всего		100	100

**Список литературы**

1. Архипов Н.И., Бакулов И.А., Соковых Л.И. Медленные инфекции животных. М.: Агропромиздат. 1987. 192 с.
2. Крикун, В.А. Лейкоз крупного рогатого скота и иммунологическая толерантность // Ветеринария. № 6. 2002. С. 7-9.
3. Кузнецова А.П., Смирнов В.П. Проблемы лейкоза сельскохозяйственных животных / Ветеринария. №3 — 1998 -С.32-33.
4. Кукайн Р.А. Нагаева Л.И., Ложа В.П. Вирус лейкоза крупного рогатого скота. Рига: Зинатне. 1982. 175 с.
5. Петров Р.В. Иммунология. М.: Медицина, 1982. 368.
6. Смирнов Ю.П. Развитие лейкозного процесса в зависимости от среды обитания крупного рогатого скота. Аграр.НауКа. 1998. № 1. С.18-19.
7. Сулимова Г.Е. Удина И.Г., Шайхаев Г.О., Захаров И.А. ДНК-полиморфизм гена BoLA-DRB3 у крупного рогатого скота в связи с устойчивостью и восприимчивостью к лейкозу // Генетика. 1995. Т. 31. С. 1294 – 1299.
8. Удина И.Г., Карамышева Е.Е., Сулимова Г.Е., Павленко С.П., Туркова С.О., Орлова А.Р., Эрнст Л.К. Сравнительный анализ айрширской и черно-пестрой пород крупного рогатого скота по маркерам гистосовместимости // Генетика. 1998. Т. 34. № 12. С. 1-7.
9. Фадеева Н. Б. Современная энциклопедия фельдшера. Минск: Современный литератор. 2000. 989 с.
10. Шишков В.П. Бурба Л.Г. Лейкозы и злокачественные опухоли животных. М.: Агропромиздат. 1988. 301 с.
11. Band M., Larson J. H., Womack J. E., Lewin H. A. A radiation hybrid map of BTA23: identification of a chromosomal rearrangement leading to separation of the cattle MHC class II subregions // Genomics. 1998.V. 53(3). P. 269–275.
12. Batra T.R., Lee A.J., Gavora J.S., Stear M.J. Class I alleles of the bovine major histocompatibility system and their association with economic traits // J. Dairy Sci. 1989. V. 72(8) P. 2115-24.
13. Beever J.E., Lewin H.A., Barendse W., Andersson L., Armitage S.M., Beattie C.W., Burns B.M., Davis S.K., Kappes S.M., Kirkpatrick B.W., Ma R.Z., Mc Graw R.A., Stone R.T., Taylor J.F. Report of the first workshop on the genetic map of bovine chromosome 23 // Anim Genet. 1996. V.27(2). P. 69-75.
14. van Eijk M.J., Stewart-Haynes J.A., Lewin H.A. Extensive polymorphism of the BoLA-DRB3 gene distinguished by PCR-RFLP // Anim Genet. 1992. V. 23(6). P. 483-96.
15. van Eijk M.J., Beever J.E., Da Y., Stewart J.A., Nicholaides G.E., Green C.A., Lewin H.A. Genetic mapping of BoLA-A, CYP21, DRB3, DYA, and PRL on BTA23 // Mamm Genome. 1995. V. 6(2). P. 151-2.
16. Ellis S., Codner G. The impact of MHC diversity on cattle T cell responses // Vet. Immunol Immunopathol. 2011.
17. Elvik C. G. The genome sequence of taurine cattle: A window to ruminant biology and evolution // Science. 2009. V. 324. P. 522–528.
18. Fries R., Eggen A., Womack J.E. The bovine genome map // Mammalian Genome. 1993. V. 4. P. 405–428.
19. Hediger R., Ansari H.A., Stranzinger G.F. Chromosome banding and gene localizations support extensive conservation - of chromosome structure between cattle and sheep // Cytogenet Cell Genet. 1991. V. 57(2-3). P. 127-34.
20. Kaufman J., Salomonsen J., Flajnik M. Evolutionary conservation of MHC class I and class II molecules - different yet the same // Semin. Immunol. 1994. V.6. P. 411-424.
21. Lewin H. A. Disease resistance and immune response genes in cattle: strategies for their detection and evidence of their existence // J. Dairy Sci. 1989. V.72(5). P. 1334-48.

22. Lewin H.A., Russel G.C., Glass E.J. Comparative organization and function of the major histocompatibility complex of domesticated cattle // *Immunol. Rev.* 1999. V. 167. P. 145-158.
23. Miyasaka T., Yakeshima S.-N., Sentsui H., Aida Y. Identification and diversity of bovine major histocompatibility complex class II haplotypes in Japanese Black and Holstein cattle in Japan // *J. Dairy Sci.* 2012. V. 95. P. 420-431.
24. Zidi A., Sanchez A., Obexer-Ruff G., Amills M. Sequence analysis of goat major histocompatibility complex class I genes // *J. Dairy Sci.* 2008. V. 91. P. 814–817.

#### Сведения об авторах

Салина Мария Николаевна – магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: masan4ik1@yandex.ru.

Кобозева Марина Сергеевна – аспирант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: kobozevamarina@mail.ru.

Ахмедов Роман Бахтиярович – аспирант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, e-mail: roma.akhmedov.91@mail.ru.

### MOLECULAR GENETIC ANALYSIS OF THE GENE BOLA-DRB3 COWS, CATTLE INFECTED WITH VIRAL LEUKEMIA

M.N. Salina, M.S. Kobozeva, R.B. Akhmedov

Bryansk State University

One of the most important factors limiting the productivity and deterioration of livestock products are a variety of diseases, particularly viral leukemia cattle. It causes great economic losses due to reduced productivity of diseased animals, reducing the period of operation of lactating cows sick for a few years, deaths and forced culling of animals, the loss of the gene pool of highly productive animals. In this work it was studied BoLA-DRB3 allelic polymorphism of the gene in cattle commodity economy of "Bezhitskoe".

**Keywords:** leukemia virus of cattle, major histocompatibility complex, BoLA-DRB3, polymerase chain reaction with the study of restriction fragment length polymorphism.

#### References

1. Arkhipov N.I., Bakulov I.A., Sokovykh L.I. Slow infection animals. M.: Agropromizdat. 1987. 192 p.
2. Krikun V.A. Leukemia cattle and immunological tollerantnost // *Veterinary Medicine.* Number 6. 2002. P. 7-9.
3. Kuznetsova A.P, Smirnov V.P. Problems leukemia farm animals. *Veterinary Medicine.* №3. 1998. P.32-33.
4. Kukayn R.A., Nagaeva L.I., Loga V.P. Leukemia virus of cattle. Riga: Zinatne. 1982. 175 p.
5. Petrov R.V. Immunology. M.: Medicine 1982. 368 p.
6. Smirnov Yu.P. The development of leukemic process, depending on the habitat of cattle // *Agropromizdat.* 1998. № 1. P.18-19.
7. Sulimova G.E., Udine I.G., Shaykhan G.O., Zakharov G.E. DNA polymorphism BoLA-DRB3 gene in cattle due to the resistance and susceptibility to leukemia // *Genetics.* 1995. V. 31. P. 1294 - 1299.
8. Udina I.G., Karamysheva E.E., Sulimova G.E., Pavlenko S.P., Turkova S.O., Orlov A.R., Ernst L.K. Comparative analysis of Ayrshire and Black Pied breeds of cattle on histocompatibility markers // *Genetics.* 1998. T. 34. № 12. P. 1-7.
9. Fadeev N.B. Modern Encyclopedia of paramedic. Minsk: A modern writer. 2000. 989 P.
10. Shishkov V.P., Burba L.G. Leukemia and malignant tumors of animals. M.: Agropromizdat, 1988. 301 p.

11. Band M., Larson J. H., Womack J. E., Lewin H. A. A radiation hybrid map of BTA23: identification of a chromosomal rearrangement leading to separation of the cattle MHC class II subregions // *Genomics*. 1998. V. 53(3). P. 269–275.
12. Batra T.R., Lee A.J., Gavora J.S., Stear M.J. Class I alleles of the bovine major histocompatibility system and their association with economic traits // *J. Dairy Sci.* 1989. V. 72(8) P. 2115-24.
13. Beever J.E., Lewin H.A., Barendse W., Andersson L., Armitage S.M., Beattie C.W., Burns B.M., Davis S.K., Kappes S.M., Kirkpatrick B.W., Ma R.Z., Mc Graw R.A., Stone R.T., Taylor J.F. Report of the first workshop on the genetic map of bovine chromosome 23 // *Anim Genet*. 1996. V.27(2). P. 69-75.
14. van Eijk M.J., Stewart-Haynes J.A., Lewin H.A. Extensive polymorphism of the BoLA-DRB3 gene distinguished by PCR-RFLP // *Anim Genet*. 1992. V. 23(6). P. 483-96.
15. van Eijk M.J., Beever J.E., Da Y., Stewart J.A., Nicholaides G.E., Green C.A., Lewin H.A. Genetic mapping of BoLA-A, CYP21, DRB3, DYA, and PRL on BTA23 // *Mamm Genome*. 1995. V. 6(2). P. 151-2.
16. Ellis S., Codner G. The impact of MHC diversity on cattle T cell responses // *Vet. Immunol Immunopathol*. 2011.
17. Elvik C. G. The genome sequence of taurine cattle: A window to ruminant biology and evolution // *Science*. 2009. V. 324. P. 522–528.
18. Fries R., Eggen A., Womack J.E. The bovine genome map // *Mammalian Genome*. 1993. V. 4. P. 405–428.
19. Hediger R., Ansari H.A., Stranzinger G.F. Chromosome banding and gene localizations support extensive conservation - of chromosome structure between cattle and sheep // *Cytogenet Cell Genet*. 1991. V. 57(2-3). P. 127-34.
20. Kaufman J., Salomonsen J., Flajnik M. Evolutionary conservation of MHC class I and class II molecules - different yet the same // *Semin. Immunol*. 1994. V.6. P. 411-424.
21. Lewin H. A. Disease resistance and immune response genes in cattle: strategies for their detection and evidence of their existence // *J. Dairy Sci.* 1989. V.72(5). P. 1334-48.
22. Lewin H.A., Russel G.C., Glass E.J. Comparative organization and function of the major histocompatibility complex of domesticated cattle // *Immunol. Rev*. 1999. V. 167. P. 145-158.
23. Miyasaka T., Yakeshima S.-N., Sentsui H., Aida Y. Identification and diversity of bovine major histocompatibility complex class II haplotypes in Japanese Black and Holstein cattle in Japan // *J. Dairy Sci.* 2012. V. 95. P. 420-431.
24. Zidi A., Sanchez A., Obexer-Ruff G., Amills M. Sequence analysis of goat major histocompatibility complex class I genes // *J. Dairy Sci.* 2008. V. 91. P. 814–817.

#### **About authors**

Salina M.N. – Bryansk State University Undergraduate, e-mail: masan4ik1@yandex.ru.

Kobozeva M.S. – Postgraduate of Bryansk State University, e-mail: kobozevamarina@mail.ru.

Akhmedov R.B. – Postgraduate of Bryansk State University, e-mail: roma.akhmedov.91@mail.ru.

УДК 591.3:636.5+636.058

## К МОРФОЛОГИИ ЖЕЛУДКА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПТИЦ

М.С. Селезнева, Е.В. Зайцева

Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского

В статье приводится современное состояние науки по строению пищеварительной системы сельскохозяйственных птиц. Авторами был произведен анализ современной научной литературы, позволяющий обобщить и систематизировать данные по строению желудка у сельскохозяйственных птиц.

**Ключевые слова:** пищеварительная система, желудок, мышечный желудок, железистый желудок, сельскохозяйственная птица

**Введение.** В настоящее время птицеводство является перспективным направлением, поэтому должны разрабатываться методы, повышающие продуктивные качества птицы и её устойчивость к различным факторам, что имеет большое практическое значение [4].

Для более подробного рассмотрения последствий влияния различных внешних факторов на организм птиц необходимо проводить широкие сравнительно-анатомические исследования. Только сравнительная морфология с использованием комплексных анатомических и морфометрических методов позволит лучше узнать, изучить и обосновать видовые, возрастные и породные различия, выявленные в структуре органов и систем организма каждого конкретного вида птицы [4].

Изучение строения пищеварительного тракта птицы определяет перспективы повышения продуктивности птицеводства. Прежде всего это относится к возрастной морфологии, которая раскрывает морфогенетические закономерности и механизмы, позволяя тем самым выявить критические периоды развития отдельных систем организма. Эти исследования, на наш взгляд, представляют как теоретический, так и практический интерес для биологии индивидуального развития (онтогенеза), ветеринарной медицины, зоотехники и морфологии.

**Материалы и методы исследования.** Был проведен анализ современной научной литературы по вопросам особенностей строения пищеварительной системы птиц. Были обобщены и систематизированы исследования современных авторов.

**Анатомические особенности желудка птиц**

Внутренние органы курицы представлены на рисунке 1. Аппарат пищеварения принято разделять на четыре отдела, которые отражены в схеме 1.

Головной отдел (ротоглотка)



Схема 1. Деление пищеварительного тракта птицы на отделы

Строение пищеварительной системы птиц во многом напоминает пищеварительный аппарат млекопитающих. Также включает в себя ротоглотку, пищеводно-желудочный отдел, тонкий и толстый кишечник.

Характер переработки твердого корма, поступающего в организм птиц и требующего измельчения при отсутствии зубов, обуславливает особенности функциональной морфологии пищеварительной системы [3].

Значительные отличия имеют ротовая полость и желудок. Другие органы – толстая и тонкая кишка, печень, поджелудочная железа сходны по строению с органами млекопитающих.



Рис. 1. Внутренние органы курицы.

Рассмотрим особенности строения наиболее отличающихся по сравнению с млекопитающими органов ротовой полости и желудка [3].

**Ротовая полость (*cavum oris*).** Ротовая полость покрыта плоским многослойным эпителием. Толщина эпителиального слоя и характер его ороговевания в разных участках ротовой полости характеризуется своими особенностями. Процесс ороговевания интенсивно протекает на границе с кожным покровом и завершается образованием кожного пласта. Многослойный плоский ороговевающий (сквамозный) эпителий расположен на основной пластинке, которая построена из рыхлой соединительной ткани.

Крышей ротовой полости является твердое небо. У кур оно имеет узкую небную щель, поперек небной щели размещены пять видов сосочков. На твердом небе и по бокам от него находятся отверстия слюнных желез, а также небольшие слюнные железы расположены по бокам от средней и задней части языка и на дорсальной поверхности основания языка (у гусей их нет). У птиц есть дополнительные железы угла рта и передние и задние подчелюстные железы. В основе строения этих желез лежит железистая долька, состоящая из слизистых клеток, радиально расположенных вокруг собирательного или центрального пространства (полости). Центральная полость переходит в выводной проток, стенка которого построена покровным эпителием [5].

Снизу ротовая полость ограничена языком. Основу языка составляет плотная соединительная ткань, содержащая эластические волокна. Снаружи язык покрыт слизистой оболочкой с сильно ороговевающим многослойным плоским эпителием. На абсорбальном конце спинки слизистая образует поперечный ряд высоких нитевидных сосочков.

В собственной пластинке слизистой оболочки залегают пакеты сложных трубчатых слизистых желез, выводные протоки которых открываются на спинке, боковых частях и

корне языка. С выводными протоками тесно связаны чувствительные вкусовые рецепторы (вкусовые почки, залегающие в эпителиальном пласте). По строению они напоминают вкусовые луковицы млекопитающих. Количество их незначительно. В языке имеются тактильные болевые нервные окончания.

Мышцы языка у куриных развиты слабо. Поперечно-полосатая мышечная ткань формирует три небольшие язычные мышцы. Язык птиц прочно соединен с подъязычной костью. Составная часть подъязычной кости заходит внутрь корня языка. Все остальные мышцы, приводящие в движение язык, относятся к подъязычному аппарату [5].

**Желудок - *ventriculus (s. gaster)*.** Желудок состоит из двух отделов – железистого и мышечного (рис. 2). Первый предназначен для выделения пищеварительного сока, второй – для перетирания пищи. В железистом желудке поступившая пища обогащается ферментами и, не задерживаясь, сразу попадает в мышечный желудок, где происходит ее химическая и механическая переработка.



Рис. 2. Железистый и мышечный желудок птицы

**Железистый желудок.** Стенка железистого желудка сформирована из слизистой, мышечной и серозной оболочек. Эпителиальным слоем слизистой оболочки является однослойный цилиндрический железистый эпителий, поэтому покровный эпителий желудка представляет собой обширное железистое поле, продуцирующее слизь.

Основная пластинка представлена рыхлой соединительной тканью, богатой клеточными элементами. В ней расположены однодольчатые (у уток) и многодольчатые (у кур и гусей) железы. Дольки отграничены друг от друга междольковой соединительной тканью. Внутри каждой дольки находится собирательная или центральная полость, покрытая однослойным железистым эпителием, переходящим в поверхностный эпителиальный слой железистого желудка [2].

Эпителий дольки железы погружается вглубь, формируя структуры аналогичные желудочным ямкам млекопитающих. В эти ямки открываются трубчатые железы, расположенные в дольке.

Плотно прилегая друг к другу, они лежат радиально вокруг собирательной полости. Трубчатые железы построены из одного типа железистых клеток. Электронно-микроскопические исследования свидетельствуют о том, что эти клетки выделяют как соляную кислоту, так и пепсиноген, поэтому в клетках находится развитая зернистая эндоплазматическая сеть, гладкая эндоплазматическая сеть, множество крупных митохондрий с большим количеством плотнолежащих крист, пузырьки и микротрубочки. В области комплекса Гольджи – зимогенные зернышки. По мнению некоторых авторов, синтез соляной кислоты осуществляется в апикальной части железистой клетки, а пепсиногена – в базальной [2].

Выводные протоки желез открываются на поверхности возвышений слизистой оболочки. Они хорошо видны невооруженным взглядом и называются железистыми

мешочками. Других желез в слизистой оболочке нет. Мощный слой мышечной пластинки слизистой оболочки железистого желудка является продолжением мышечной пластинки слизистой пищевода. Гладкомышечные клетки оплетают железы снизу, с боков и сверху.

Подслизистая основа состоит из рыхлой соединительной ткани и мало развита. Мышечная оболочка состоит из двух слоев гладкомышечных клеток, из которых внутренний является циркулярным, наружный – продольным. Серозная оболочка представлена рыхлой соединительной тканью и мезотелием [2].

**Мышечный желудок.** Стенка мышечного желудка имеет три оболочки: слизистую, мышечную и серозную. Эпителиальный слой слизистой оболочки состоит из однослойного кубического эпителия. Его впячивания в основу слизистой являются желудочными ямочками. В них открываются выводные протоки простых трубчатых желез, расположенных в основной пластинке. Железа состоит из дна, тела и шейки. Железы построены из главных клеток кубической формы с интенсивно развитой белоксинтезирующей системой, или гранулярной эндоплазматической сетью. Плазмолемма на апикальной поверхности клеток образует множество микроворсинок. Предшественниками главных клеток являются базальные клетки. Перемещаясь по направлению к шейке железы, они становятся клетками желудочных ямок и покровным эпителием. Железы вырабатывают секрет, затвердевающий на поверхности желудка и образующий очень твердый теркообразный слой – кератиноидный покров (кутикулу) [2]. Этот покров состоит из вертикально ориентированных колонок, образовавшихся из секрета трубчатых желез и расположенного между ними матрикса. Матрикс в свою очередь формируется из секрета клеток желудочных ямок и поверхностного эпителия. Механическому размягчению пищи способствует находящийся в просвете мышечного желудка песок, гравий, камушки и другие твердые предметы. В секрете желез ферментов нет и пищеварительный сок не вырабатывается. Переваривание корма протекает под действием секрета железистого желудка, бактерий, энзимов пищи. Мышечный слой слизистой оболочки отсутствует. Подслизистый слой состоит из плотной волокнистой соединительной ткани [2].

Мышечная оболочка представлена мощными пучками гладкомышечных клеток. Ее сильные сокращения способствуют механическому размягчению корма. Кольцевой слой на дорсальном и вентральном краях желудка образует треугольные главные мышцы. Между ними находятся промежуточные мышцы. Серозная оболочка имеет соединительнотканый слой и мезотелий [2].

**Выводы.** У птиц в связи с незначительной способностью к размельчению пищи в полости рта, наблюдается сильное развитие органов, соответствующих желудку: кроме железистого желудка, выделяющего желудочный сок, существует еще мускульный желудок, стенки которого отличаются сильным развитием мышц и роговым слоем, покрывающим внутреннюю его стенку [1].

Имеющиеся в отечественной и зарубежной литературе данные, по морфологии желудка птиц малочисленны, носят в основном разрозненный и фрагментарный характер. Знания морфофункциональной характеристики этого органа с учетом возраста птицы важны как для специалистов морфологии, так и птицеводства и ветеринарной медицины.

#### Список литературы

1. Акаевский А.И., Селезнев С.Б., Юдичев Ю.Ф. Анатомия домашних животных. – 5-е изд. перер. и доп. М.: Аквариум Бук, 2005. 640 с.
2. Вракин В.Ф., Сидорова М.В. Анатомия и гистология домашней птицы: учебное пособие. М: Колос, 1991. 528с.
3. Глаголев П.А., Ипполитова В.И. Анатомия сельскохозяйственных животных с основами гистологии и эмбриологии: учебное пособие. М.: Колос, 1977. 480с.
4. Фисинин В.И. Бройлерное производство: резервы и перспективы // Животноводство России. М.: 2004. №6. С.8-11.

5. Хрусталеv И.В. Анатомия домашних животных: учебное пособие. М.: Колос, 2000. 703с.

#### **Сведения об авторах**

Селезнева Мария Сергеевна – магистрант Брянского государственного университета И.Г. Петровского, e-mail: meris\_2104@mail.ru

Зайцева Елена Владимировна – доктор биологических наук, профессор кафедры биологии Брянского государственного университета И.Г. Петровского, e-mail: z\_ev11@mail.ru

### **MORPHOLOGY OF GASTRIC AGRICULTURAL BIRD**

**M.S. Selezneva, E.V. Zaitseva**

Bryansk State University

The article presents the current state of science on the structure of the digestive system of farm birds. The authors of the analysis has been made of modern scientific literature, allowing to compile and organize data on the structure of the stomach in farm birds.

**Keywords:** *digestive system, stomach, gizzard, glandular stomach, Poultry*

#### **References**

1. Akayevskiy A.I., Seleznev S.B., Yudichev Y.F. Anatomy of domestic animals. - 5th ed. break. and ext. M.: Aquarium Book, 2005. 640 p.
2. Vraikin V.F. Sidorova M.V. Anatomy and histology of poultry: a tutorial. M: Kolos, 1991. 528 p.
3. Glagolev P.A., Ippolitova V.I. Anatomy of farm animals with the basics of histology and embryology: a tutorial. M.: Kolos, 1977. 480 p.
4. Fisinin V.I. Broiler production: reserves and prospects // Livestock Russia. M.: 2004. №6. P.8-11.
5. Hrustalev I.V. Pet Anatomy: a tutorial. M.: Kolos, 2000. 703 p.

#### **About author**

Selezneva M.S. – Bryansk State University Undergraduate, e-mail: meris\_2104@mail.ru

Zaitseva E.V. - Doctor of Biological sciences, professor of the Bryansk State University, e-mail: z\_ev11@mail.ru

**ТРЕБОВАНИЯ**  
**К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ ДЛЯ**  
**ПУБЛИКАЦИИ В РЕЦЕНЗИРУЕМОМ ЭЛЕКТРОННОМ НАУЧНОМ ЖУРНАЛЕ**  
**«УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»**  
**(«УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ БГУ»)**

**Требования к содержанию статей.**

В журнале «Ученые записки БГУ» публикуются статьи теоретического и прикладного характера, содержащие оригинальный материал исследований автора (соавторов), ранее нигде не опубликованный и не переданный в редакции других журналов. Материал исследований должен содержать научную новизну и/или иметь практическую значимость. К публикации принимаются только открытые материалы на русском, английском или немецком языках. Статьи обзорного, биографического характера, рецензии на научные монографии и т.п. пишутся, как правило, по заказу редколлегии журнала.

**Требования к объему статей.**

Полный объем статьи, как правило, не должен превышать 1 Мб, включая иллюстрации и таблицы.

**Общие требования к оформлению статей.**

Статьи представляются в электронном виде, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (Word 97/2000, Word XP/2003) и разбитые на страницы размером А4. См. образец с настроенными стилями.

Все поля страницы – по 2 см, верхний и нижний колонтитулы – по 1,5 см. Текст набирается шрифтом Times New Roman, 12 pt, межстрочный интервал - одинарный, красная строка (абзац) - 1,25 см, выравнивание по ширине, включен режим принудительного переноса в словах. Страницы не нумеруются.

Если статья выполнена при поддержке гранта или на основе доклада, прочитанного на конференции, то необходимо сделать соответствующее упоминание в конце статьи.

К статье должна быть приложена авторская справка, содержащая следующую информацию по каждому автору: фамилию, имя, отчество (при наличии), научную степень, ученое звание, место работы, должность, точный почтовый адрес места работы (домашний адрес указывать недопустимо), контактный телефон – рабочий или сотовый (домашний телефон указывать недопустимо), e-mail, согласие на обработку указанных данных и размещение их в журнале. См. образец авторской справки.

В статье следует использовать только общепринятые сокращения.

Редакция не принимает к рассмотрению рукописи статей, оформленные не по установленным правилам.

**Требования к структуре статей.**

Статья формируется из отдельных структурных составляющих в следующей последовательности:

- 1) первая строка: номер УДК (стиль «УДК»);
- 2) вторая строка: название статьи (стиль «Название»);
- 3) пропустив одну строку: фамилии и инициалы авторов (стиль «Автор»);
- 4) наименование организации(й), которую представляют авторы (стиль «Организация»);
- 5) пропустив одну строку: аннотация на русском языке (стиль «Аннотация»);
- 6) ключевые слова (стиль «Ключевые слова»);
- 7) пропустив одну строку: основной текст статьи (стиль «Текст») с иллюстрациями (стиль «Подписуночная надпись») и таблицами (стили «Номер таблицы» и «Название таблицы»);
- 8) пропустив одну строку: список литературы (стили «Список литературы» и «Источники»);
- 9) пропустив одну строку: сведения об авторах (стили «Об авторах» и «Сведения»);

- 10) пропустив одну строку: название статьи на английском языке (стиль «Название»);
- 11) пропустив одну строку: фамилии и инициалы авторов на латинице (стиль «Автор»);
- 12) наименование организации(й), которую представляют авторы, на латинице (стиль «Организация»);
- 13) пропустив одну строку: аннотация на английском языке (стиль «Аннотация»);
- 14) ключевые слова на английском языке (стиль «Ключевые слова»);
- 15) пропустив одну строку: список литературы на английском языке (стиль «Список литературы» и «Источники»);
- 16) пропустив одну строку: сведения об авторах на английском языке (стили «Об авторах» и «Сведения»).

Указанные структурные составляющие статьи являются обязательными.

#### **Требования к оформлению структурных составляющих статей.**

Аннотация на русском языке, в которой отражается краткое содержание статьи, должна иметь объем, как правило, не более 8 строк. Аннотация на английском языке должна содержать не менее 100-250 слов, быть информативной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований) и оригинальной (не быть калькой аннотации на русском языке).

Количество ключевых слов на русском и английском языках не должно превышать 15 слов (для каждого языка).

Оптимальной считается следующая структура статьи: «Введение» с указанием актуальности и цели научной работы, «Постановка задачи», «Результаты», «Выводы или заключение», «Литература», «Приложение». В «Приложении» при необходимости могут приводиться математические выкладки, не вошедшие в основной текст статьи и иной вспомогательный материал). В тексте статьи допускается использование систем физических единиц СИ (предпочтительно) и/или СГСЭ. В обязательном порядке статья должна завершаться выводами или заключением.

Все иллюстрации и таблицы – не редактируемые файлы в формате jpg, которые должны быть вставлены в текст. Дополнительно иллюстрации прилагаются отдельными файлами в формате jpg. Рисунки встраиваются в текст через опцию «Вставка-Рисунок-Из файла» с обтеканием «В тексте» с выравниванием по центру страницы без абзацного отступа. Иные технологии вставки и обтекания не допускаются. Все рисунки и чертежи выполняются четко, в формате, обеспечивающем ясность понимания всех деталей; это особенно относится к фотокопиям и полутоновым рисункам. Рисунки, выполненные карандашом, не принимаются. Рисунки, выполненные в MS Word, недопустимы. Язык надписей на рисунках (включая единицы измерения) должен соответствовать языку самой статьи. Поясняющие надписи следует по возможности заменять цифрами и буквенными обозначениями, разъясняемыми в подписи к рисунку или в тексте. Авторов, использующих при подготовке рисунков компьютерную графику, просим придерживаться следующих рекомендаций: графики делать в рамке; штрихи на осях направлять внутрь; по возможности использовать шрифт Times New Roman; высота цифр и строчных букв должна соответствовать высоте букв в тексте статьи.

Формулы должны быть набраны только в редакторе формул (Microsoft Equation). Высота шрифта 12 pt, крупных индексов – 8 pt, мелких индексов – 5 pt, крупных символов – 18 pt, мелких символов – 12 pt. Формулы, внедренные как изображение, не допускаются! Статья должна содержать лишь самые необходимые формулы, от промежуточных выкладок желательно отказаться. Векторные величины выделяются прямым полужирным шрифтом. Все сколько-нибудь громоздкие формулы выносятся на отдельные строки. Формулы должны быть вставлены по центру в таблицу с невидимыми контурами, состоящей из двух колонок. Левая широкая колонка используется для размещения самой формулы, а правая узкая колонка – для номера формулы. Номер формулы ставится в скобках и располагается по

центру ячейки таблицы. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте статьи.

В список литературы включаются только те источники, на которые в тексте статьи имеются ссылки. Желательно шире использовать иностранные источники. Список формируется либо в порядке цитирования, либо в алфавитном порядке (вначале источники на русском языке, затем на иностранных языках). Ссылки на литературу по тексту статьи необходимо давать в квадратных скобках. Библиографические описания цитируемых источников в списке литературы оформляются в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008 «Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Ссылки на работы, находящиеся в печати, не допускаются. Список литературы должен быть продублирован на латинице (см. Написание русских символов латиницей). Рекомендации по представлению ссылок в списке литературы на латинице, удовлетворяющего требованиям поисковых систем международных баз данных, – см. Представление источников на латинице.

Сведения об авторах должны включать следующую информацию (на русском и английском языках): фамилию и инициалы автора, ученую степень и ученое звание (при их наличии), должность с указанием места работы (полное название организации, без сокращения), адрес электронной почты. В англоязычном варианте желательно (но не обязательно) также привести дополнительную информацию, в частности, указать дату рождения, назвать законченные учебные заведения и полученные в них научные степени или квалификацию, указать область научных интересов и др.

#### **Требования к составу присылаемого в редакцию комплекта документов.**

В комплект документов, присылаемых в редакцию журнала, должны входить:

1) файл с расширением .doc, содержащий полностью подготовленную к публикации согласно вышеперечисленным требованиям журнала статью (включая размещенные в ее тексте рисунки), название которого складывается из фамилий всех авторов (например, «Иванов И.И.,Петров П.П.doc»);

2) файлы с расширением .jpg, содержащие по одному рисунку статьи, название которых соответствует номерам рисунков (например, «Рисунок 01.jpg»);

3) файлы с расширением .pdf, содержащие по одной авторской справке с подписью автора, название которых соответствует фамилии автора (например, «Иванов И.И.doc»).

К статьям, выполненными аспирантами или соискателями научной степени кандидата наук, необходимо приложить рекомендацию, подписанную научным руководителем (если научный руководитель не входит в число соавторов данной статьи).

Каждая статья в обязательном порядке проходит процедуру закрытого рецензирования. Порядок рецензирования установлен документом «Порядок рецензирования рукописей». По результатам рецензирования редколлегия оставляет за собой право либо вернуть автору статью на доработку, либо отклонить ее публикацию в журнале.

Редакция журнала оставляет за собой право на редактирование статей с сохранением авторского варианта научного содержания.

В опубликованной статье указывается дата поступления рукописи статьи в редакцию. В случае существенной переработки рукописи статьи указывается дата получения редакцией окончательного текста статьи.

#### **Статьи публикуются бесплатно.**

Все материалы отправлять по адресу:

241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д.20, каб. 101

Телефон: +7 (4832) 666-758

E-mail: enibgu@mail.ru

Изменения и дополнения к правилам оформления статей можно посмотреть на официальном сайте журнала: <http://www.scim-brgu.ru>

**УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ  
БРЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ/ БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ/  
ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ**

Свидетельство о регистрации средства массовой информации выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций  
Эл № ФС77-62799 от 18.08.2015

**Главный редактор журнала:**  
доктор биологических наук, профессор  
Зайцева Е. В.

**Адрес учредителя:**  
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского» 241036, г. Брянск, Бежицкая, 14.

**Адрес редакции и издателя:**  
РИО ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского». 241036, г. Брянск, Бежицкая, 20.

Для получения дополнительной информации, заключения лицензионных договоров или проведения иных патентных действий необходимо обратиться в отдел инновационного развития Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского:  
Телефон: +7(4832) 64-81-17, доб. 220  
E-mail: Inno-BGU@yandex.ru

Дата выхода журнала в свет 05.10.2016. **16+**